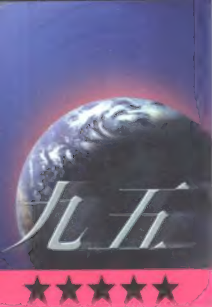


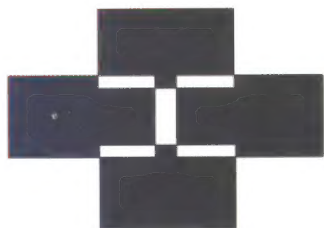
普通高等教育"九五"教育部重点教材



FEIXIANXINGFANHANFENXI

非线性泛函分析

郭大钧 著



山东科学技术出版社
www.lkj.com.cn

非线性泛函分析

（第二版）

郭大钧　著

山东科学技术出版社

图书在版编目（CIP）数据

非线性泛函分析(第二版)/郭大钧著.—济南:山东科学技术出版社,2001.8(2001.12重印)
ISBN 7-5331-2925-3

Ⅰ.非…　Ⅱ.郭…　Ⅲ.非线性-泛函分析　Ⅳ.0177.91

中国版本图书馆CIP数据核字（2001）第043000号

非线性泛函分析(第二版)

郭大钧　著

出版者:山东科学技术出版社
地址:济南市玉函路16号
邮编:250002　电话:(0531)2065109
网址:www.lkj.com.cn
电子邮件:sdkj@jn-public.sd.cninfo.net

发行者:山东科学技术出版社
地址:济南市玉函路16号
邮编:250002　电话:(0531)2020432

印刷者:山东新华印刷厂临沂厂
地址:临沂市解放路76号
邮编:276002　电话:(0539)8222161

开本:850mm×1168mm　1/32
印张:17.5
字数:386千
版次:2002年1月第2版第3次印刷
印数:6 001-7 000

ISBN 7-5331-2925-3
定价:28.00元

内 容 提 要

本书共分五章．

第一章论述非线性算子的一般性质，包括连续性、有界性、全连续性、可微性等，并给出了隐函数定理和反函数定理．

第二章建立拓扑度理论．不仅建立了最重要的有限维空间连续映象的 Brouwer 度和 Banach 空间全连续场的 Leray－Schauder 度，而且论述了较常用的凝聚场的拓扑度和 A－proper 映象的广义拓扑度．

第三章将半序和拓扑度(不动点指数)相结合来研究非线性算子方程的正解，讨论了常用的凹算子和凸算子的正解及多解问题．

第四章主要证明强制半连续单调映象的满射性和强制多值极大单调映象的满射性．

第五章论述非线性问题中的变分方法，既包括古典的极值理论，也包括属于大范围变分学的 Minimax 原理和 Mountain Pass 引理等．

书中包括了对于非线性积分方程、常微分方程以及二阶半线性椭圆型偏微分方程的应用．

本书可作为综合性大学和师范学院数学系研究生的教材以及高年级大学生的选修课教材，也可供从事非线性问题研究的大学教师和科技工作者参考．

第 二 版 序

第二版基本上是第一版的重印．在第三章§2的末尾，我们增加了一个有关非紧减算子的不动点定理（定理2.5）．另外，对书末尾的参考文献做了一些调整，增加了反映近年来重要工作的若干论文．

本书再版过程中，得到山东科学技术出版社的大力支持和国家自然科学基金及山东大学出版基金委员会的资助，特致谢意．

郭大钧

2001年4月15日

于山东大学南院

序

近年来，分析学研究对象和方法的发展，表明泛函分析的地位日益重要．在培养科学专门人才的过程中，泛函分析已成为过去公认的数学分析课程的继续和补充，这对基础数学专业的学生和其他某些学科专业人员来说都是必需的．在科学技术进步中，要求分析和控制客观现象的数学能力向着富有全局性的高、精水平发展，从而使非线性分析的成果不断积累，逐渐促成了分析数学内新分支学科的诞生．无论如何，在无穷维空间框架中，处理分析学的线性及非线性问题的方式有着无穷的潜力，近数十年的成就以充足理由要求人们接受非线性泛函分析这一重要的分支学科．当前，我国为了实现建设四个现代化的宏伟目标，急需培养人才．要求学习非线性泛函分析的，已不局限于专门从事泛函分析中某一方面工作的人员．事实上，近十多年来，各国出版的一些普通泛函分析教程已见变化，使非线性部分的比率增加；同时，以非线性泛函分析为题名的教程也多起来了．

非线性泛函分析的内容大都可追溯到二三十年代．现今大体上公认的几个方面，如变分学及变分方法的成就从泛函分析开始成为学科就起着作用；拓扑学方法及其成就，不动点及拓扑度理论，乃至解析方法，大致也是如此．正像有悠久历史的学科，例如线性偏微分方程理论的新著，往往各有其针对性一样，非线性泛函分析的教程，自然也当各具特色．

郭大钧教授对非线性泛函分析的几个重要课题及其应用，诸如某些典型的非线性算子、Hammerstein 积分方程、常偏微分方程、迁移方程、凸锥理论与非线性算子方程的正解、非线性算子拓扑度和不动点定理以及固有值、解的个数与分支，系统地研究达二十余年，取得了卓越的成果．他掌握的理论深广，并注意了课题间的沟通．为了满足我国数学教学及科研的需要，考虑到我国数学界的现状和加速吸收当代知识的迫切性，他选取多年所授专题课教材并加入科研活动中有关成就，整理成本书．该书结合概念的引进和定理的论证，特别注意了例、反例及必要的评注，反映了非线性泛函分析的发展现状及某些科研领域需要的若干知识．书后附有丰富的参考文献．读者阅读本书，将能得到益处．

田方增

1983 年 12 月 20 日

目　　录

第一章　非线性算子

本章论述非线性算子的一般性质，包括连续性、有界性、全连续性、可微性等．这是一些基本概念和性质，在以后各章中都要用到．另外，我们给出了隐函数定理和反函数定理，这是两个用途广泛的重要定理．

§1　连续性与有界性

设 E_1 和 E_2 是两个实 Banach 空间，$D\subset E_1$．设算子 $A:D\to E_2$．一般假设 A 是非线性的．

定义 1.1　设 $x_0\in D$．若 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta=\delta(x_0,\varepsilon)>0$ 使当 $x\in D$ 且 $\|x-x_0\|<\delta$ 时，恒有 $\|Ax-Ax_0\|<\varepsilon$，则称 A **在 x_0 连续**；若 A 在 D 中每一点都连续，则称 A **在 D 连续**；若上述 δ 只与 ε 有关而与 $x_0\in D$ 无关，则称 A **在 D 一致连续**．

注 1　显然，A 在 $x_0\in D$ 连续的充分必要条件是：对任何 $x_n\in D$，$x_n\to x_0$ 都有 $Ax_n\to Ax_0(n\to\infty)$．

定义 1.2　若 A 将 D 中任何有界集变成 E_2 中的有界集，则称 A **在 D 上有界**．

注 2　众所周知，对于线性算子而言，连续性与有界性是等价的，但对于非线性算子，则没有这种等价关系．例如，考察空间 l_2 上的泛函：

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty} kr_k,$$
$$\forall x=(x_1,x_2,\cdots,x_k,\cdots)\in l_2,$$
其中 $r_k=\max\{|x_k|-1,0\}(k=1,2,\cdots)$. 由于 $x_k\to 0(k\to\infty)$, 故上述和式中只有有限项不为零, 即 $f(x)$存在. 易知, 若 $x^{(n)}=(x_1^{(n)},x_2^{(n)},\cdots)\in l_2$, $x=(x_1,x_2,\cdots)\in l_2$, 且
$$\|x^{(n)}-x\|=\left\{\sum_{k=1}^{\infty}(x_k^{(n)}-x_k)^2\right\}^{\frac{1}{2}}\to 0 \quad (n\to\infty)$$
则必有 $f(x^{(n)})\to f(x)$, 故 f 是 l_2 上的连续泛函. 但不难看出 f 在 l_2 上不是有界的. 事实上, 若令 $z^{(n)}=\left(z_1^{(n)},z_2^{(n)},\cdots,z_k^{(n)},\cdots\right)$, 其中
$$z_k^{(n)}=\begin{cases}2 & \text{当 } k=n \text{ 时};\\ 0 & \text{当 } k\neq n \text{ 时}.\end{cases}$$
显然 $z^{(n)}\in l_2$ 且 $\|z^{(n)}\|=2(n=1,2,\cdots)$; 但 $f(z^{(n)})=n\to\infty$ $(n\to\infty)$.

下面, 作为一个例子, 较详细地讨论常用的一个非线性算子的连续性和有界性. 设 G 是 R^N 中可测集, 且 $0<\text{mes}G\leqslant+\infty$. 函数 $f(x,u)$ $(x\in G, -\infty<u<+\infty)$ 叫做满足 **Caratheodory 条件**, 如果:

(ⅰ) 对几乎所有的 $x\in G$, $f(x,u)$是 u 的连续函数;

(ⅱ) 对每个 u, $f(x,u)$是 x(在 G 上)的可测函数.

算子
$$\mathbf{f}\varphi(x)=f(x,\varphi(x)) \tag{1·1}$$
叫做 **Немыцкий 算子**.

引理 1.1 设 $\text{mes}G<+\infty$. 则 $f(x,u)$满足 Caratheodory 条件的充分必要条件是: $\forall\,\eta>0$, $\exists$ 有界闭集 $F\subset G$, $\text{mes}F>$

$\mathrm{mes}G-\eta$ 使 $f(x,u)$ 在 $F\times(-\infty,+\infty)$ 上连续.

证 充分性:由假定,存在有界闭集 $F_n\subset G$, $\mathrm{mes}F_n>\mathrm{mes}G-\frac{1}{n}(n=1,2,\cdots)$,使 $f(x,u)$ 在 $F_n\times(-\infty,+\infty)$ 上连续.令 $F=\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n\subset G$,则 $\mathrm{mes}F=\mathrm{mes}G$,且当 $x\in F$ 时,$f(x,u)$ 是 u 在 $-\infty<u<+\infty$ 上的连续函数,故 Caratheodory 条件的(i)满足.又,显然对于固定的 $u\in(-\infty,+\infty)$,集 $\{x\in F_n|f(x,u)\geqslant a\}$($a$ 为实数)是有界闭集,从而集

$$\{x\in F|f(x,u)\geqslant a\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{x\in F_n|f(x,u)\geqslant a\}$$

是可测集,因此,$f(x,u)$ 作为 x 的函数是 F 上的可测函数,当然也是 G 上的可测函数,故 Caratheodory 条件的(ii)满足.

必要性:给定 $\eta>0$,只须证明下述结论:存在有界闭集 $F_n\subset G$, $\mathrm{mes}F_n>\mathrm{mes}G-\frac{\eta}{2^n}$ 以及 $\delta_n>0(n=1,2,\cdots)$,使得当 $x_1,x_2\in F_n$,其距离 $d(x_1,x_2)<\delta_n$,$u_1,u_2\in[-n,n]$,$|u_1-u_2|<\delta_n$ 时,恒有

$$|f(x_2,u_2)-f(x_1,u_1)|<\frac{1}{n}\quad(n=1,2,\cdots).$$

事实上,若已证上述结论,令 $F=\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n\subset G$,则 F 是有界闭集,满足

$$\mathrm{mes}(G\setminus F)=\mathrm{mes}\bigcup_{n=1}^{\infty}(G\setminus F_n)$$
$$\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{mes}(G\setminus F_n)<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\eta}{2^n}=\eta$$

而且可证 $f(x,u)$ 在 $F\times(-\infty,+\infty)$ 上连续如下:给定$(x_1,u_1)\in F\times(-\infty,+\infty)$,对于任意给定的 $\varepsilon>0$,取定 n_0,使 $\frac{1}{n_0}$

$<\varepsilon$, $|u_1|<n_0-1$. 于是，当 $(x_2,u_2)\in F\times(-\infty,+\infty)$，并满足 $d(x_1,x_2)<\delta=\min\{\delta_{n_0},1\}$，$|u_1-u_2|<\delta$ 时，恒有 $x_1,x_2\in F\subset F_{n_0}$，$d(x_1,x_2)<\delta_{n_0}$，$|u_2|<\delta+n_0-1\leqslant n_0$，从而

$$|f(x_2,u_2)-f(x_1,u_1)|<\frac{1}{n_0}<\varepsilon.$$

故 $f(x,u)$ 在 $F\times(-\infty,+\infty)$ 上连续．下证上述结论，令

$G_0=\{x\in G\,|\,f(x,u)$ 作为 u 的函数在 $-\infty<u<+\infty$ 上连续$\}$.

由 Caratheodory 条件的(ⅰ)知 $\text{mes}G_0=\text{mes}G$．又令

$$G_{m,n}=\left\{x\in G_0\,\middle|\,u_1,u_2\in[-n,n],\ |u_1-u_2|<\frac{1}{m}\text{ 蕴涵 } |f(x,u_1)-f(x,u_2)|\leqslant\frac{1}{3n}\right\}(n=1,2,\cdots).$$

注意到有理数的稠密性，知 $G_0\setminus G_{m,n}=\left\{x\in G_0\,\middle|\,\text{存在 } u_1,u_2\in[-n,n],\text{使 } |u_1-u_2|<\frac{1}{m},\ |f(x,u_1)-f(x,u_2)|>\frac{1}{3n}\right\}=\left\{x\in G_0\,\middle|\,\text{存在有理数 } u_1,u_2\in[-n,n],\text{使 } |u_1-u_2|<\frac{1}{m},\ |f(x,u_1)-f(x,u_2)|>\frac{1}{3n}\right\}$.

由 Caratheodory 条件(ⅱ)知，对于固定的 u_1,u_2，集 $\left\{x\in G_0\,\middle|\,|f(x,u_1)-f(x,u_2)|>\frac{1}{3n}\right\}$ 是可测集，从而集 $G_0\setminus G_{m,n}$（作为可数个这种可测集的并集）也是可测集，因此，集 $G_{m,n}$ 是可测集．显然，对固定的 n，有 $G_{1,n}\subset G_{2,n}\subset G_{3,n}\subset\cdots$．令 $E_n=\bigcup\limits_{m=1}^{\infty}G_{m,n}\subset G_0$，证明 $E_n=G_0$．事实上，若 $E_n\neq G_0$，则存在 $x_0\in G_0\setminus E_n=\bigcap\limits_{m=1}^{\infty}(G_0\setminus G_{m,n})$，从而存在 $u_1^{(m)},u_2^{(m)}\in[-n,n]$ 使

$$|u_1^{(m)} - u_2^{(m)}| < \frac{1}{m}$$

$$|f(x_0, u_1^{(m)}) - f(x_0, u_2^{(m)})| > \frac{1}{3n} \quad (m = 1, 2, \cdots)$$

此显然与函数 $f(x_0, u)$在 $-n \leqslant u \leqslant n$ 上一致连续矛盾．于是，证明了 $E_n = G_0 (n = 1, 2, \cdots)$．从而有

$$\lim_{m \to \infty} \mathrm{mes} G_{m,n} = \mathrm{mes} G_0 \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

对给定的 n，取 m_0，使

$$\mathrm{mes} G_{m_0, n} > \mathrm{mes} G_0 - \frac{1}{2^n} \cdot \frac{\eta}{3}$$

将区间$[-n, n]$分成 $s = 2nm_0$ 等分，设分点为

$$-n = u^{(0)} < u^{(1)} < \cdots < u^{(s)} = n.$$

由 Лузин 定理，存在有界闭集 $D_i \subset G_0$，满足

$$\mathrm{mes} D_i > \mathrm{mes} G_0 - \frac{\eta}{3(s+1)2^n}$$

且使 $f(x, u^{(i)})$作为 x 的函数在D_i 上连续（从而，一致连续），$i = 0, 1, \cdots, s$．令 $D = \bigcap_{i=0}^{s} D_i$，则由一致连续性知，存在 $\delta > 0$，使

$$|f(x_1, u^{(i)}) - f(x_2, u^{(i)})| < \frac{1}{3n}, \ \forall x_1, x_2 \in D,$$

$$d(x_1, x_2) < \delta, \quad i = 0, 1, \cdots, s.$$

现取闭集 $F_n \subset G_{m_0, n} \cap D$，使

$$\mathrm{mes} F_n > \mathrm{mes}(G_{m_0, n} \cap D) - \frac{1}{2^n} \cdot \frac{\eta}{3},$$

又取 δ_n，使 $0 < \delta_n < \min\left\{\delta, \frac{1}{m_0}\right\}$．下证此 F_n 与δ_n 即合要求．

事实上

$$G_0 \setminus (G_{m_0, n} \cap D) = (G_0 \setminus G_{m_0, n}) \cup (G_0 \setminus D)$$

$$=(G_0\setminus G_{m_0,n})\cup(\bigcup_{i=0}^{s}(G_0\setminus D_i)),$$

从而

$$\begin{aligned}&\operatorname{mes}(G_0\setminus(G_{m_0,n}\cap D))\\ \leqslant&\operatorname{mes}(G_0\setminus G_{m_0,n})+\sum_{i=0}^{s}\operatorname{mes}(G_0\setminus D_i)\\ <&\frac{1}{2^n}\cdot\frac{\eta}{3}+\sum_{i=0}^{s}\frac{\eta}{3(s+1)2^n}=\frac{1}{2^n}\cdot\frac{2\eta}{3},\end{aligned}$$

故有

$$\operatorname{mes}(G_{m_0,n}\cap D)>\operatorname{mes}G_0-\frac{1}{2^n}\cdot\frac{2\eta}{3},$$

因此,得

$$\operatorname{mes}F_n>\operatorname{mes}G_0-\frac{\eta}{2^n}=\operatorname{mes}G-\frac{\eta}{2^n}$$

设 $x_1, x_2\in F_n$, $d(x_1, x_2)<\delta_n$, $u_1, u_2\in[-n, n]$, $|u_1-u_2|<\delta_n$. 由于 $\delta_n<\frac{1}{m_0}$, 而 $u^{(i+1)}-u^{(i)}=\frac{1}{m_0}(i=0,1,2,\cdots,s-1)$, 故存在某 $u^{(i)}$, 使 $|u_1-u^{(i)}|<\frac{1}{m_0}$, $|u_2-u^{(i)}|<\frac{1}{m_0}$, 从而知

$$\begin{aligned}&|f(x_2,u_2)-f(x_1,u_1)|\\ \leqslant&|f(x_2,u_2)-f(x_2,u^{(i)})|\\ &+|f(x_2,u^{(i)})-f(x_1,u^{(i)})|\\ &+|f(x_1,u^{(i)})-f(x_1,u_1)|\\ <&\frac{1}{3n}+\frac{1}{3n}+\frac{1}{3n}=\frac{1}{n}.\end{aligned}$$

证完.

以下恒设 $f(x,u)$满足 Caratheodory 条件.

引理 1.2 若 $\varphi(x)$ 在 G 上可测，则 $\mathbf{f}\varphi(x)=f(x,\varphi(x))$ 也是 G 上可测函数．

证 先设 $\mathrm{mes}G<+\infty$．由引理 1.1，∃闭集 $F_n\subset G$，$\mathrm{mes}F_n>\mathrm{mes}G-\frac{1}{n}(n=1,2,\cdots)$，使 $f(x,u)$ 在 $F_n\times(-\infty,+\infty)$ 上连续．不妨设 $F_n\subset F_{n+1}(n=1,2,\cdots)$，否则，以 $\bigcup_{k=1}^{n}F_k$ 作为新的 F_n 即可．由 Лузин 定理，∃闭集 $D_n\subset F_n$，$\mathrm{mes}D_n>\mathrm{mes}F_n-\frac{1}{n}$，使 $\varphi(x)$ 在 D_n 上连续．同样可设 $D_n\subset D_{n+1}(n=1,2,\cdots)$．令 $D=\bigcup_{n=1}^{\infty}D_n$，$H=G\setminus D$，则

$$\mathrm{mes}D=\lim_{n\to\infty}\mathrm{mes}D_n=\mathrm{mes}G,$$

并且 $\mathrm{mes}H=0$．对任何实数 a，显然集合

$$\{x\mid x\in D_n,f(x,\varphi(x))\geqslant a\}$$

是闭集，而集合

$$\{x\mid x\in D,f(x,\varphi(x))\geqslant a\}$$
$$=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{x\mid x\in D_n,f(x,\varphi(x))\geqslant a\},$$

故 $\{x\mid x\in D,f(x,\varphi(x))\geqslant a\}$ 是可测集，从而集合

$$\{x\mid x\in G,f(x,\varphi(x))\geqslant a\}$$

是可测集，于是 $f(x,\varphi(x))$ 是 G 上的可测函数．

现设 $\mathrm{mes}G=+\infty$，把 G 表为

$$G=\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n,$$

其中 $G_n\cap G_m=\varnothing(n\neq m)$，$\mathrm{mes}G_n<+\infty(n=1,2,\cdots)$．由前段已知 $f(x,\varphi(x))$ 是 G_n 上的可测函数，故集合 $\{x\mid x\in G_n,f(x,\varphi(x))\geqslant a\}$ 是可测集，从而集合

$$\{x\mid x\in G,f(x,\varphi(x))\geqslant a\}$$

$$= \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \mid x \in G_n, f(x, \varphi(x)) \geqslant a\}$$

也是可测集,因此 $f(x, \varphi(x))$是 G 上的可测函数．证完．

引理 1.3 设 $\text{mes}G < +\infty$．若 $\varphi_n(x)(n=1,2,\cdots)$在 G 上依测度收敛于 $\varphi(x)$,则 $\mathbf{f}\varphi_n(x)$必在 G 上依测度收敛于 $\mathbf{f}\varphi(x)$.

证 $\forall \sigma > 0$,令

$$F_n = \{x \mid x \in G, |f(x, \varphi_n(x)) - f(x, \varphi(x))| \geqslant \sigma\}.$$

我们需证 $\lim\limits_{n\to\infty} \text{mes}F_n = 0$,即

$$\lim_{n\to\infty} \text{mes}D_n = \text{mes}G, \tag{1·2}$$

这里 $D_n = G \setminus F_n = \Big\{x \mid x \in G, |f(x, \varphi_n(x)) - f(x, \varphi(x))| < \sigma\Big\}$．令 $G_k = \Big\{x \mid x \in G$ 满足:对任何 u,只要 $|\varphi(x) - u| < \dfrac{1}{k}$,就有 $|f(x, \varphi(x)) - f(x, u)| < \sigma\Big\}$,

其中 $k=1,2,\cdots$．显然 $G_1 \subset G_2 \subset G_3 \subset \cdots$．令 $H = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} G_k$．若 $x_0 \in G \setminus H$,则 $x_0 \overline{\in} G_k(k=1,2,\cdots)$．因此$\exists u_k$,使

$$|\varphi(x_0) - u_k| < \frac{1}{k}, \quad |f(x_0, \varphi(x_0)) - f(x_0, u_k)| \geqslant \sigma$$

$$(k=1,2,\cdots),$$

故函数 $f(x_0, u)$在点 $u = u_0 = \varphi(x_0)$处不连续．于是,由 $f(x, u)$满足 Caratheodory 条件,知 $\text{mes}(G \setminus H) = 0$,即

$$\lim_{k\to\infty} \text{mes}G_k = \text{mes}H = \text{mes}G. \tag{1·3}$$

$\forall \varepsilon > 0$,由(1·3)式并注意到 $\text{mes}G < +\infty$,可取充分大的 k_0,使

$$\text{mes}G_{k_0} > \text{mes}G - \frac{\varepsilon}{2} \tag{1·4}$$

令 $$Q_n = \left\{x \mid x \in G, |\varphi_n(x) - \varphi(x)| \geqslant \frac{1}{k_0}\right\},$$

$$R_n = G \setminus Q_n = \left\{ x \,\middle|\, x \in G, \left| \varphi_n(x) - \varphi(x) \right| < \frac{1}{k_0} \right\}.$$

由于 $\varphi_n(x)$ 依测度收敛于 $\varphi(x)$，故 $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{mes} Q_n = 0$，即 $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{mes} R_n = \mathrm{mes} G$，因此，∃ 正整数 N，使当时 $n > N$，恒有

$$\mathrm{mes} R_n > \mathrm{mes} G - \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1·5}$$

显然 $G_{k_0} \cap R_n \subset D_n$，故

$$G \setminus D_n \subset G \setminus (G_{k_0} \cap R_n) = (G \setminus G_{k_0}) \cup (G \setminus R_n),$$

于是，由(1·4)式与(1·5)式，并注意到 $\mathrm{mes} G < +\infty$，可知：当 $n > N$ 时恒有

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \mathrm{mes} G - \mathrm{mes} D_n = \mathrm{mes}(G \setminus D_n) \\ &\leqslant \mathrm{mes}(G \setminus G_{k_0}) + \mathrm{mes}(G \setminus R_n) \\ &= (\mathrm{mes} G - \mathrm{mes} G_{k_0}) + (\mathrm{mes} G - \mathrm{mes} R_n) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

故(1·2)式成立．证完．

定理 1.1 若算子 $\mathbf{f}$ 映 $L_{p_1}(G)(p_1 \geqslant 1)$ 入 $L_{p_2}(G)(p_2 \geqslant 1)$（即 $\mathbf{f}\varphi(x) \in L_{p_2}(G)$，$\forall\, \varphi(x) \in L_{p_1}(G)$），则 $\mathbf{f}$ 必连续．

证 先设 $\mathrm{mes} G < +\infty$．设 $f(x,0) \equiv 0$，证明算子 $\mathbf{f}$ 在空间 $L_{p_1}(G)$ 的零元素 θ 处连续．用反证法．假若 $\mathbf{f}$ 在点 θ 不连续，则存在 $\alpha > 0$ 及 $\varphi_n \in L_{p_1}(G)(n = 1, 2, \cdots)$，$\int_G \left| \varphi_n(x) \right|^{p_1} \mathrm{d}x \to 0$，使

$$\int_G \left| \mathbf{f}\varphi_n(x) \right|^{p_2} \mathrm{d}x > \alpha \quad (n = 1, 2, \cdots). \tag{1·6}$$

显然可以认为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_G |\varphi_n(x)|^{p_1}\mathrm{d}x < +\infty \tag{1·7}$$

(否则,取 $\{\varphi_n\}$ 的某子列作为新的 $\{\varphi_n\}$ 即可). 现作出正数列 ε_k, $\{\varphi_n\}$ 的子列 $\{\varphi_{n_k}\}$ 以及可测集列 $\{G_k\}$($G_k\subset G$),使满足下列四个条件:

(ⅰ) $\varepsilon_{k+1}\leqslant\frac{1}{2}\varepsilon_k$;

(ⅱ) $\mathrm{mes}G_k\leqslant\varepsilon_k$;

(ⅲ) $\int_{G_k}|\mathbf{f}\varphi_{n_k}(x)|^{p_2}\mathrm{d}x>\frac{2}{3}\alpha$;

(ⅳ) $D\subset G, \mathrm{mes}D\leqslant 2\varepsilon_{k+1}\Rightarrow\int_G|\mathbf{f}\varphi_{n_k}(x)|^{p_2}\mathrm{d}x<\frac{\alpha}{3}$.

ε_k, φ_{n_k}, G_k 可按归纳法作出:首先令 $\varepsilon_1=\mathrm{mes}G$, $\varphi_{n_1}(x)=\varphi_1(x)$, $G_1=G$;若 ε_k, φ_{n_k}, G_k 已作出,则可取 $\varepsilon_{k+1}>0$,使条件(ⅳ)满足,这是可以作到的,因为 Lebesgue 积分具有绝对连续性. 这时条件(ⅰ)必自动满足,因若 $\varepsilon_{k+1}>\frac{1}{2}\varepsilon_k$,则由条件(ⅱ)与(ⅲ)知

$$\mathrm{mes}G_k\leqslant\varepsilon_k<2\varepsilon_{k+1},$$

$$\int_{G_k}|\mathbf{f}\varphi_{n_k}(x)|^{p_2}\mathrm{d}x>\frac{2}{3}\alpha,$$

显然与条件(ⅳ)矛盾. 由 $\int_G|\varphi_n(x)|^{p_1}\mathrm{d}x\to 0$ 知 $\varphi_n(x)$ 在 G 上依测度收敛于 0,从而根据引理 1.3 知 $\mathbf{f}\varphi_n(x)$ 在 G 上也依测度收敛于 0;于是,在 $\{\varphi_n(x)\}$ 中可取某 $\varphi_{n_{k+1}}(x)$($n_{k+1}>n_k$),使 $\mathrm{mes}G_{k+1}<\varepsilon_{k+1}$,这里

$$G_{k+1}=\left\{x \,\middle|\, x\in G, |\mathbf{f}\varphi_{n_{k+1}}(x)|\geqslant\left(\frac{\alpha}{3\mathrm{mes}G}\right)^{\frac{1}{p_2}}\right\}$$

令
$$F_{k+1}=G\setminus G_{k+1}$$
$$=\left\{x \mid x\in G,\ |\mathbf{f}\varphi_{n_{k+1}}(x)|<\left(\frac{\alpha}{3\text{mes}G}\right)^{\frac{1}{p_2}}\right\},$$
则由(1·6)式知
$$\int_{G_{k+1}}|\mathbf{f}\varphi_{n_{k+1}}(x)|^{p_2}\mathrm{d}x$$
$$=\int_G|\mathbf{f}\varphi_{n_{k+1}}(x)|^{p_2}\mathrm{d}x-\int_{F_{k+1}}|\mathbf{f}\varphi_{n_{k+1}}(x)|^{p_2}\mathrm{d}x$$
$$>\alpha-\left(\frac{\alpha}{3\text{mes}G}\right)\cdot\text{mes}F_{k+1}\geqslant\alpha-\frac{\alpha}{3}=\frac{2}{3}\alpha;$$
由此可知，G_{k+1}与 $\varphi_{n_{k+1}}(x)$满足条件(ⅱ)和(ⅲ).

现在令
$$D_k=G_k\setminus\left(\bigcup_{i=k+1}^{\infty}G_i\right)\quad(k=1,2,\cdots).$$
则 $D_k\cap D_j=\varnothing\ (k\neq j)$, $D_k\subset G_k$, $G_k\setminus D_k\subset\bigcup\limits_{i=k+1}^{\infty}G_i$. 由条件(ⅱ)与(ⅰ)可知
$$\text{mes}(G_k\setminus D_k)\leqslant\text{mes}\left(\bigcup_{i=k+1}^{\infty}G_i\right)\leqslant\sum_{i=k+1}^{\infty}\varepsilon_i\leqslant 2\varepsilon_{k+1}.\qquad(1\cdot8)$$
作 G 上的函数
$$\psi(x)=\begin{cases}\varphi_{n_k}(x), & \text{当 } x\in D_k \text{ 时}(k=1,2,\cdots);\\ 0, & \text{当 } x\in G\setminus\left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}D_k\right)\text{时}.\end{cases}$$
由(1·7)式知
$$\int_G|\psi(x)|^{p_1}\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{D_k}\left|\varphi_{n_k}(x)\right|^{p_1}\mathrm{d}x$$
$$\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\int_G|\varphi_n(x)|^{p_1}\mathrm{d}x<+\infty,$$
故 $\psi\in L_{p_1}(G)$. 于是由假定知 $\mathbf{f}\psi\in L_{p_2}(G)$. 但由条件(ⅲ)与(ⅳ)以及(1·8)式知

$$\int_{D_k} |\mathbf{f}\psi(x)|^{p_2}\mathrm{d}x = \int_{D_k} |\mathbf{f}\varphi_{n_k}(x)|^{p_2}\mathrm{d}x$$

$$= \int_{G_k} |\mathbf{f}\varphi_{n_k}(x)|^{p_2}\mathrm{d}x - \int_{G_k \setminus D_k} |\mathbf{f}\varphi_{n_k}(x)|^{p_2}\mathrm{d}x$$

$$> \frac{2}{3}\alpha - \frac{\alpha}{3} = \frac{1}{3}\alpha \quad (k = 1, 2, \cdots),$$

故 $$\int_G |\mathbf{f}\psi(x)|^{p_2}\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty}\int_{D_k} |\mathbf{f}\psi(x)|^{p_2}\mathrm{d}x = +\infty,$$

此与 $\mathbf{f}\psi(x) \in L_{p_2}(G)$矛盾．于是在假定 $f(x,0) \equiv 0$ 下算子 $\mathbf{f}$ 在点 θ 处的连续性得到证明．

下面讨论一般情况，证明 $\mathbf{f}$ 在任何点 $\varphi_0(x) \in L_{p_1}(G)$都连续．考虑函数

$$f_1(x, u) = f(x, \varphi_0(x) + u) - f(x, \varphi_0(x))$$

$$(x \in G, -\infty < u < +\infty),$$

显然 $f_1(x, u)$也满足 Caratheodory 条件且 $f_1(x, 0) \equiv 0$，并且算子 $\mathbf{f}_1\varphi(x) = f_1(x, \varphi(x))$也映 $L_{p_1}(G)$入 $L_{p_2}(G)$．于是由上面已证明的结论知算子 $\mathbf{f}_1$ 在点 θ 连续，而这就相当于算子 $\mathbf{f}$ 在点 $\varphi_0(x)$连续．这样一来，在 $\mathrm{mes}G < +\infty$的假设下，定理 1·1 获证．

设 $\mathrm{mes}G = +\infty$．与 $\mathrm{mes}G < +\infty$的情形一样，要证 $\mathbf{f}$ 的连续性，只需在 $f(x,0) \equiv 0$ 的假定下证明 $\mathbf{f}$ 在点 θ 的连续性即可．仍用反证法，假定 $\mathbf{f}$ 在 θ 不连续，则存在 $\varphi_n \in L_{p_1}(G)$ $(n = 1, 2, \cdots)$，使(1·6)式与(1·7)式成立．以下按归纳法作出$\{\varphi_n\}$的子列$\{\varphi_{n_k}\}$，以及可测集序列 $D_k \subset G$ $(k = 1, 2, \cdots)$，使满足下列两个条件：

(ⅰ)′ $\mathrm{mes}D_k < +\infty,\ D_k \cap D_j = \varnothing \quad (k \neq j)$；

$$(\text{ii})' \int_{D_k} |\mathbf{f}\varphi_{n_k}(x)|^{p_2}\mathrm{d}x > \frac{\alpha}{2} \quad (k=1,2,\cdots).$$

首先令 $\varphi_{n_1}(x)=\varphi_1(x)$，由(1·6)式可取 $D_1 \subset G$，$\mathrm{mes}D_1 < +\infty$，使 $\int_{D_1} |\mathbf{f}\varphi_1(x)|^{p_2}\mathrm{d}x > \frac{\alpha}{2}$. 于是满足(ⅰ)′和(ⅱ)′的 $\varphi_{n_1}(x)$与 D_1 已作出．现设 $\varphi_{n_k}(x)$与 D_k 已作出，来作满足条件(ⅰ)′与(ⅱ)′的 $\varphi_{n_{k+1}}(x)$与 D_{k+1}. 由条件(ⅰ)′知 $\mathrm{mes}(\bigcup_{i=1}^{k} D_i) < +\infty$，根据前面已证的结果($\mathrm{mes}G < +\infty$时 $\mathbf{f}$ 的连续性)知：可取 $n_{k+1}(n_{k+1}>n_k)$，使

$$\int_{\bigcup_{i=1}^{n} D_i} |\mathbf{f}\varphi_{n_{k+1}}(x)|^{p_2}\mathrm{d}x < \frac{\alpha}{2}. \qquad (1\cdot 9)$$

由(1·6)式知可取 $G_{k+1} \subset G$，$\mathrm{mes}G_{k+1} < +\infty$，使

$$\int_{G_{k+1}} |\mathbf{f}\varphi_{n_{k+1}}|^{p_2}\mathrm{d}x > \alpha. \qquad (1\cdot 10)$$

令 $D_{k+1} = G_{k+1} \setminus (\bigcup_{i=1}^{k} D_i)$. 显然 D_{k+1}满足条件(ⅰ)′. 另外由于 $G_{k+1} \subset D_{k+1} \cup (\bigcup_{i=1}^{k} D_i)$，故

$$\begin{aligned}
&\int_{G_{k+1}} |\mathbf{f}\varphi_{n_{k+1}}(x)|^{p_2}\mathrm{d}x \\
\leqslant &\int_{D_{k+1}} |\mathbf{f}\varphi_{n_{k+1}}(x)|^{p_2}\mathrm{d}x \\
&+ \int_{\bigcup_{i=1}^{k} D_i} |\mathbf{f}\varphi_{n_{k+1}}(x)|^{p_2}\mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

于是由(1·9)式与(1·10)式可得

$$\begin{aligned}
&\int_{D_{k+1}} |\mathbf{f}\varphi_{n_{k+1}}(x)|^{p_2}\mathrm{d}x \\
\geqslant &\int_{G_{k+1}} |\mathbf{f}\varphi_{n_{k+1}}(x)|^{p_2}\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

$$-\int_{\bigcup\limits_{i=1}^{k} D_i} |\mathbf{f}\varphi_{n_{k+1}}(x)|^{p_2}\mathrm{d}x$$

$$>\alpha-\frac{\alpha}{2}=\frac{\alpha}{2}.$$

故 D_{k+1}，$\varphi_{n_{k+1}}$满足条件(ⅱ)′.

现按下式定义 G 上的可测函数 $\psi(x)$：

$$\psi(x)=\begin{cases}\varphi_{n_k}(x), 当\ x\in D_k\ 时 \quad (k=1,2,\cdots); \\ 0, \qquad 当\ x\in G\setminus(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}D_k)时.\end{cases}$$

由(1·7)式知 $\psi(x)\in L_{p_1}(G)$，从而根据假定有 $\mathbf{f}\psi(x)\in L_{p_2}(G)$. 但由条件(ⅱ)′知

$$\int_G |\mathbf{f}\psi(x)|^{p_2}\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{D_k}|\mathbf{f}\varphi_{n_k}(x)|^{p_2}\mathrm{d}x=+\infty,$$

此与 $\mathbf{f}\psi(x)\in L_{p_2}(G)$矛盾．证完．

定理 1.2 若算子 $\mathbf{f}$ 映 $L_{p_1}(G)(p_1\geqslant1)$入 $L_{p_2}(G)(p_2\geqslant1)$，则 $\mathbf{f}$ 必有界．

证 先设 $f(x,0)\equiv0$. 根据定理 1.1 知 $\mathbf{f}$ 在点 θ 连续，从而存在 $r>0$，使 $\varphi\in L_{p_1}(G)$，$\|\varphi\|_{L_{p_1}}\leqslant r$ 时，恒有

$$\|\mathbf{f}\varphi\|_{L_{p_2}}=\left(\int_G|\mathbf{f}\varphi(x)|^{p_2}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p_2}}\leqslant1. \qquad (1\cdot11)$$

现对任意 $\varphi\in L_{p_1}(G)$，显然存在非负整数 n，使

$$nr^{p_1}\leqslant\int_G|\varphi(x)|^{p_1}\mathrm{d}x<(n+1)r^{p_1}. \qquad (1\cdot12)$$

根据积分的绝对连续性，可将 G 分为 $n+1$ 个互不相交的可测集 $G_1, G_2, \cdots, G_{n+1}$，使

$$\int_{G_i}|\varphi(x)|^{p_1}\mathrm{d}x\leqslant r^{p_1} \quad (i=1,2,\cdots,n+1). \qquad (1\cdot13)$$

令

$$\varphi_i(x)=\begin{cases}\varphi(x), & \text{当 } x\in G_i \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } x\in G\setminus G_i \text{ 时},\end{cases}\qquad (i=1,2,\cdots).$$

由(1·13)式知

$$\int_G |\varphi_i(x)|^{p_1}\mathrm{d}x=\int_{G_i}|\varphi(x)|^{p_1}\mathrm{d}x\leqslant r^{p_1},$$

故由(1·11)式并注意到 $f(x,0)\equiv 0$,知

$$\int_{G_i}|\mathbf{f}\varphi(x)|^{p_2}\mathrm{d}x=\int_G|\mathbf{f}\varphi_i(x)|^{p_2}\mathrm{d}x\leqslant 1$$

$$(i=1,2,\cdots,n+1).$$

由此可知

$$\int_G|\mathbf{f}\varphi(x)|^{p_2}\mathrm{d}x=\sum_{i=1}^{n+1}\int_{G_i}|\mathbf{f}\varphi_1(x)|^{p_2}\mathrm{d}x\leqslant n+1. \tag{1·14}$$

由(1·14)式与(1·15)式得

$$\|\mathbf{f}\varphi\|_{L_{p_2}}\leqslant(n+1)^{\frac{1}{p_2}}\leqslant\left[\left(\frac{\|\varphi\|_{L_{p_1}}}{r}\right)^{p_1}+1\right]^{\frac{1}{p_2}}.$$

$\mathbf{f}$ 将 $L_{p_1}(G)$中任何有界集变成 $L_{p_2}(G)$中的有界集.

现在考虑一般情况,即设 $f(x,0)\not\equiv 0$. 任取 $\varphi_0\in L_{p_1}(G)$,令

$$f_1(x,u)=f(x,\varphi_0(x)+u)-f(x,\varphi_0(x))$$

$$(x\in G,\ -\infty<u<+\infty).$$

则 $f_1(x,0)\equiv 0$. 设 S 为 $L_{p_1}(G)$中任一有界集,即 $\exists M>0$,使 $\|\varphi_1\|_{L_{p_1}}\leqslant M$, $\forall\varphi\in S$,令 $S_1=\{\varphi_1\mid\varphi_1=\varphi-\varphi_0,\varphi\in S\}$,则

$$\|\varphi_1\|_{L_{p_1}}\leqslant M+\|\varphi_0\|_{L_{p_1}}=\text{const}.\ \forall\varphi_1\in S_1.$$

即 S_1 是 $L_{p_1}(G)$中的有界集．将前段已证的结果用于算子 $\mathbf{f}_1$：$\mathbf{f}_1\varphi_1(x)=f_1(x,\varphi_1(x))$，知 $\exists M_1>0$ 使 $\|\mathbf{f}_1\varphi_1\|_{L_{p_2}}\leqslant M_1$，$\forall\varphi_1\in S_1$．设 $\varphi\in S$，令 $\varphi_1=\varphi-\varphi_0$，则 $\varphi_1\in S_1$，故 $\|\mathbf{f}_1\varphi_1\|_{L_{p_2}}\leqslant M_1$．但是显然 $\mathbf{f}_1\varphi_1=\mathbf{f}\varphi-\mathbf{f}\varphi_0$，故

$$\begin{aligned}\|\mathbf{f}\varphi\|_{L_{p_2}}&\leqslant\|\mathbf{f}_1\varphi_1\|_{L_{p_2}}+\|\mathbf{f}\varphi_0\|_{L_{p_2}}\\&\leqslant M_1+\|\mathbf{f}\varphi_0\|_{L_{p_2}}=\text{const}.\end{aligned}$$

因此 $\mathbf{f}(S)$是 $L_{p_2}(G)$中的有界集．于是 $\mathbf{f}$ 的有界性获证．证完．

定理 1.3　算子 $\mathbf{f}$ 映 $L_{p_1}(G)(p_1\geqslant1)$入 $L_{p_2}(G)(p_2\geqslant1)$的充分必要条件是：$\exists b>0$ 及 $a(x)\geqslant0$，$a(x)\in L_{p_2}(G)$，使下面的不等式成立：

$$|f(x,u)|\leqslant a(x)+b|u|^{\frac{p_1}{p_2}}$$
$$(x\in G,\ -\infty<u<+\infty)\qquad(1\cdot15)$$

证　先证充分性．设(1·15)式成立．对任何 $\varphi\in L_{p_1}(G)$有

$$\begin{aligned}|f(x,\varphi(x))|^{p_2}&\leqslant[a(x)+b|\varphi(x)|^{\frac{p_1}{p_2}}]^{p_2}\\&\leqslant2^{p_2}\{[a(x)]^{p_2}+b^{p_2}|\varphi(x)|^{p_1}\},\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}&\int_G|f(x,\varphi(x))|^{p_2}\mathrm{d}x\\&\leqslant2^{p_2}\left\{\int_G[a(x)]^{p_2}\mathrm{d}x+b^{p_2}\int_G|\varphi(x)|^{p_1}\mathrm{d}x\right\}\\&<+\infty,\end{aligned}$$

从而 $\mathbf{f}\varphi\in L_{p_2}(G)$．

下证必要性．先设 $f(x,0)\equiv 0$. 由定理 1·2 知，存在 $b>0$，使

$$\int_G |\varphi(x)|^{p_1}\mathrm{d}x\leqslant 1\Rightarrow$$

$$\int_G |f(x,\varphi(x))|^{p_2}\mathrm{d}x\leqslant b^{p_2}. \tag{1·16}$$

定义 $G\times(-\infty,+\infty)$上的函数 $g(x,u)$：

$$g(x,u)=\begin{cases}|f(x,u)|-b|u|^{\frac{p_1}{p_2}}, & 若 |f(x,u)|\geqslant b|u|^{\frac{p_1}{p_2}};\\ 0, & 若 |f(x,u)|<b|u|^{\frac{p_1}{p_2}}.\end{cases}$$

设 $\varphi(x)\in L_{p_1}(G)$，令 $F=\{x|x\in G, g(x,\varphi(x))>0\}$，并令 $\int_F|\varphi(x)|^{p_1}\mathrm{d}x=n+\alpha$，其中 n 是某非负整数，$0\leqslant\alpha<1$. 由积分的绝对连续性，可将 F 分解成 $n+1$ 个互不相交的可测集 $G_1, G_2, \cdots, G_{n+1}$，使

$$\int_{G_i}|\varphi(x)|^{p_1}\mathrm{d}x\leqslant 1 \quad (i=1,2,\cdots,n+1)$$

于是由(1·16)式可知

$$\int_F|f(x,\varphi(x))|^{p_2}\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n+1}\int_{G_i}|f(x,\varphi(x))|^{p_2}\mathrm{d}x$$

$$\leqslant(n+1)b^{p_2},$$

从而

$$\int_G[g(x,\varphi(x))]^{p_2}\mathrm{d}x=\int_F[g(x,\varphi(x))]^{p_2}\mathrm{d}x$$

$$=\int_F[|f(x,\varphi(x))|-b|\varphi(x)|^{\frac{p_1}{p_2}}]^{p_2}\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\int_F|f(x,\varphi(x))|^{p_2}\mathrm{d}x-b^{p_2}\int_F|\varphi(x)|^{p_1}\mathrm{d}x$$

$$\leqslant (n+1)b^{p_2}-(n+\alpha)b^{p_2}\leqslant b^{p_2}. \tag{1·17}$$

注意,这里用到了很容易证明的不等式:

$$(u-v)^r\leqslant u^r-v^r,\quad \forall\, u\geqslant v\geqslant 0,\quad r\geqslant 1.$$

由于 $f(x,u)$满足 Caratheodory 条件,故 $g(x,u)$也满足 Caratheodory 条件,从而存在 $D\subset G$, $\mathrm{mes}(G\setminus D)=0$,使对每个 $x\in D$, $f(x,u)$是 u 的连续函数. 将 D 表为 $D=\bigcup_{k=1}^{\infty}D_k$,其中 $\mathrm{mes}D_k<+\infty(k=1,2,\cdots)$,且 $D_1\subset D_2\subset D_3\subset\cdots$.

令

$$\varphi_k(x)=\begin{cases}\min\{u^*\mid -k\leqslant u^*\leqslant k \text{ 且 } g(x,u^*)=\max\limits_{-k\leqslant n\leqslant k}g(x,u)\}, & \\ & \text{当 } x\in D_k \text{ 时};\\ 0, & \text{当 } x\in G\setminus D_k \text{ 时}.\end{cases}$$

于是

$$g(x,\varphi_k(x))=\max_{-k\leqslant u\leqslant k}g(x,u),\ \forall\, x\in D_k \tag{1·18}$$

下证 $\varphi_k(x)$是 G 上的可测函数. 显然只需证 $\varphi_k(x)$是 D_k 上的可测函数即可. 由引理 1·1, ∃有界闭集 $F_{k,n}\subset D_k$, $\mathrm{mes}F_{k,n}>\mathrm{mes}D_k-\frac{1}{n}(n=1,2,\cdots)$,使 $g(x,u)$在 $F_{k,n}\times(-\infty,+\infty)$上连续. 显然可设 $F_{k,n}\subset F_{k,n+1}(n=1,2,\cdots)$. 令 $G_k=\bigcup_{n=1}^{\infty}F_{k,n}$,则 $\mathrm{mes}(D_k\setminus G_k)=0$. 对任何实数 a,考察集合 $H_{k,n}=\{x\mid x\in F_{k,n},\varphi_k(x)>a\}$. 设 $x_0\in H_{k,n}$,令 $\eta=\varphi_k(x_0)-a>0$,取 $\delta>0$,使 $\delta<\eta$ 且 $-k<\varphi_k(x_0)-\delta$. 由 $\varphi_k(x_0)$的定义知, $g(x_0,u)<g(x_0,\varphi_k(x_0))$, $\forall -k\leqslant u<\varphi_k(x_0)$,故

$$2\sigma=g(x_0,\varphi_k(x_0))-\max_{-k\leqslant u\leqslant\varphi_k(x_0)-\delta}g(x_0,u)>0.$$

由 $g(x,u)$在 $F_{k,n}\times[-k,k]$上的一致连续性知, ∃$\rho_{x_0}>0$ 使

当 $|x-x_0|<\rho_{x_0}$, $x\in F_{k,n}$时，恒有

$$|g(x,u)-g(x_0,u)|<\sigma \quad \forall -k\leqslant u\leqslant k.$$

由此可知

$$g(x,\varphi_k(x_0))>g(x,u), \quad \forall -k\leqslant u\leqslant\varphi_k(x_0)-\delta,$$

故 $\varphi_k(x)>\varphi_k(x_0)-\delta>\varphi_k(x_0)-\eta=a$, $\forall\ |x-x_0|<\rho_{x_0}$, $x\in F_{k,n}$. 令 $S(x_0,\rho_{x_0})$表 R^N 中开球$\{x\,|\,x\in R^N, |x-x_0|<\rho_{x_0}\}$，上面已经证明了 $S(x_0,\rho_{x_0})\cap F_{k,n}\subset H_{k,n}$. 由此可知

$$H_{k,n}=\Big(\bigcup_{x\in H_{k,n}}S(x,\rho_x)\Big)\cap F_{k,n},$$

由于 $\bigcup_{x\in H_{k,n}}S(x,\rho_x)$是开集，$F_{k,n}$是闭集，故 $H_{k,n}$是可测集．因此，集$\{x\,|\,x\in G_k, \varphi_k(x)>a\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}H_{k,n}$也是可测集，由此可知 $\varphi_k(x)$是 G_k 上的可测函数，当然也是 D_k 上的可测函数．

显然

$$\int_G|\varphi_k(x)|^{p_1}\mathrm{d}x=\int_{D_k}|\varphi_k(x)|^{p_1}\mathrm{d}x\leqslant k^{p_1}\mathrm{mes}D_k<+\infty,$$

故 $\varphi_k\in L_{p_1}(G)$. 由(1·17)式知

$$\int_G[g(x,\varphi_k(x))]^{p_2}\mathrm{d}x\leqslant b^{p_2}$$

$$(k=1,2,\cdots). \qquad (1·19)$$

$$a(x)=\sup_{-\infty<u<\infty}g(x,u) \quad (x\in G).$$

显然，当 $x\in D$ 时有(注意到(1·18)式)

$$a(x)=\lim_{k\to\infty}g(x,\varphi_k(x)), \qquad (1·20)$$

故 $a(x)$是 G 上的非负可测函数．由(1·19)式与(1·20)式，利用 Fatou 引理，得

$$\int_G[a(x)]^{p_2}\mathrm{d}x\leqslant\varliminf_{k\to\infty}\int_G[g(x,\varphi_k(x))]^{p_2}\mathrm{d}x\leqslant b^{p_2},$$

故 $u(x)\in L_{p_2}(G)$. 由于

$$a(x)=\sup_{-\infty<u<+\infty} g(x,u)$$

$$\geqslant \sup_{-\infty<u<+\infty}\{|f(x,u)|-b|u|^{\frac{p_1}{p_2}}\},$$

故

$$|f(x,u)|\leqslant a(x)+b|u|^{\frac{p_1}{p_2}}$$

$$(x\in G,-\infty<u<+\infty).$$

于是在 $f(x,0)\equiv 0$ 的假定下,必要性获证. 对一般情形,令 $f_1(x,u)=f(x,u)-f(x,0)$,则 $f_1(x,0)\equiv 0$. 将已证的结论用于 $\mathbf{f}_1$,可知 $\exists\, a_1(x)\geqslant 0$, $a_1(x)\in L_{p_1}(G)$及 $b>0$,使

$$|f_1(x,u)|\leqslant a_1(x)+b|u|^{\frac{p_1}{p_2}},$$

$$\forall x\in G,\quad -\infty<u<+\infty,$$

于是

$$|f(x,u)|\leqslant a(x)+b|u|^{\frac{p_1}{p_2}},$$

$$\forall x\in G,\quad -\infty<u<+\infty,$$

其中 $a(x)=a_1(x)+|f(x,0)|\geqslant 0$, $a(x)\in L_{p_2}(G)$,(由假定知 $f(x,0)\in L_{p_2}(G)$). 证完.

注 3 很容易证明:若 G 是 R^N 中的有界闭集,$f(x,u)$在 $G\times(-\infty,+\infty)$上连续,则算子 $\mathbf{f}$ 是映 G 上的连续函数空间 $C(G)$入同一空间 $C(G)$的连续有界算子.

注 4 以上诸定理,请参见参考文献〔6〕、〔7〕. 关于 **Немыцкий** 算子 $\mathbf{f}$ 的其他研究,请参见〔17〕、〔18〕、〔19〕.

§2 全连续性

设 E_1 和 E_2 是两个 Banach 空间，$D\subset E_1$. 设算子 $A:D\to E_2$.

定义 2.1 若 A 将 D 中任何有界集 S 映成 E_2 中的列紧集 $A(S)$（即 $A(S)$ 是相对紧集，亦即它的闭包 $\overline{A(S)}$ 是 E_2 中的紧集），则称 A 是映 D 入 E_2 的**紧算子**.

注 1 显然，A 在 D 上紧的充要条件是：对于 D 中任何有界序列 $\{x_n\}$，必有子序列 $\{x_{n_k}\}$ 存在，使序列 $\{Ax_{n_k}\}$ 在 E_2 中收敛.

另外，显然紧算子必有界.

定义 2.2 若算子 $A:D\to E_2$ 是连续的，而且又是紧的，则称 A 是映 D 入 E_2 的**全连续算子**.

定理 2.1 设 $A_n:D\to E_2$ 全连续 $(n=1,2,\cdots)$，$A:D\to E_2$. 如果对于 D 中任何有界集 S，当 $n\to\infty$ 时，$\|A_nx-Ax\|$ 都一致趋于零（关于 $x\in S$），那么 $A:D\to E_2$ 全连续.

证 先证 A 连续. 设 $x_n\to x_0$，则 $S=\{x_0,x_1,x_2,\cdots\}$ 是 D 中有界集. 于是 $\forall\,\varepsilon>0$，可取 k，使

$$\|A_kx_n-Ax_n\|<\frac{\varepsilon}{3}\quad(n=0,1,2,\cdots).\tag{2·1}$$

由 A_k 的连续性知 $\exists\,N$，当 $n>N$ 时，恒有

$$\|A_kx_n-A_kx_0\|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

注意到(2·1)式，可知当 $n>N$ 时，恒有

$$\|Ax_n-Ax_0\|\leqslant\|Ax_n-A_kx_n\|$$

$$+\|A_k x_n - A_k x_0\| + \|A_k x_0 - Ax_0\|$$
$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

故 $Ax_n \to Ax_0$. A 的连续性获证.

再证 A 是紧算子. 设 S 是 D 中任一有界集. $\forall \varepsilon > 0$, 由假定可取定一个 n, 使 $\|A_n x - Ax\| < \varepsilon$, $\forall x \in S$. 故 $A_n(S)$ 是 $A(S)$ 的一个 ε-网. 但因 A_n 全连续, 故 $A_n(S)$ 是列紧集, 因此 $A(S)$ 也是列紧集. 证完.

作为例子, 考察 **Урысон 算子**:

$$K\varphi(x) = \int_G k(x, y, \varphi(y))\mathrm{d}y, \tag{2·2}$$

其中函数 $k(x, y, u)$ 在 $(x, y) \in G \times G = \hat{G}$, $-\infty < u < +\infty$ 上定义, G 表 R^n 中某有界闭集.

定理 2.2 若 $k(x, y, u)$ 在 $(x, y) \in G \times G$, $-\infty < u < +\infty$ 上连续, 则 Урысон 算子 $K: C(G) \to C(G)$ 全连续.

证 设 S 是 $C(G)$ 中有界集: $\|\varphi\|_C \leqslant a$, $\forall \varphi \in S$. 于是

$$|K\varphi(x)| = \left|\int_G k(x, y, \varphi(y))\mathrm{d}y\right| \leqslant M \operatorname{mes} G,$$
$$\forall \varphi \in S,$$

其中 $M = \max\limits_{(x, y) \in G,\ |u| \leqslant a} |k(x, y, u)|$; 故 $K(S)$ 中诸函数一致有界. $\forall \varepsilon > 0$, 由于 $k(x, y, u)$ 在 $(x, y) \in \hat{G}$, $|u| \leqslant a$ 上一致连续, 故 $\exists \delta > 0$, 使当 $|x_1 - x_2| < \delta (x_1, x_2 \in G)$ 时, 恒有

$$|k(x_1, y, u) - k(x_2, y, u)| < \frac{\varepsilon}{\operatorname{mes} G},$$
$$\forall y \in G, \quad |u| \leqslant a;$$

于是 $\forall \varphi \in S$, 当 $|x_1 - x_2| < \delta$ 时, 恒有

$$|K\varphi(x_1) - K\varphi(x_2)|$$

$$= \left|\int_G [k(x_1, y, \varphi(y)) - k(x_2, y, \varphi(y))]\mathrm{d}y\right|$$

$$< \left(\frac{\varepsilon}{\mathrm{mes}G}\right)\cdot \mathrm{mes}G = \varepsilon,$$

故 $K(S)$中诸函数等度连续．由此可知 K 是映$C(G)$入 $C(G)$的紧算子．

下证 K 的连续性．设 $\varphi_n, \varphi_0 \in C(G)$, $\|\varphi_n - \varphi_0\|_C \to 0$ ($n \to \infty$)．令 $a = \mathrm{mes}\{\|\varphi_0\|_C, \|\varphi_1\|_C, \|\varphi_2\|_C, \cdots\}$．$\forall \varepsilon > 0$, 由 $k(x, y, u)$在$(x, y) \in \hat{G}$, $|u| \leqslant a$ 的一致连续性知, $\exists \delta > 0$ 使当 $|u_1 - u_2| < \delta$($|u_1| \leqslant a$, $|u_2| \leqslant a$),时, 恒有

$$|k(x, y, u_1) - k(x, y, u_2)| < \frac{\varepsilon}{\mathrm{mes}G}, \quad \forall (x, y) \in \hat{G}.$$

取 N, 使当 $n > N$ 时, 恒有$\|\varphi_n - \varphi_0\|_C < \delta$. 于是当 $n > N$ 时, 有

$$|K\varphi_n(x) - K\varphi_0(x)|$$

$$\leqslant \int_G |k(x, y, \varphi_n(y)) - k(x, y, \varphi_0(y))|\mathrm{d}y$$

$$< \left(\frac{\varepsilon}{\mathrm{mes}G}\right)\cdot \mathrm{mes}G = \varepsilon$$

从而$\|K\varphi_n - K\varphi_0\|_C < \varepsilon$. 故$\|K\varphi_n - K\varphi_0\|_C \to 0$. 证完．

下面讨论 K 作用于$L_p(G)$的全连续性．

引理 2.1 设函数 $k(x, y, u)$满足 Caratheodory 条件(即对几乎所有的$(x, y) \in \hat{G}$, $k(x, y, u)$关于 u 连续, 并且对每一 u 值, $k(x, y, u)$在 $\hat{G}$ 上可测), 并满足不等式:

$$|k(x, y, u)| \leqslant R(x, y),$$
$$\forall (x, y) \in \hat{G}, \quad -\infty < u < +\infty, \tag{2·3}$$

其中$\int_G\int_G [R(x, y)]^p \mathrm{d}x\mathrm{d}y < +\infty$, $p > 1$; 又设$\exists a > 0$, 使

$$k(x, y, u) \equiv 0, \quad \forall (x, y) \in \hat{G}, \quad |u| \geqslant a. \tag{2·4}$$

那么 Урысон 算子 K(见(2·2)式)映 $L_p(G)$入 $L_p(G)$全连续．

证 由 Hölder 不等式知(注意(2·3)式)，当 $\varphi\in L_p(G)$时有

$$|K\varphi(x)|\leqslant\int_G R(x,y)\mathrm{d}y$$
$$\leqslant(\mathrm{mes}G)^{\frac{1}{q}}\left(\int_G[R(x,y)]^p\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p}}$$

其中$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$；故

$$\int_G|K\varphi(x)|^p\mathrm{d}x\leqslant(\mathrm{mes}G)^{\frac{p}{q}}\int_G\int_G[R(x,y)]^p\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$<+\infty.$$

因此 $K:L_p(G)\to L_p(G)$．考察 Немыцкий 算子：

$$\mathbf{f}\psi(x,y)=k(x,y,\psi(x,y)).\tag{2·5}$$

由不等式(2·3)，利用定理 1.3 和定理 1.1 可知 $\mathbf{f}$ 映 $L_p(\hat{G})$入 $L_p(\hat{G})$连续．设 $\varphi_n,\varphi_0\in L_p(G)$，$\|\varphi_n-\varphi_0\|_{L_p}\to0(n\to\infty)$，并令 $\psi_n(x,y)=\varphi_n(y)$，$\psi_0(x,y)=\varphi_0(y)$，则显然$\|\psi_n-\psi_0\|_{L_p(\hat{G})}\to0$．故$\|\mathbf{f}\psi_n-\mathbf{f}\psi_0\|_{L_p(\hat{G})}\to0$．利用 Hölder 不等式，有

$$\|K\varphi_n-K\varphi_0\|_{L_p}^p$$
$$=\int_G\mathrm{d}x\left|\int_G[k(x,y.\varphi_n(y))-k(x,y,\varphi_0(y))\mathrm{d}y]\right|^p$$
$$\leqslant(\mathrm{mes}G)^{\frac{p}{q}}\int_G\int_G|k(x,y,\varphi_n(y))$$
$$-k(x,y,\varphi_0(y))|^p\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=(\mathrm{mes}G)^{\frac{p}{q}}\|\mathbf{f}\psi_n-\mathbf{f}\psi_0\|_{L_p(\hat{G})}^p,$$

故$\|K\varphi_n-K\varphi_0\|_{L_p}\to0$．因此 K 是连续的．

下证 K 是紧算子．$\forall\varepsilon>0$，由积分的绝对连续性知，$\exists\delta>$

0 使对任何 $H\subset\hat{G}$, mes$H<\delta$, 都有

$$\left(\iint_H [R(x,y)]^p \mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p}} \ll \frac{\varepsilon}{2(\mathrm{mes}G)^{\frac{1}{q}}},$$

从而, 注意到(2·3)式

$$\left(\iint_H |k(x,y,\varphi(y))|^p \mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{2(\mathrm{mes}G)^{\frac{1}{q}}},$$

$$\forall\ \varphi\in L_p(G). \tag{2·6}$$

由引理 1.1 知存在闭集 $F\subset\hat{G}$, mes$(\hat{G}\setminus F)<\delta$ 使 $k(x,y,u)$ 在 $(x,y)\in F$, $-\infty<u<+\infty$ 上连续, 令

$$M=\max_{(x,y)\in F,\ |x|\leqslant a}|k(x,y,u)|, \tag{2·7}$$

取有界开集 G_0, 使 $G_0\supset F$, 且

$$\mathrm{mes}(G_0\setminus F)<\left[\frac{\varepsilon}{2m(\mathrm{mes}G)^{\frac{1}{q}}}\right]^p. \tag{2·8}$$

由拓扑学中的 Tietze 扩张定理(见[26]), 可作 $\hat{G}\times(-\infty,+\infty)$ 上的连续函数 $k_0(x,y,u)$, 使它在 $F\times[-a,a]$ 上等于 $k(x,y,u)$, 在 $[\hat{G}\setminus(G_0\cap\hat{G})]\times[-a,a]$ 上等于 0, 在 $\hat{G}\times((-\infty,-a]\cup[a,+\infty))$ 上等于 0, 并且保持 $k(x,y,u)$ 在 $F\times[-a,a]$ 上的最大值, 即

$$\max_{(x,y)\in\hat{G},\ -\infty\leqslant u\leqslant+\infty}|k_0(x,y,u)|=M. \tag{2·9}$$

考察 Урысон 算子 K_0:

$$K_0\varphi(x)=\int_G k_0(x,y,\varphi(y))\mathrm{d}y. \tag{2·10}$$

由于 $k_0(x,y,u)$ 当 $|u|\geqslant a$ 时为 0, 故 $k_0(x,y,u)$ 在整个 $\hat{G}\times(-\infty,+\infty)$ 上一致连续, 由此并注意到(2·9)式可知 $K_0(L_p(G))$ 中诸函数在 G 上一致有界且等度连续, 故 $K_0(L_p(G))$ 是

$C(G)$中列紧集，当然更是 $L_p(G)$中的列紧集．

利用 Hölder 不等式，并注意到(2·6)、(2·8)、(2·9)诸式，知当 $\varphi \in L_p(G)$时，有

$$
\begin{aligned}
& \|K\varphi - K_0\varphi\|_{L_p} \\
\leqslant & (\mathrm{mes}G)^{\frac{1}{q}}\left(\int_G\int_G |k(x, y, \varphi(y)) \right. \\
& \left. - k_0(x, y, \varphi(y))|^p \mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p}} \\
= & (\mathrm{mes}G)^{\frac{1}{q}}\left(\iint\limits_{G \setminus F} |k(x, y, \varphi(y)) \right. \\
& \left. - k_0(x, y, \varphi(y))|^p \mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p}} \\
\leqslant & (\mathrm{mes}G)^{\frac{1}{q}}\left[\left(\iint\limits_{G \setminus F} |k(x, y, \varphi(y))|^p \mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p}} \right. \\
& \left. + \left(\iint\limits_{G \setminus F} |k_0(x, y, \varphi(y))|^p \mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p}}\right] \\
= & (\mathrm{mes}G)^{\frac{1}{q}}\left[\left(\iint\limits_{G \setminus F} |k(x, y, \varphi(y))|^p \mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p}} \right. \\
& \left. + \left(\iint\limits_{(G_0 \cap \hat{G}) \setminus F} |k_0(x, y, \varphi(y))|^p \mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p}}\right] \\
< & (\mathrm{mes}G)^{\frac{1}{q}}\left[\frac{\varepsilon}{2(\mathrm{mes}G)^{\frac{1}{q}}} \right. \\
& \left. + M\{\mathrm{mes}[(G_0 \cap \hat{G}) \setminus F]\}^{\frac{1}{p}}\right] \\
< & (\mathrm{mes}G)^{\frac{1}{q}}\left[\frac{\varepsilon}{2(\mathrm{mes}G)^{\frac{1}{q}}} + M \cdot \frac{\varepsilon}{2M(\mathrm{mes}G)^{\frac{1}{q}}}\right] \\
= & \varepsilon,
\end{aligned}
$$

故 $K_0(L_p(G))$是 $K(L_p(G))$的 ε-网，从而 $K(L_p(G))$是

$L_p(G)$中的列紧集．由此可知 K 是映$L_p(G)$入$L_p(G)$的紧算子．证完．

定理 2.3 设函数 $k(x, y, u)$满足 Caratheodory 条件，并且满足不等式

$$|k(x,y,u)| \leqslant R(x,y)(a+b|u|^{p-1}),$$
$$\forall (x,y) \in \hat{G}, \quad -\infty < u < +\infty, \tag{2·11}$$

其中 $p>1, a>0, b>0, \int_G\int_G [R(x,y)]^p dxdy < +\infty$．那么，Урысон 算子 K 映$L_p(G)$入 $L_p(G)$全连续．

证 当 $\varphi \in L_p(G)$时，由 Hölder 不等式易知

$$\begin{aligned}
&\left(\int_G |K\varphi(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leqslant \left(\int_G\int_G [R(x,y)]^p dxdy\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\quad \cdot \left(\int_G [a + b|\varphi(y)|^{p-1}]^q dy\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leqslant \left(\int_G\int_G [R(x,y)]^p dxdy\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\quad \cdot \left(\int_G 2^q[a^q + b^q|\varphi(y)|^p]dy\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= 2\left(\int_G\int_G [R(x,y)]^p dxdy\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\quad \cdot \left(a^q \text{mes} G + b^q\int_G |\varphi(y)|^p dy\right)^{\frac{1}{q}} < +\infty,
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

故 $K: L_p(G) \to L_p(G)$．按下式定义函数 $k_n(x, y, u)((x, y) \in \hat{G}, -\infty < u < +\infty)$，$(n = 1, 2, \cdots)$：

$$k_n(x,y,u)=\begin{cases} k(x,y,u), & |u|\leqslant n \text{ 时}; \\ k(x,y,-n)(n+1+u), & -n>u>-n-1 \text{ 时}; \\ k(x,y,n)(n+1-u), & n<u<n+1 \text{ 时}; \\ 0, & |u|\geqslant n+1 \text{ 时}. \end{cases}$$

显然，每个 $k_n(x,y,u)$ 都满足引理 2.1 的条件，故由引理 2.1 知 Урысон 算子

$$K_n\varphi(x)=\int_G k_n(x,y,\varphi(y))\mathrm{d}y \quad (n=1,2,\cdots) \tag{2·12}$$

是映 $L_p(G)$ 入 $L_p(G)$ 的全连续算子．

设 S 是 $L_p(G)$ 中任一有界集，于是 $\exists\beta>0$，使 $\|\varphi\|_{L_p}\leqslant\beta$，$\forall\varphi\in S$. 由此知当 $\varphi\in S$ 时，有

$$\begin{aligned}&\int_G (a+b|\varphi(y)|^{p-1})^q\mathrm{d}y\\ &\leqslant\int_G 2^q(a^q+b^q|\varphi(y)|^p)\mathrm{d}y\\ &\leqslant 2^q(a^q\mathrm{mes}G+b^q\beta^p)\\ &=M_0^q=\mathrm{const}.\end{aligned} \tag{2·13}$$

$\forall\varepsilon>0$，由积分的绝对连续性可知，$\exists\delta>0$，使当 $F\subset G$，$\mathrm{mes}F<\delta$ 时，恒有

$$\int_G\int_F [R(x,y)]^p\mathrm{d}x\mathrm{d}y<\left(\frac{\varepsilon}{3M_0}\right)^p(\mathrm{mes}G)^{-1}. \tag{2·14}$$

取 $N>\left(\dfrac{\beta^p}{\delta}\right)^{\frac{1}{p}}$，下面证明当 $n>N$ 时，对一切 $\varphi\in S$ 恒有 $\|K\varphi-K_n\varphi\|_{L_p}<\varepsilon$.

对于任何 $\varphi\in S$，令 $G_n=\{x\mid x\in G, |\varphi(x)|\geqslant n\}$，则

$$\mathrm{mes}G_n\leqslant\frac{1}{n^p}\int_{G_n}|\varphi(x)|^p\mathrm{d}x$$

$$\leqslant \frac{1}{n^p}\int_G |\varphi(x)|^p \mathrm{d}x \leqslant \frac{\beta^p}{n^p}, \tag{2·15}$$

并且

$$\left|\int_G [k(x,y,\varphi(y)) - k_n(x,y,\varphi(y))]\mathrm{d}y\right|$$

$$= \left|\int_{G_n} [k(x,y,\varphi(y)) - k_n(x,y,\varphi(y))]\mathrm{d}y\right|$$

$$\leqslant \int_{G_n} |k(x,y,\varphi(y))|\mathrm{d}y + \int_{G_n} |k_n(x,y,\varphi(y))|\mathrm{d}y$$

$$\leqslant \int_{G_n} |k(x,y,\varphi(y))|\mathrm{d}y + \int_{G_n} |k_n(x,y,n)|\mathrm{d}y$$

$$+ \int_{G_n} |k_n(x,y,-n)|\mathrm{d}y \tag{2·16}$$

于是，由(2·11)式并利用 Hölder 不等式知(注意(2·16)式)

$$\|K\varphi - K_n\varphi\|_{L_p}$$

$$= \left\{\int_G \left|\int_G [k(x,y,\varphi(y))\right.\right.$$

$$\left.\left. - k_n(x,y,\varphi(y))]\mathrm{d}y\right|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant \left(\int_G \left|\int_{G_n} R(x,y)[(a + b|\varphi(y)|^{p-1})\right.\right.$$

$$\left.\left. + (a + bn^{p-1}) + (a + bn^{p-1})]\mathrm{d}y\right|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant \left(\int_G \left|\int_{G_n} 3R(x,y)(a + b|\varphi(y)|^{p-1})\mathrm{d}y\right|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant 3(\mathrm{mes}G)^{\frac{1}{p}}\left(\int_G\int_{G_n} [R(x,y)]^p \mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\cdot \left[\int_{G_n} (a + b|\varphi(y)|^{p-1})^q \mathrm{d}y\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$\leqslant 3(\mathrm{mes}G)^{\frac{1}{p}}\left(\int_G\int_{G_n}[R(x,y)]^p\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\cdot\left[\int_G(a+b\,|\,\varphi(y)\,|^{p-1})^q\mathrm{d}y\right]^{\frac{1}{q}}. \qquad (2\cdot 17)$$

当 $n>N$ 时，由(2·15)式知 $\mathrm{mes}G_n<\delta$，从而由(2·14)、(2·13)以及(2·17)式知

$$\|K\varphi-K_n\varphi\|_{L_p}<3(\mathrm{mes}G)^{\frac{1}{p}}\cdot\frac{\varepsilon}{3M_0}(\mathrm{mes}G)^{-\frac{1}{p}}\cdot M_0=\varepsilon$$

由此可知，当 $n\to\infty$ 时，$\|K\varphi-K_n\varphi\|_{L_p}$ 一致趋于零(关于 $\varphi\in S$)．于是根据定理 2.1 知，$K:L_p(G)\to L_p(G)$ 全连续．证完．

我们还可以证明下面的定理(参看〔22〕)：

定理 2.4 设函数 $k(x,y,u)$ 满足 Caratheodory 条件并且满足不等式：

$$|k(x,y,u)|\leqslant a(x,y)+b\,|\,u\,|^{\frac{p}{p_2}}$$

$$\forall\,(x,y)\in\hat{G},\ -\infty<u<+\infty,$$

其中 $p_2>1$, $p>1$, $b>0$, $\int_G\int_G[a(x,y)]^{p_2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y<+\infty$, $a(x,y)\geqslant 0$.

那末对任何 $p_1>p$，Урысон 算子 K 映 $L_{p_1}(G)$ 入 $L_{p_2}(G)$ 全连续．

注 2 在〔6〕和〔21〕中，给出了 Урысон 算子 K 映 $C(G)$ 入 $C(G)$ 的一个充分必要条件．关于 Урысон 算子的其他研究，请参看〔20〕、〔22〕.

另外，应该指出，§1 中所讨论的 Немыцкий 算子 **f**(参看(1·1)式)一般不是全连续的，因为可以证明(见〔6〕)：算子 **f**: $L_{p_1}(G)\to L_{p_2}(G)$ 全连续($p_1,p_2\geqslant 1$)的充分必要条件是 **f** 将整

个空间 $L_{p_1}(G)$映成 $L_{p_2}(G)$中的一个点，亦即 $f(x,u)$与 u 无关：$f(x,u)=a(x)\in L_{p_2}(G)$.

再举一个非线性全连续算子的例子（参〔23〕）. 考察 Ляпунов－Lichtenstein 算子：

$$F\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1\cdots\int_0^1 k_n(x,y_1,\cdots y_n)\prod_{i=1}^{n}\varphi(y_i)\mathrm{d}y_i. \tag{2·18}$$

假定 $k_n(x,y_1\cdots y_n)$在 $0\leqslant x,y_1,\cdots,y_n\leqslant 1$ 上连续，并令

$$M_n=\max_{0\leqslant x,y_1,\cdots y_n\leqslant 1}|k_n(x,y_1,\cdots,y_n)| \quad (n=1,2,\cdots).$$

定理 2.5 若 $M_n=O(R^n)$，其中 $R>0$，则 F 是映空间 $L[0,1]$中闭球 $T\left(\theta,\dfrac{1}{R'}\right)=\left\{\varphi\,|\,\|\varphi\|_L\leqslant\dfrac{1}{R'}\right\}$入 $C[0,1]$的全连续算子，这里 R'为任何大于R 的数.

证 由假定，$\exists\,\beta>0$ 使

$$M_n\leqslant\beta R^n \quad (n=1,2,\cdots).$$

于是当 $\varphi\in T\left(\theta,\dfrac{1}{R'}\right)$时，有

$$|F\varphi(x)|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}M_n\|\varphi\|_L^n\leqslant\beta\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{R}{R'}\right)^n,$$

$$|F\varphi(x)-F\varphi(x')|\leqslant\sum_{n=1}^{s}\int_0^1\cdots\int_0^1|k_n(x,y_1,\cdots,y_n)$$

$$-k_n(x',y_1,\cdots y_n)|\prod_{i=1}^{b}|\varphi(y_i)|\mathrm{d}y_i+2\beta\sum_{n=s+1}^{\infty}\left(\frac{R}{R'}\right)^n.$$

易知诸函数$\{F\varphi\}$在$[0,1]$上一致有界且等度连续，因此 F 映 $T\left(\theta,\dfrac{1}{R'}\right)$入$C[0,1]$，而且是紧算子.

现设 $\varphi_1,\varphi_2\in T\left(\theta,\dfrac{1}{R'}\right)$，则

$$
\begin{aligned}
&|F\varphi_2(x) - F\varphi_1(x)| \\
&\leqslant \sum_{n=1}^{s} \left| \int_0^1 \cdots \int_0^1 k_n(x, y_1, \cdots, y_n) \right. \\
&\quad \cdot \sum_{j=1}^{n} \left[\prod_{i=1}^{j-1} \varphi_1(y_i) \prod_{i=j}^{n} \varphi_2(y_i) \right. \\
&\quad \left. \left. - \prod_{i=1}^{j} \varphi_1(y_i) \prod_{i=j+1}^{n} \varphi_2(y_i) \right] dy_1 \cdots dy_n \right| \\
&\quad + 2\beta \sum_{n=s+1}^{\infty} \left(\frac{R}{R'} \right)^n \\
&= \sum_{n=1}^{s} \left| \int_0^1 \cdots \int_0^1 k_n(x, y_1, \cdots y_n) \right. \\
&\quad \cdot \sum_{n=1}^{n} [\varphi_2(y_i) - \varphi_1(y_i)] \prod_{i=1}^{j-1} \varphi_1(y_i) \\
&\quad \left. \cdot \prod_{i=j+1}^{n} \varphi_2(y_i) dy_1 \cdots dy_n \right| + 2\beta \sum_{n=s+1}^{\infty} \left(\frac{R}{R'} \right)^n \\
&\leqslant \sum_{n=1}^{s} \int_0^1 \cdots \int_0^1 |k_n(x, y_1, \cdots, y_n)| \\
&\quad \cdot \sum_{j=1}^{n} |\varphi_2(y_j) - \varphi_1(y_j)| \prod_{i=1}^{j-1} |\varphi_1(y_i)| \\
&\quad \cdot \prod_{i=j+1}^{n} |\varphi_2(y_i)| dy_1 \cdots dy_n + 2\beta \sum_{n=s+1}^{\infty} \left(\frac{R}{R'} \right)^n \\
&\leqslant \beta \left(\sum_{n=1}^{s} \frac{nR^n}{R'^{n-1}} \right) \| \varphi_2 - \varphi_1 \|_L \\
&\quad + 2\beta \sum_{n=s+1}^{\infty} \left(\frac{R}{R'} \right)^n. \qquad (2 \cdot 19)
\end{aligned}
$$

$\forall\, \varepsilon > 0$，取定一个正整数 s，使 $2\beta \sum\limits_{n=s+1}^{\infty} \left(\frac{R}{R'} \right)^n < \frac{\varepsilon}{2}$. 再令 $\delta = 2\beta \left(\sum\limits_{n=1}^{s} \frac{nR^n}{R'^{n-1}} \right)^{-1} \varepsilon$，则由(2·19)式知，当 $\| \varphi_2 - \varphi_1 \|_L < \delta$ 时，恒

有$\|F\varphi_2-F\varphi_1\|_C<\varepsilon$，故 F 连续（实际上是一致连续）．证完．

下面介绍两个常用的有关全连续算子的一般性质．

定理 2.6 设 $A:D\to E_2$，且 D 是 E_1 中的有界集．则下列三个结论是等价的：

（i）$A:D\to E_2$ 全连续；

（ii）$\forall\,\varepsilon>0$，$\exists\,A_\varepsilon:D\to E_\varepsilon$ 连续有界，使对一切 $x\in D$ 均有 $\|Ax-A_\varepsilon x\|<\varepsilon$，这里 E_ε 是 E 的某个有限维子空间；

（iii）A 可表为 $Ax=A_0x+\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_nx$，$\forall\,x\in D$；其中 $A_n:D\to E_n^{(0)}$ 连续有界，$E_n^{(0)}$ 表 E 的某有限维子空间（$n=0,1,2,\cdots$），且 $\|A_nx\|\leqslant\frac{1}{2^n}$（$n=1,2,\cdots$），$\forall\,x\in D$.

证 （i）⇒（ii）：由假定，$A(D)$ 是 E_2 中列紧集，故对于给定的 $\varepsilon>0$，$\exists\,y,\cdots,y_m\in A(D)$，构成 $A(D)$ 的有限 ε-网．用 E_ε 表由 $y_1,\cdots,y_m$ 张成的有限维子空间．$\forall\,y\in E_2$，令

$$d_i(y)=\max\{\varepsilon-\|y-y_i\|,0\}\quad(i=1,2,\cdots,m).$$

显然 $d_i(y)$ 非负连续，且只在球 $\|y-y_i\|<\varepsilon$ 内为正．令 $d(y)=\sum\limits_{i=1}^{m}d_i(y)$，$\forall\,y\in E_2$. 当 $x\in D$ 时必有某 y_i 使 $\|Ax-y_i\|<\varepsilon$，故 $d_i(Ax)>0$，从而 $d(Ax)>0$. 令

$$A_\varepsilon x=\frac{1}{d(Ax)}\sum_{i=1}^{m}d_i(Ax)y_i,\quad\forall\,x\in D.\qquad(2\cdot20)$$

显然，$A_\varepsilon:D\to E_\varepsilon$ 连续．注意到当 $\|Ax-y_i\|\geqslant\varepsilon$ 时有 $d_i(Ax)=0$，即知当 $x\in D$ 时

$$\|Ax-A_\varepsilon x\|=\left\|\frac{1}{d(Ax)}\sum_{i=1}^{m}d_i(Ax)(Ax-y_i)\right\|$$

$$\leqslant \frac{1}{d(Ax)} \sum_{i=1}^{m} d_i(Ax) \cdot \|Ax - y_i\| < \varepsilon \tag{2·21}$$

由于 $A(D)$ 列紧，故 $A(D)$ 有界，从而 $\exists M>0$ 使 $\|Ax\| \leqslant M$，$\forall x \in D$；于是由(2·21)式又知 $\|A_\varepsilon x\| \leqslant M+\varepsilon$，$\forall x \in D$；故 A_ε 有界．

(ⅱ)⇒(ⅲ)：由假定，$\exists B_n: D \to H_n$ 连续、有界（H_n 表 E_2 的某有限维子空间），使

$$\|Ax - B_n x\| < \frac{1}{2^{n+2}}, \ \forall x \in D; \quad n = 0, 1, 2, \cdots. \tag{2·22}$$

令 $A_0 = B_0, A_1 = B_1 - B_0, \cdots, A_n = B_n - B_{n-1}, \cdots$．显然，当 $n = 1, 2, \cdots$ 时，$A_n: D \to E_n^{(0)}$ 这里 $E_n^{(0)} = \{y \mid y = y_n + y_{n-1}, y_n \in H_n, y_{n-1} \in H_{n-1}\}$ 也是 E_2 的一个有限维子空间．由于 $B_n = \sum_{k=0}^{n} A_k$，故由(2·22)式知 $Ax = \sum_{k=0}^{\infty} A_k x$，$\forall x \in D$．另外，当 $x \in D$，$n = 1, 2, \cdots$ 时还有

$$\begin{aligned} \|A_n x\| &= \|B_n x - B_{n-1} x\| \\ &\leqslant \|B_n x - Ax\| + \|Ax - B_{n-1} x\| \\ &< \frac{1}{2^{n+2}} + \frac{1}{2^{n+1}} < \frac{1}{2^n}. \end{aligned}$$

$A_n (n = 0, 1, 2, \cdots)$ 的连续性和有界性是显然的．

(ⅲ)⇒(ⅰ)：$\forall \varepsilon > 0$．设(ⅲ)满足．取 n_0，使 $\frac{1}{2^{n_0}} < \varepsilon$．令 $K_{n_0} = \sum_{k=0}^{n_0} A_k$；显然 $K_{n_0}: D \to G_{n_0}$ 连续有界，这里

$$G_{n_0} = \{y \mid y = y_0 + y_1 + \cdots + y_{n_0}, y_i \in E_i^{(0)}, \\ i = 0, 1, \cdots, n_0\}$$

是 E_2 的一个有限维子空间．当 $x \in D$ 时，有

$$\| Ax - K_{n_0} x \| = \left\| \sum_{n=n_0+1}^{\infty} A_n x \right\| \leqslant \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

$$= \frac{1}{2^{n_0}} < \varepsilon .$$

故 $K_{n_0}(D)$是 $A(D)$的一个 ε-网．而 $K_{n_0}(D)$是 G_{n_0}中的有界集，从而列紧．由此可知，$A(D)$是 E_2 中列紧集，因此 A 是紧算子．至于 A 的连续性是显然的，因为由(ⅲ)知 $Ax = \sum_{n=0}^{\infty} A_n x$，每一个 A_n 连续，而此级数一致收敛(在 D 上)，故 A 在 D 上连续．证完．

注 3 结论(ⅲ)可换为结论(ⅲ)′：对任给 $\varepsilon > 0$，A 可表为 $Ax = \tilde{A}_0 x + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{A}_n x$，$\forall x \in D$；其中 $\tilde{A}_n : D \to \tilde{E}_n^{(0)}$ 连续、有界，$\tilde{E}_n^{(0)}$ 是 E 的有限维子空间($n = 0, 1, 2, \cdots$)，且 $\| \tilde{A}_n x \| \leqslant \frac{\varepsilon}{2^n}$ ($n = 1, 2, \cdots$)．

事实上，由(ⅲ)可推出(ⅲ)′：只需取 m，使 $\frac{1}{2^m} < \varepsilon$，然后令 $\tilde{A}_0 = \sum_{k=0}^{m} A_k$，$\tilde{A}_n = A_{m+n}$ ($n = 1, 2, \cdots$)即可．

注 4 结论(ⅱ)中的 A_ε 和结论(ⅲ)中的诸 A_n，其值域都含于某有限维子空间，这种算子叫做**有限维算子**；显然，连续有界的有限维算子必是全连续的．定理 2.6 的意义在于：全连续算子的特点是它能用有限维算子(连续的、有界的)来一致逼近．

下面讨论全连续算子的延拓问题．

定义 2.3 设 E 是一个拓扑空间，$X \subset E$．若存在连续算子 $P: E \to X$ 使当 $x \in X$ 时恒有 $Px = x$，则称 X 是 E 的一个**收缩核**；算子 P 称为是一个**保核收缩**．

定义 2.4 设 E 是一个拓扑空间,如果对于 E 的任何一个开覆盖 $\{U_\alpha\}$,都存在 E 的开覆盖 $\{V_\beta\}$,满足:

(ⅰ)$\{V_\beta\}$精于$\{U_\alpha\}$,即对任何 $V_\beta \in \{V_\beta\}$,必存在 $U_\alpha \in \{U_\alpha\}$,使得 $V_\beta \subset U_\alpha$;

(ⅱ)$\{V_\beta\}$是局部有限的,即对于 E 中任一点 x,必存在 x 的邻域 W_x,使得 W_x 只与$\{V_\beta\}$中的有限个 V_β 相交.则称 E 是**仿紧的**.换句话说,拓扑空间称为是仿紧的,如果对其任何一个开覆盖,都存在有精于它的局部有限的开覆盖.

引理 2.2(Stone) 距离空间必是仿紧的.

证明见[25].

引理 2.3(Dugundji) 实 Banach 空间 E 中任何非空凸闭集 X 都是 E 的收缩核;并且 $\forall \alpha>0$,存在保核收缩 P_α,使

$$\|x-P_\alpha x\| \leqslant (1+\alpha)\rho(x,X), \quad \forall x \in E \tag{2·23}$$

其中 $\rho(x,X)$表点 x 到集 X 的距离.

证 先设 X 是可分的.设序列$\{y_k\}(k=1,2,\cdots)$属于 X 且在 X 中稠密.考察按下式定义的 $E\setminus X$ 上的连续函数:

$$\lambda_k(x)=\begin{cases}0, & 若(1+\alpha)\rho(x,X)\leqslant \|y_k-x\|;\\ 1+\alpha-\dfrac{\|y_k-x\|}{\rho(x,X)}, & 若(1+\alpha)\rho(x,X)>\|y_k-x\|.\end{cases}$$

显然 $0\leqslant\lambda_k(x)<1+\alpha(k=1,2,\cdots)$,并且 $E\setminus X$ 上的函数

$$\lambda(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_k(x)}{(1+\alpha)^k}$$

是正的、连续的(因为上式右端的级数在 $E\setminus X$ 上一致收敛).显然,$E\setminus X$ 上的函数

$$\mu_k(x)=\frac{\lambda_k(x)}{(1+\alpha)^k\lambda(x)} \quad (k=1,2,\cdots)$$

是非负连续的，并且 $\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k(x)=1,\ \forall\, x\in E\setminus X$. 令

$$P_\alpha(x)=\begin{cases}x, & \text{当 } x\in X \text{ 时};\\ \sum_{k=1}^{\infty}\mu_k(x)y_k, & \text{当 } x\in E\setminus X \text{ 时}.\end{cases}$$

下证此 P_α 即合要求．首先注意，当 $x\in E\setminus X$ 时级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k(x)\cdot y_k$ 必收敛，这是因为若 $\mu_k(x)\neq 0$，则 $(1+\alpha)\rho(x,X)>\|y_k-x\|$，从而 $\|y_k\|\leqslant\|x\|+(1+\alpha)\rho(x,X)=M_x$，因此

$$\sum_{k=1}^{\infty}\|\mu_k(x)y_k\|\leqslant M_x<+\infty.$$

设 $x\in E\setminus X$，则对充分大的 n，$\sum_{k=1}^{n}\mu_k(x)>0$，从而根据 X 的凸性知

$$z_n=\frac{\sum_{k=1}^{n}\mu_k(x)y_k}{\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k(x)}\in X.$$

但 $z_n\to P_\alpha x$，故由 X 的闭性知 $P_\alpha x\in X$，由此可知，$P_\alpha: E\to X$ 且当 $x\in X$ 时，$P_\alpha x=x$. 下证(2·23)式成立．当 $x\in X$ 时显然成立．设 $x\in E\setminus X$，由

$$x-P_\alpha x=\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k(x)(x-y_k),$$

并注意到若 $\mu_k(x)\neq 0$，必有 $(1+\alpha)\rho(x,X)>\|y_k-x\|$，故

$$\begin{aligned}\|x-P_\alpha x\|&\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k(x)\|x-y_k\|\\&<\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k(x)(1+\alpha)\rho(x,X)=(1+\alpha)\rho(x,X).\end{aligned}$$

即(2·23)式成立．再证 P_α 的连续性．在开集 $E\setminus X$ 的点和 X

的内点处，P_α 的连续性是显然的（注意对每个点 $x\in E\setminus X$，都存在 x 的一个充分小的邻域，使级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k(x)y_k$ 在此邻域上一致收敛）．设 x_0 是 X 的一个边界点，且设 $x_n\in E$，$x_n\to x_0$．于是由(2·23)式知

$$\begin{aligned}&\|P_\alpha x_n-P_\alpha x_0\|=\|P_\alpha x_n-x_0\|\\ \leqslant&\|P_\alpha x_n-x_n\|+\|x_n-x_0\|\\ \leqslant&(1+\alpha)\rho(x_n,X)+\|x_n-x_0\|\\ \leqslant&(2+\alpha)\|x_n-x_0\|,\end{aligned}$$

故 $P_\alpha x_n\to P_\alpha x_0$．$P_\alpha$ 的连续性获证．于是，当 X 是可分空间时，引理 2.3 得到证明．

下面讨论一般情况．设 X 是 E 中任一非空凸闭集，$\alpha>0$ 给定．取正数 δ，使 $0<\delta<1$，且 $1+2\delta<(1+\alpha)(1-\delta)$．对 $z\in E\setminus X$，用 U_z 表开球 $\{x\mid\|x-z\|<\delta\rho(z,X)\}$．于是开球族 $\{U_z\mid z\in E\setminus X\}$ 构成 $E\setminus X$ 的一个开覆盖．根据引理 2.2 知，存在开覆盖 $\{V_\tau\mid\tau\in T\}$，并且满足两个条件：第一，$\{V_\tau\mid\tau\in T\}$ 精于 $\{U_z\mid z\in E\setminus X\}$，即对任何的 $V_\tau\in\{V_\tau\mid\tau\in T\}$，存在 $U_z\in\{U_z\mid z\in E\setminus X\}$，使 $V_\tau\subset U_z$；第二，$\{V_\tau\mid\tau\in T\}$ 是局部有限的，即对 $E\setminus X$ 中任一点 x，都存在 x 的某邻域，它只与 $\{V_\tau\mid\tau\in T\}$ 中有限个 V_τ 相交．由于 $\{V_\tau\mid\tau\in T\}$ 精于 $\{U_z\mid z\in E\setminus X\}$，故对每个 V_τ，存在 $U_{z\tau}$，使 $V_\tau\subset U_{z\tau}$．取 $y_\tau\in X$，使 $\|z_\tau-y_\tau\|\leqslant(1+\delta)\rho(z_\tau,X)$．于是对 $x\in V_\tau$ 有

$$\rho(z_\tau,X)\leqslant\|z_\tau-x\|+\rho(x,X)\leqslant\delta\rho(z_\tau,X)+\rho(x,X),$$

从而 $\rho(z_\tau,x)\leqslant\dfrac{\rho(x,X)}{(1-\delta)}$，故得

$$\|x-y_\tau\|\leqslant\|x-z_\tau\|+\|z_\tau-y_\tau\|$$

$$\leqslant \delta\rho(z_\tau, X) + (1+\delta)\rho(z_\tau, X)$$

$$\leqslant \frac{1+2\delta}{1-\delta}\rho(x, X) \leqslant (1+\alpha)\rho(x, X). \qquad (2\cdot 24)$$

现考察 $E \setminus X$ 上的连续函数 $\lambda_\tau(x) = \rho(x, E \setminus V_\tau)$, $\tau \in T$. 令 $\lambda(x) = \sum_{\tau \in T} \lambda_\tau(x)$, $\forall x \in E \setminus X$. 由于 $\{V_\tau | \tau \in T\}$ 是局部有限的,即对每个 $x \in E \setminus X$,存在 x 的某邻域,它只与有限个 V_τ 相交,故 $\sum_{\tau \in T} \lambda_\tau(x)$ 只是有限项的和(其余项均为零),从而 $\lambda(x)$ 有定义,且为 $E \setminus X$ 上的连续函数;另外对每个 $x \in E \setminus X$,存在 V_τ,使 $x \in V_\tau$,从而 $\lambda_\tau(x) > 0$,故 $\lambda(x) > 0$. 现令 $\mu_\tau(x) = \frac{\lambda_\tau(x)}{\lambda(x)}$, $\forall x \in E \setminus X$. 显然函数 $\mu_\tau(x)$ 是非负连续的,并且 $\sum_{\tau \in T} \mu_\tau(x) = 1$(注意,对每点 $x \in E \setminus X$, $\sum_{\tau \in T} \mu_\tau(x)$ 实际上是有限项的和,其余项均为零). 现定义算子 P_α 如下:

$$P_\alpha x = \begin{cases} x, & \text{当 } x \in X \text{ 时;} \\ \sum_{\tau \in T} \mu_\tau(x) y_\tau, & \text{当 } x \in E \setminus X \text{ 时.} \end{cases}$$

下证此 P_α 即合要求. 首先注意,对每个 $x \in E \setminus X$, $\sum_{\tau \in T} \mu_\tau(x) y_\tau$ 实际上是有限项的和,故 P_α 有意义,并且显然 $P_\alpha: E \to X$(因为 X 是凸的). 又 $P_\alpha x = x$, $\forall x \in X$. 当 $x \in X$ 时,不等式(2·23)显然成立. 当 $x \in E \setminus X$ 时,由 $x - P_\alpha x = \sum_{\tau \in T} \mu_\tau(x)(x - y_\tau)$ 知

$$\| x - P_\alpha x \| \leqslant \sum_{\tau \in T} \mu_\tau(x) \| x - y_\tau \|. \qquad (2\cdot 25)$$

上式右端只有有限个 $\mu_\tau(x) \neq 0$. 当 $\mu_\tau(x) \neq 0$ 时,必有 $x \in V_\tau$,从而由(2·24)式知 $\| x - y_\tau \| \leqslant (1+\alpha)\rho(x, X)$;于是再根据

(2·25)式得

$$\|x-P_{\alpha}(x)\|\leqslant\sum_{\tau\in T}\mu_{\tau}(x)(1+\alpha)\rho(x,X)$$
$$=(1+\alpha)\rho(x,X),$$

故(2·23)式成立．至于 P_{α} 的连续性，可仿前面 X 是可分空间的情况证明，这里不再写出．证完．

注 5 E 中任何非空凸闭集 X 都是 E 的收敛核这一结论是在〔26〕中证明的，满足不等式(2·23)的保核收缩 P_{α} 的存在性是在〔9〕中得到的．

定理 2.7(全连续算子延拓定理) 设 E_1 和 E_2 是实 Banach 空间，D 是 E_1 中某闭集，$A:D\to E_2$ 全连续．由必存在算子 $\tilde{A}:E_1\to E_2$ 全连续，使当 $x\in D$ 时恒有 $\tilde{A}x=Ax$，并且 $\tilde{A}(E_1)\subset\overline{co}A(D)$，这里 $\overline{co}A(D)$ 表 A 的值域 $A(D)$ 在 E_2 中的凸闭包．

证 先设 D 是有界的．根据定理 2.6，A 可表为

$$Ax=A_0x+\sum_{n=1}^{\infty}A_nx\quad(x\in D),\tag{2·26}$$

其中每个 $A_n(n=0,1,2,\cdots)$ 都是 D 上连续有界的有限维算子，并且满足

$$\|A_nx\|\leqslant\frac{1}{2^n}\quad(x\in D,n=1,2,\cdots)\tag{2·27}$$

根据引理 2.2，$\overline{co}A_n(D)$ 是 E_2 的一个收缩核，用 P_n 表示它的任一个保核收缩．由于 $A_n(D)$ 是有限维空间中的有界集，故根据拓扑学中的 Tietze 扩张定理(见〔24〕)，$A_n(n=0,1,2,\cdots)$ 可以延拓成整个 E_1 上的连续有界的有限维算子 B_n，从而 $B_n:E_1\to E_2$ 全连续．令 $C_n=P_nB_n(n=0,1,2,\cdots)$，则 $C_n:E_n\to E_2$ 全连续且当 $x\in D$ 时，恒有 $C_nx=A_nx(n=0,1,2,\cdots)$；此外，由

(2·27)式并注意到 P_n 的定义，易知

$$\|C_n x\| \leqslant \frac{1}{2^n} \quad (x \in E_1,\ n=1,2,\cdots). \tag{2·28}$$

于是级数

$$Cx = C_0 x + \sum_{n=1}^{\infty} C_n x \quad (x \in E_1) \tag{2·29}$$

在 E_1 上一致收敛，从而根据定理 2.1 知 $C: E_1 \to E_2$ 全连续；并且由(2·26)式知，当 $x \in D$ 时，恒有 $Cx = Ax$．根据引理 2.3，$\overline{\text{co}} A(D)$是 E_2 的一个收缩核，用 P 表它的任一个保核收缩．令 $\widetilde{A} = PC$，于是 $\widetilde{A}: E_1 \to E_2$ 全连续，并且当 $x \in D$ 时，恒有 $\widetilde{A}x = PCx = PAx = Ax$；此外，显然 $\widetilde{A}(E_1) \subset \overline{\text{co}} A(D)$．于是，在 D 有界的情况下，定理 2.7 获证．

现设 D 无界．用 T_n 表闭球$\{x \mid x \in E_1, \|x\| \leqslant n\}$，$(n=1, 2, \cdots)$．对有界闭集 $D \cap T_1$ 应用上面已证的结果知，$\exists A_1: E_1 \to E_2$ 全连续，当 $x \in D \cap T_1$ 时，$A_1 x = Ax$，并且 $A_1(E_1) \subset \overline{\text{co}} A(D \cap T_1)$．现在集 $D_1 = D \cup T_1$ 上定义算子 $\widetilde{A}_1$．当 $x \in D$ 时，令 $\widetilde{A}_1 x = Ax$；当 $x \in T_1$ 时，令 $\widetilde{A}_1 x = A_1 x$(由于当 $x \in D \cap T_1$ 时 $A_1 x = Ax$，故这样定义是合理的)．显然 $\widetilde{A}_1: D_1 = D \cup T_1 \to E_2$ 全连续，并且当 $x \in D$ 时，$\widetilde{A}_1 x = Ax$．显然 $\widetilde{A}_1(D) \subset \overline{\text{co}} A(D)$．同理，利用前面已证的结论，$\exists A_2: E_1 \to E_2$ 全连续，当 $x \in D_1 \cap T_2$ 时，$A_2 x = \widetilde{A}_1 x$，并且 $A_2(E_1) \subset \overline{\text{co}} \widetilde{A}_1(D_1 \cap T_2)$．定义 $D_2 = D_1 \cup T_2 = D \cup T_2$ 上的算子 $\widetilde{A}_2$．当 $x \in D_1$ 时，令 $\widetilde{A}_2 x = \widetilde{A}_1 x$；当 $x \in T_2$ 时，令 $\widetilde{A}_2 x = A_2 x$．则 $\widetilde{A}_2: D_2 \to E_2$ 全连续，并且当 $x \in D$ 时，$\widetilde{A}_2 x = \widetilde{A}_1 x = Ax$，此外，显然有 $\widetilde{A}_2(D_2) \subset \overline{\text{co}} A(D)$．这样继续下去，一般得 $\widetilde{A}_n: D_n \to E_2$ 全连续，它是 $\widetilde{A}_{n-1}: D_{n-1} \to E_2$ 的延拓，并且有 $\widetilde{A}_n(D_n) \subset \overline{\text{co}} A(D)$(注意 D_n

$=D\cup T_n)(n=2,3,\cdots)$. 最后，定义算子 $\tilde{A}$. 设 $x\in E_1$，取 n，使 $n\geqslant\|x\|$，于是 $x\in D_n$. 定义 $\tilde{A}x=\tilde{A}_n x$. 显然这样定义的 $\tilde{A}x$ 由 x 惟一确定，而与 n 的选取无关. 并且易知 $\tilde{A}:E_1\to E_2$ 全连续，当 $x\in D$ 时 $\tilde{A}x=Ax$，并且 $\tilde{A}(E_1)\subset\overline{\mathrm{co}}A(D)$. 证完.

注 6 定理 2.7 是关于全连续算子的延拓定理. 还可以证明关于连续算子的延拓定理(见[26])：设 E_1 是距离空间，E_2 是局部凸线性拓扑空间(特别线性赋范空间)，D 是 E_1 中某闭集，$A:D\to E_2$ 连续. 则必存在算子 $\tilde{A}:E_1\to E_2$ 连续，使当 $x\in D$ 时恒有 $\tilde{A}x=Ax$，并且 $\tilde{A}(E_1)\subset\overline{\mathrm{co}}A(D)$.

§3 Fréchet 微分与 Gâteaux 微分

本节将把数学分析中的全微分概念和方向导数概念推广到作用在 Banach 空间中的算子上去. 为此，作为预备知识，先介绍一下抽象函数的积分与导数.

设 E 是一个实 Banach 空间，算子 $x(t):[a,b]\to E$ 称为**抽象函数**(即自变量 t 取实数值，而函数值属于 Banach 空间 E).

定义 3.1 设 $x(t):[a,b]\to E$ 是一个抽象函数. 对$[a,b]$的任一分法 T：

$$a=t_0<t_1<\cdots<t_{i-1}<t_i<\cdots<t_n=b,$$

作积分和 $\sigma=\sum_{i=1}^{\infty}x(\xi_i)\Delta t_i$，其中 $t_{i-1}\leqslant\xi_i\leqslant t_i$ 任取，$\Delta t_i=t_i-t_{i-1}(i=1,2,\cdots,n)$. 如果当 $d(T)=\max\limits_i\Delta t_i\to0$ 时，σ 在 E 中趋于某极限 I，即 $\exists\, I\in E$，使 $\|\sigma-I\|\to0$ 当 $d(T)\to0$ 时，则称 $x(t)$ 在$[a,b]$上 Riemann 可积，元素 I 叫做 $x(t)$ 在$[a,b]$上的

Riemann 积分,简称积分,记为 $\int_a^b x(t)\mathrm{d}t$;即

$$\int_a^b x(t)\mathrm{d}t = I = \lim_{d(T)\to 0}\sum_{i=1}^{n} x(\xi_i)\Delta t_i. \tag{3·1}$$

定理 3.1 若 $x(t)$在$[a,b]$连续,则 $x(t)$必在$[a,b]$上可积.

证 $\forall \varepsilon>0$,由于 $x(t)$在$[a,b]$上连续,故一致连续,因此存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$,使当 $t,t'\in[a,b]$,$|t-t'|<\delta$ 时,恒有 $\|x(t)-x(t')\|<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}$. 设 T_1, T_2 是$[a,b]$的两个分法,满足 $d(T_1)<\delta$,$d(T_2)<\delta$. 我们证明,对于 T_1 与 T_2 的任两个积分和 σ_1 与 σ_2,均有

$$\|\sigma_1-\sigma_2\|<\varepsilon. \tag{3·2}$$

事实上,用 T_3 表示将 T_1 与 T_2 的所有的分点合并起来所做成的分法. 设 T_1 为 $a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$,$\sigma_1=\sum_{i=1}^{n}x(\xi_i)\Delta t_i$,设 T_3 是在 T_1 的基础上,再将$[t_{i-1},t_i]$分为 $t_{i-1}=t_{i,0}<t_{i,1}<\cdots<t_{i,k_i}=t_i(i=1,2,\cdots,n)$. 令

$$\sigma_3=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k_i}x(t_{i,j})(t_{i,j}-t_{i,j-1}).$$

于是有

$$\begin{aligned}
&\|\sigma_1-\sigma_3\|\\
&=\left\|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k_i}[x(\xi_i)-x(t_{i,j})](t_{i,j}-t_{i,j-1})\right\|\\
&\leqslant\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k_i}\|x(\xi_i)-x(t_{i,j})\|\cdot(t_{i,j}-t_{i,j-1})\\
&<\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k_i}\frac{\varepsilon}{2(b-a)}(t_{i,j}-t_{i,j-1})=\frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

同理可证$\|\sigma_2-\sigma_3\|<\frac{\varepsilon}{2}$．由此可知$\|\sigma_1-\sigma_2\|\leqslant\|\sigma_1-\sigma_3\|+\|\sigma_3-\sigma_2\|<\varepsilon$，即(3·2)式成立．

用$T^{(n)}$表将$[a,b]$ n等分所得的分法，用$\sigma^{(n)}$表对于$T^{(n)}$取ξ_i为右端点作出的积分和．由(3·2)式知$\|\sigma^{(n)}-\sigma^{(m)}\|\to 0$ $(n,m\to\infty)$．于是，由E的完备性知，$\exists I\in E$，使$\|\sigma^{(n)}-I\|\to 0(n\to\infty)$．下证

$$\lim_{d(T)\to 0}\|\sigma-I\|=0. \tag{3·3}$$

事实上，$\forall\varepsilon>0$，由(3·2)式知$\exists\delta_1>0$，使当$d(T_1)<\delta_1$，$d(T_2)<\delta_1$时，恒有$\|\sigma_1-\sigma_2\|<\frac{\varepsilon}{2}$．设$T$是任一分法，满足$d(T)<\delta_1$，$\sigma$为对应于$T$的任一积分和．今取定一个充分大的$n$，使$\frac{b-a}{n}<\delta_1$，$\|\sigma^{(n)}-I\|<\frac{\varepsilon}{2}$．于是$d(T^{(n)})<\delta_1$，从而$\|\sigma-\sigma^{(n)}\|<\frac{\varepsilon}{2}$．故$\|\sigma-I\|\leqslant\|\sigma-\sigma^{(n)}\|+\|\sigma^{(n)}-I\|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$．即(3·3)式成立．证完．

注1 设$x_1(t)$，$x_2(t)$，$x(t)$在$[a,b]$上连续，α，β为实数，$f\in E^*$．则下列公式显然成立：

$$\text{(i)}\int_a^b[\alpha x_1(t)+\beta x_2(t)]\mathrm{d}t=\alpha\int_a^b x_1(t)\mathrm{d}t+\beta\int_a^b x_2(t)\mathrm{d}t; \tag{3·4}$$

$$\text{(ii)}\left\|\int_a^b x(t)\mathrm{d}t\right\|\leqslant\int_a^b\|x(t)\|\mathrm{d}t; \tag{3·5}$$

$$\text{(iii)}f\left(\int_a^b x(t)\mathrm{d}t\right)=\int_a^b f(x(t))\mathrm{d}t. \tag{3·6}$$

定义 3.2 设$x(t):[a,b]\to E$是一抽象函数，$t_0\in[a,b]$．若$\exists z_0\in E$，使

$$\lim_{\Delta t\to 0}\left\|\frac{x(t_0+\Delta t)-x(t_0)}{\Delta t}-z_0\right\|=0,$$

则称 $x(t)$ 在 $t=t_0$ 点**可微**，z_0 叫做 $x(t)$ 在 t_0 点的**导数**，记为 $x'(t_0)$；即

$$x'(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{x(t_0+\Delta t)-x(t_0)}{\Delta t}. \tag{3·7}$$

若 $x(t)$ 在 $[a,b]$ 中每一点均可微（a 点右可微，b 点左可微），则称 $x(t)$ **在 $[a,b]$ 上可微**，导函数 $x'(t):[a,b]\to E$ 也是一个抽象函数．

注 2 显然，若 $x(t)$ 在点 t_0 可微，则 $x(t)$ 必在 t_0 连续．

定理 3.2 （ⅰ）若 $x'(t)$ 在 $[a,b]$ 存在且连续，则 Newton－Leibnitz 公式成立：

$$\int_a^b x'(t)\mathrm{d}t=x(b)-x(a). \tag{3·8}$$

（ⅱ）若 $x(t)$ 在 $[a,b]$ 连续，在 (a,b) 可微，则必存在 $a<\xi<b$，使

$$\|x(b)-x(a)\|\leqslant(b-a)\|x'(\xi)\|$$

成立．

（ⅲ）设 $x(t)$ 在 $[a,b]$ 连续．令

$$y(t)=\int_a^t x(s)\mathrm{d}s\quad(a\leqslant t\leqslant b),$$

则 $y(t)$ 在 $[a,b]$ 可微，并且 $y'(t)=x(t)(a\leqslant t\leqslant b)$．

证 （ⅰ）设 $f\in E^*$，考察 $[a,b]$ 上的实函数 $g(t)=f(x(t))$．易知 $g'(t)=f(x'(t))$，$a\leqslant t\leqslant b$．故 $g'(t)$ 在 $[a,b]$ 连续；由数学分析中的 Newton－Leibnitz 公式知

$$\int_a^b g'(t)\mathrm{d}t=g(b)-g(a),$$

注意到公式(3·6)，即

$$f\left(\int_a^b x'(t)\mathrm{d}t\right)=\int_a^b f(x'(t))\mathrm{d}t=f(x(b))-f(x(a)),$$

亦即

$$f\left[\int_a^b x'(t)\mathrm{d}t - x(b) + x(a)\right] = 0.$$

再根据 $f\in E^*$ 的任意性，即得

$$\int_a^b x'(t)\mathrm{d}t - x(b) + x(a) = \theta,$$

故(3·8)式成立．

（ⅱ）取 $f\in E^*$，使 $\|f\| = 1$ 且

$$f(x(b) - x(a)) = \|x(b) - x(a)\|$$

令 $g(t) = f(x(t))$，则由中值公式知，存在 $a<\xi<b$，使

$$\begin{aligned}\|x(b) - x(a)\| &= g(b) - g(a)\\ &= g'(\xi)(b-a) = f(x'(\xi))(b-a)\\ &\leqslant \|f\|\cdot\|x'(\xi)\|(b-a)\\ &= \|x'(\xi)\|(b-a).\end{aligned}$$

（ⅲ）设 $t\in[a,b]$．$\forall\varepsilon>0$，由 $x(s)$ 的连续性知，$\exists\delta>0$，使当 $|s-t|<\delta$ 时，恒有 $\|x(s)-x(t)\|<\varepsilon$．于是，当 $0<|\Delta t|<\delta$ 时，利用公式(3·5)，必有(下式中已设 $\Delta t>0$；当 $\Delta t<0$ 时，类似地可得同样结果)

$$\begin{aligned}&\left\|\frac{y(t+\Delta t)-y(t)}{\Delta t} - x(t)\right\|\\ &= \left\|\frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t}[x(s)-x(t)]\mathrm{d}s\right\|\\ &\leqslant \frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t}\|x(s)-x(t)\|\mathrm{d}s\\ &< \frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t}\varepsilon\mathrm{d}s = \varepsilon.\end{aligned}$$

故 $y'(t) = x(t)$．证完．

下面介绍 Fréchet 微分与 Fréchet 导算子的概念，它们是数

学分析中函数的全微分概念的推广．

定义 3.3 设 E_1 和 E_2 是 Banach 空间，D 是 E_1 中某开集，$A:D\to E_2$，$x_0\in D$．若 $\exists B\in(E_1\to E_2)$（$(E_1\to E_2)$表映 E_1 入 E_2 的线性有界算子的全体构成的 Banach 空间），使（在点 x_0 附近）

$$A(x_0+h)-Ax_0=Bh+\omega(x_0,h),\qquad(3\cdot10)$$

其中 $\omega(x_0,h)=o(\|h\|)$，即

$$\lim_{\|h\|\to0}\frac{\|\omega(x_0,h)\|}{\|h\|}=0;\qquad(3\cdot11)$$

则称算子 A 在点 x_0 处 **Fréchet 可微**，Bh 叫做 A 在 x_0 处对于 h 的 **Fréchet 微分**，记为 $\mathrm{d}[A(x_0)h]$；算子 B 叫做 A 在点 x_0 的 **Fréchet 导算子**，记为 $A'(x_0)$．于是(3·10)式为

$$A(x_0+h)-Ax_0=A'(x_0)h+\omega(x_0,h),\qquad(3\cdot12)$$

其中 $\omega(x_0,h)$满足(3·11)式，亦即

$$\lim_{\|h\|\to0}\frac{\|A(x_0+h)-Ax_0-A'(x_0)h\|}{\|h\|}=0.\qquad(3\cdot13)$$

又有 $\mathrm{d}[A(x_0)h]=A'(x_0)h$．

注 3 (ⅰ)Fréchet 导算子是惟一的，即若除 B 外，还有 $B_1\in(E_1\to E_2)$也满足(3·10)式与(3·11)式，则必 $B_1=B$．

(ⅱ)若 A_1,A_2 均在点 x_0 处 Fréchet 可微，则 $\alpha A_1+\beta A_2$（α,β 是实数）也在 x_0 处 Fréchet 可微，并且$(\alpha A_1+\beta A_2)'(x_0)=\alpha A_1'(x_0)+\beta A_2'(x_0)$．

(ⅲ)若 $A\in(E_1\to E_2)$，则 $A'(x_0)=A$，对任何 $x_0\in E_1$．

(ⅳ)常算子的 Fréchet 导算子为 θ；即若 $Ax\equiv y_0\in E_2$，$\forall x\in E_1$，则 $A'(x_0)=\theta$，$\forall x_0\in E_1$．

以上这些结论(ⅰ)～(ⅳ)都是显然的．此外，若特别 $E_1=$

R^1，即算子 A 是抽象函数 $x(t)$，则(3·13)式为

$$\lim_{\Delta t\to 0}\left\|\frac{x(t_0+\Delta t)-x(t_0)}{\Delta t}-x'(t_0)\right\|=0,$$

故现在的 Fréchet 导算子与定义 3.2 中定义的抽象函数的导数是一致的．

例3.1 设由 m 个 n 元函数 $f_i(x_1,\cdots,x_n)(i=1,2,\cdots,m)$ 确定一个映 R^n 入 R^m 的算子 A 如下：

$$y=Ax,\quad x=(x_1,\cdots,x_n),\quad y=(y_1,\cdots,y_m),$$

其中

$$y_i=f_i(x_1,\cdots x_n)\quad i=1,2,\cdots,m.$$

设每个 f_i 都在点 $x^{(0)}=(x_1^{(0)},\cdots,x_n^{(0)})$ 的某邻域内具有连续的一阶偏导数，于是对 $h=(h_1,\cdots,h_n)$，当 $\|h\|$ 充分小时，利用中值公式，有

$$\begin{aligned}&A(x^{(0)}+h)-Ax^{(0)}\\&=(f_1(x_1^{(0)}+h_1,\cdots,x_n^{(0)}+h_n)-f_1(x_1^{(0)},\cdots,x_n^{(0)}),\cdots,\\&\quad f_m(x_1^{(0)}+h_1,\cdots,x_n^{(0)}+h_n)-f_m(x_1^{(0)},\cdots,x_n^{(0)}))\\&=\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_1}{\partial x_i}\bigg|_{x^{(0)}+\theta_1 h}\cdot h_i,\cdots,\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_m}{\partial x_i}\bigg|_{x^{(0)}+\theta_m h}\cdot h_i\right),\end{aligned}$$

由此根据 $\frac{\partial f_s}{\partial x_i}$ 的连续性，即易知 A 在 $x^{(0)}$ 处 Fréchet 可微，并且 $A'(x^{(0)})$ 由下式表示：

$$A'(x^{(0)})h=\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_1}{\partial x_i}\bigg|_{x^{(0)}}\cdot h_i,\cdots,\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_m}{\partial x_i}\bigg|_{x^{(0)}}\cdot h_i\right).\tag{3·14}$$

亦即线性算子 $A'(x)$ 是由矩阵 $\left(\frac{\partial f_s}{\partial x_i}\right)_{1\leqslant s\leqslant m,\ 1\leqslant i\leqslant n}$ 所确定的线性变换：$z=A'(x)h$ 相当于($z=(z_1,\cdots,z_m)$)

$$
\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}.
$$

例 3.2 考察 Урысон 算子(2·2)式,其中 G 表 R^N 中某有界闭集．假定 $k(x,y,u)$ 与 $k_u'(x,y,u)$ 都在 $(x,y)\in G\times G=\hat{G}$, $-\infty<u<+\infty$ 上连续．由定理 2.2 知, Урысон 算子 K: $C(G)\to C(G)$ 全连续．现在证明,在任何点 $\varphi_0(x)\in C(G)$ 处,算子 K 都是 Fréchet 可微的,并且其 Fréchet 导算子 $K'(\varphi_0)$ 是下面的线性积分算子:

$$
K'(\varphi_0)h(x)=\int_G k_u'(x,y,\varphi_0(y))h(y)\mathrm{d}y. \qquad (3\cdot15)
$$

证 令

$$
Bh(x)=\int_G k_u'(x,y,\varphi_0(y))h(y)\mathrm{d}y, \qquad (3\cdot16)
$$

则 $B:C(G)\to C(G)$ 是线性有界的全连续算子．我们有:

$$
\begin{aligned}
&|K(\varphi_0(x)+h(x))-K\varphi_0(x)-Bh(x)|\\
&=\Big|\int_G [k(x,y,\varphi_0(y)+h(y))\\
&\quad -k(x,y,\varphi_0(y))]\mathrm{d}y\\
&\quad -\int_G k_u'(x,y,\varphi_0(y))h(y)\mathrm{d}y\Big|\\
&=\Big|\int_G [k_u'(x,y,\varphi_0(y)+\theta(y)h(y))\\
&\quad -k'_u(x,y,\varphi_0(y))]\Big|\\
&\leqslant \|h\|_C\cdot\int_G |k_u'(x,y,\varphi_0(y)
\end{aligned}
$$

$$+\theta(y)h(y))-k_u'(x,y,\varphi_0(y))|\mathrm{d}y, \qquad (3\cdot 17)$$

其中 $0<\theta(y)<1$. 令 $M=\max\limits_{x\in G}|\varphi_0(x)|$. $\forall\,\varepsilon>0$, 由 $k_u'(x,y,u)$在 $G\times G\times[-M-1,M+1]$上的一致连续性知$\exists\,\delta>0$(可设 $\delta<1$), 使当 $-M-1\leqslant u_1,\ u_2\leqslant M+1$, $|u_1-u_2|<\delta$ 时, 对一切$(x,y)\in G\times G$, 均有

$$|k_u'(x,y,u_1)-k_u'(x,y,u_2)|<\frac{\varepsilon}{\mathrm{mes}G}. \qquad (3\cdot 18)$$

于是由(3·17)式与(3·18)式知, 当 $0<\|h\|_C<\delta$ 时, 恒有

$$|K(\varphi_0(x)+h(x))-K\varphi_0(x)-Bh(x)|$$

$$<\|h\|_C\cdot\int_G\frac{\varepsilon}{\mathrm{mes}G}\mathrm{d}y=\varepsilon\|h\|_C,\quad \forall\,x\in G.$$

故
$$\frac{\|K(\varphi_0+h)-K\varphi_0-Bh\|_C}{\|h\|_C}\leqslant\varepsilon$$

即
$$\lim_{\|h\|_C\to 0}\frac{\|K(\varphi_0)+h-K\varphi_0-Bh\|_C}{\|h\|_C}=0$$

由此可知 K 在 φ_0 处 Fréchet 可微, 并且 $K'(\varphi_0)=B$. 证完.

例 3.3(见[28]) 仍考察 Урысон 算子(2·2)式, G 表 R^N 中某有界闭集. 设 $k(x,y,u)(x,y\in G,-\infty<u<+\infty)$满足 Caratheodory 条件, 并且满足

$$|k(x,y,u)|\leqslant R(x,y)|u|$$
$$(x,y,\in G,\quad -\infty<u<+\infty). \qquad (3\cdot 19)$$

其中非负可测函数 $R(x,y)$满足

$$\int_G\int_G[R(x,y)]^r\mathrm{d}x\mathrm{d}y<+\infty,$$

这里 $r=\max\{p,q\}$, $p>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$; 又设 $k_u'(x,y,0)$几乎处处存在. 我们证明: Урысон 算子 $K:L_p(G)\to L_p(G)$, K 在 $L_p(G)$中的零点 θ 处 Fréchet 可微, 并且

$$K'(\theta)\varphi(x)=\int_G k_u'(x,y,0)\varphi(y)\mathrm{d}y. \qquad (3\cdot20)$$

证 由(3·19)式并利用 Hölder 不等式知，当 $\varphi\in L_p(G)$ 时，有

$$\left(\int_G |K\varphi(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant\left\{\int_G\left(\int_G [R(x,y)]^q\mathrm{d}y\right)^{\frac{p}{q}}dx\right\}^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\int_G |\varphi(y)|^p\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant(\mathrm{mes}G)^{\frac{|p-q|}{pq}}\cdot\left(\int_G\int_G [R(x,y)]^r\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{r}}\|\varphi\|_{L_p}, \qquad (3\cdot21)$$

由此可知 $K:L_p(G)\to L_p(G)$(还可证 K 是全连续的，见[28]).

令
$$B\varphi(x)=\int_G k_u'(x,y,0)\varphi(y)\mathrm{d}y. \qquad (3\cdot22)$$

由(3·19)式知 $k(x,y,0)\equiv0$，从而

$$|k_u'(x,y,0)|\leqslant R(x,y). \qquad (3\cdot23)$$

由此，仿(3·21)式的推导，可得

$$\|B\varphi\|_{L_p}\leqslant(\mathrm{mes}G)^{\frac{|p-q|}{pq}}$$

$$\cdot\left(\int_G\int_G [R(x,y)]^r\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{r}}\|\varphi\|_{L_p}. \qquad (3\cdot24)$$

因此，$B:L_p(G)\to L_p(G)$线性有界(实际上可证 B 全连续).

下证 $K'(\theta)=B$，即(注意到 $k(x,y,0)\equiv0$)

$$\lim_{\|\varphi\|_{L_p}\to0}\frac{\|K\varphi-B\varphi\|_{L_p}}{\|\varphi\|_{L_p}}=0.$$

为此只需证明：对任何序列 $\{\varphi_n\}$，$\|\varphi_n\|_{L_p}\to0$，必存在子列 $\{\varphi_{n_i}\}$，使

$$\lim_{i\to\infty}\frac{\|K\varphi_{n_i}-B\varphi_{n_i}\|_{L_p}}{\|\varphi_{n_i}\|_{L_p}}=0 \tag{3·25}$$

令

$$F(x,y,u)=\begin{cases}\dfrac{k(x,y,u)}{u}, & \text{当 } u\neq 0 \text{ 时;}\\ k_u'(x,y,u) & \text{当 } u=0 \text{ 时}.\end{cases}$$

于是由假定以及(3·19)式、(3·25)式知

$$\lim_{u\to 0}F(x,y,u)=k_u'(x,y,0),\ \text{p.p.} \tag{3·26}$$

$$|F(x,y,u)-k_u'(x,y,0)|\leqslant 2R(x,y). \tag{3·27}$$

现给定$\{\varphi_n\}$，满足$\|\varphi_n\|_{L_p}\to 0$. 于是必有子列$\{\varphi_{n_i}\}$存在，使$\lim\limits_{i\to\infty}\varphi_{n_i}(x)=0$.p.p.因此由(3·26)式得

$$\lim_{i\to\infty}F(x,y,\varphi_{n_i}(y))=k_u'(x,y,0),\ \text{p.p.} \tag{3·28}$$

但又有

$$K\varphi_{n_i}(x)-B\varphi_{n_i}(x)=\int_G[F(x,y,\varphi_{n_i}(y))-k_u'(x,y,0)]\varphi_{n_i}(y)\mathrm{d}y,$$

从而易知

$$\|K\varphi_{n_i}-B\varphi_{n_i}\|_{L_p}\leqslant\left\{\int_G\left(\int_G|F(x,y,\varphi_{n_i}(y))-k_u'(x,y,0)|^q\mathrm{d}y\right)^{\frac{p}{q}}\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{p}}\|\varphi_{n_i}\|_{L_p}$$

$$\leqslant(\text{mes})^{\frac{|p-q|}{pq}}\left(\int_G\int_G|F(x,y,\varphi_{n_i}(y))-k_u'(x,y,0)|^r\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{r}}\|\varphi_{n_i}\|_{L_p}. \tag{3·29}$$

由(3·28)式与(3·27)式，利用 Lebesgue 控制收敛定理，得到

$$\lim_{i\to\infty}\int_G\int_G \Big|F(x,y,\varphi_{n_i}(y)) - k_u'(x,y,0)\Big|^r \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0. \tag{3·30}$$

由(3·29)式与(3·30)式即得(3·25)式．证完．

定理 3.3 设 E_1, E_2, E_3，都是 Banach 空间，开集 $D \subset E_1$，开集 $H \subset E_2$，$A: D \to E_2$，$B: H \to E_3$，且 $A(D) \subset H$．设 A 在点 $x_0 \in D$ 处 Fréchet 可微，B 在点 $y_0 = Ax_0$ 处 Fréchet 可微，则复合算子 $BA: D \to E_3$ 在点 x_0 处 Fréchet 可微，并且

$$(BA)'(x_0) = B'(y_0)A'(x_0). \tag{3·31}$$

证 由假定，

$$A(x_0+h) - Ax_0 = A'(x_0)h + \omega(x_0,h),$$
$$B(y_0+k) - By_0 = B'(y_0)k + \omega(y_0,k), \tag{3·32}$$

其中 $\dfrac{\|\omega(x_0,h)\|}{\|h\|} \to 0$ （$\|h\| \to 0$ 时），$\dfrac{\|\omega(y,k)\|}{\|k\|} \to 0$（$\|k\| \to 0$ 时）．令 $\omega(y_0,k) = \|k\| \cdot \omega_1(y_0,k)$，则 $\|\omega_1(y_0,k)\| \to 0$，当 $\|k\| \to 0$ 时．现在(3·32)中取 $k = A(x_0+h) - Ax_0 = A(x_0+h) - y_0$．于是，当 $\|h\| \to 0$ 时 $\|k\| \to 0$．这时(3·32)式变为

$$BA(x_0+h) - BA(x_0)$$
$$= B'(y_0)[A'(x_0)h + \omega(x_0,h)] + \|k\| \cdot \omega_1(y_0,k),$$

故

$$BA(x_0+h) - BA(x_0) = B'(y_0)A'(x_0)h + \omega_2(x_0,h), \tag{3·33}$$

其中

$$\omega_2(x_0,h) = B'(y_0)\omega(x_0,h) + \|k\| \cdot \omega_1(y_0,k) \tag{3·34}$$

于是

$$\frac{\|\omega_2(x_0,h)\|}{\|h\|} \leqslant \|B'(y_0)\| \cdot \frac{\|\omega(x_0,h)\|}{\|h\|}$$

$$+\frac{\|k\|}{\|h\|}\cdot\|\omega_1(y_0,k)\|. \tag{3·35}$$

而

$$\frac{\|k\|}{\|h\|}=\frac{\|A'(x_0)h+\omega(x_0,h)\|}{\|h\|}$$

$$\leqslant\|A'(x_0)\|+\frac{\|\omega(x_0,h)\|}{\|h\|}, \tag{3·36}$$

故由(3·35)式与(3·36)式，注意到当$\|h\|\to 0$时，有$\|k\|\to 0$，从而$\|\omega_1(y_0,k)\|\to 0$，故得

$$\lim_{\|h\|\to 0}\frac{\omega_2(x_0,h)}{\|h\|}=0. \tag{3·37}$$

于是由(3·33)式与(3·37)式知，复合算子 BA 在点 x_0 处 Fréchet 可微，并且$(BA)'(x_0)=B'(y_0)A'(x_0)$. 证完.

系 设 $A:D\to E_2$, $B:E_2\to E_3$ 线性有界. 若 A 在点 $x_0\in D$ 处 Fréchet 可微，则 BA 在点 x_0 处也 Fréchet 可微，并且

$$(BA)'(x_0)=BA'(x_0). \tag{3·38}$$

定理 3.4 用 l 表示直线段$\{x\mid x=x_0+th, 0\leqslant t\leqslant 1\}$ $(x_0, h\in E_1)$

(i) 若泛函 $f:D\to R^1$ $(l\subset D)$在 l 上 Fréchet 可微，则存在 $0<\tau<1$，使中值公式成立：

$$f(x_0+h)-f(x_0)=f'(x_0+\tau h)h; \tag{3·39}$$

(ii) 若算子 $A:D\to E_2$ $(l\subset D)$在 l 上 Fréchet 可微，则存在 $0<\tau<1$，使

$$\|A(x_0+h)-Ax_0\|\leqslant\|A'(x+\tau h)h\|; \tag{3·40}$$

(iii) 若算子 $A:D\to E_2$ $(l\subset D)$在 l 上 Fréchet 可微，并且 $A'(x)$在 l 上连续，则

$$A(x_0+h)-Ax_0=\int_0^1 A'(x_0+th)h\,\mathrm{d}t. \qquad (3\cdot41)$$

证 (ⅰ)令 $\varphi(t)=f(x_0+th), 0\leqslant t\leqslant 1$. 根据定理 3.5 易知 $\varphi(t)$在$[a,b]$上可微,并且 $\varphi'(t)=f'(x_0+th)h$. 由微分学中值公式知, $\exists\, 0<\tau<1$, 使 $\varphi(1)-\varphi(0)=\varphi'(\tau)$, 即(3·39)式成立.

(ⅱ)由 Hahn-Banach 定理知, $\exists\,\psi\in E^*$, 使 $\|\psi\|=1$, 且 $\psi[A(x_0+h)-Ax_0]=\|A(x_0+h)-Ax_0\|$(这里已设 $A(x_0+h)-Ax_0\neq\theta$;当 $A(x_0+h)-Ax_0=\theta$ 时, 不等式(3·40)显然成立). 考察函数 $\varphi(t)=\psi A(x_0+th), 0\leqslant t\leqslant 1$. 易知 $\varphi'(t)=\psi A'(x_0+th)h, 0\leqslant t\leqslant 1$. 于是由中值公式知, $\exists\, 0<\tau<1$ 使 $\varphi(1)-\varphi(0)=\varphi'(\tau)$, 即

$$\psi[A(x_0+h)-Ax_0]=\psi A'(x_0+\tau h)h,$$

从而

$$\|A(x_0+h)-Ax_0\|=\psi A'(x_0+\tau h)h$$
$$\leqslant\|\psi\|\|A'(x_0+\tau h)h\|=\|A'(x_0+\tau h)h\|.$$

(ⅲ)考察抽象函数 $y(t)=A(x_0+th), 0\leqslant t\leqslant 1$. 由假定, $y'(t)=A'(x_0+th)h$ 在 $0\leqslant t\leqslant 1$ 上连续,故由定理 3.2 可知

$$\int_0^1 y'(t)\mathrm{d}t=y(1)-y(0),$$

此即(3·41)式. 证完.

注 4 对于泛函, 中值公式(3·39)成立, 但对于一般的算子, 只能得出公式(3·40), 而中值公式

$$A(x_0+h)-Ax_0=A'(x_0+\tau h)h \qquad (3\cdot42)$$

一般是不成立的. 例如, 设 $A:R^2\to R^2$ 由下式定义:

$$y=Ax,\quad x=(x_1,x_2),\quad y=(y_1,y_2),$$

$$y_1 = x_1^2, \quad y_2 = x_2^2.$$

考察 $x^{(0)} = (0,0)$, $h = (1,1)$, 则 $A(x^{(0)} + h) - Ax^{(0)} = (1,1)$, 由例 3.1 的公式(3·14)知 $A'(x^{(0)} + \tau h)h = (2\tau, 3\tau^2)$, 故公式(3·42)相当于方程组 $1 = 2\tau$, $1 = 3\tau^2$, 它显然没有公共解．因此, 不论 $\tau \in (0,1)$ 为何数, 公式(3·42)都不成立．

定理 3.5 若 $A: D \to E_2$ 全连续, 并且在点 $x_0 \in D$ 处 Fréchet 可微, 则 $A'(x_0): E_1 \to E_2$ 全连续．

证 由于 $A'(x_0)$ 是线性算子, 故只需证 $A'(x_0)$ 将 E_1 中单位球 $S = \{x \mid x \in E_1, \|x\| \leqslant 1\}$ 变成 E_2 中的列紧集 $A'(x_0)(S)$. 假定 $A'(x_0)(S)$ 不是列紧的, 则 $\exists\, \varepsilon_0 > 0$ 及 $h_i \in S$ $(i = 1, 2, \cdots)$, 使

$$\|A'(x_0)h_i - A'(x_0)h_j)\| \geqslant \varepsilon_0 \quad (i \neq j). \tag{3·43}$$

由 $A'(x_0)$ 的定义并注意到 D 是开集, 可知 $\exists\, \tau > 0$, 使当 $\|h\| \leqslant \tau$ 时, 恒有 $x_0 + h \in D$, 且

$$\|A(x_0 + h) - Ax_0 - A'(x_0)h\| \leqslant \frac{\varepsilon_0}{3}\|h\|. \tag{3·44}$$

于是当 $i \neq j$ 时, 有

$$\begin{aligned}
&\|A(x_0 + \tau h_i) - A(x_0 + \tau h_j)\| \\
&= \|[A(x_0 + \tau h_i)] - Ax_0 - A'(x_0)(\tau h_i) \\
&\quad - [A(x_0 + \tau h_j) - Ax_0 - A'(x_0)(\tau h_j)] \\
&\quad + \tau[A'(x_0)h_i - A'(x_0)h_j]\| \\
&\geqslant \tau\|A'(x_0)h_i - A'(x_0)h_j\| \\
&\quad - \|A(x_0 + \tau h_i) - Ax_0 - A'(x_0)(\tau h_i)\| \\
&\quad - \|A(x_0 + \tau h_j) - Ax_0 - A'(x_0)(\tau h_j)\| \\
&\geqslant \tau\varepsilon_0 - \frac{\varepsilon_0}{3}\|\tau h_i\| - \frac{\varepsilon_0}{3}\|\tau h_j\| \geqslant \frac{\tau\varepsilon_0}{3},
\end{aligned}$$

此与 A 的全连续性矛盾．证完．

还可定义在无穷远处的 Fréchet 导算子(参见〔6〕、〔9〕)：

定义 3.4 设 $A: D \to E_2$，并且 D 包含 E_1 中某球的外部(即 $\exists R>0$，使 $\forall x \in E_1, \|x\|>R$ 都有 $x \in D$)．若存在 $B \in (E_1 \to E_2)$，使

$$\lim_{\|x\| \to +\infty} \frac{\| Ax - Bx \|}{\| x \|} = 0, \tag{3·45}$$

则称算子 A 在**无穷远∞处 Fréchet 可微**，B 叫做 A 在∞**处的 Fréchet 导算子**，记为 $A'(\infty)$，即 $A'(\infty) = B$，

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\|Ax - A'(\infty)x\|}{\|x\|} = 0. \tag{3·46}$$

当 $A'(\infty)$ 存在时，A 称为是**渐近线性的**．

例 3.4(见〔28〕) 考察 Урысон 算子(2·2)式，G 表 R^N 中某有界闭集，设 $k(x, y, u)$ 满足 Caratheodory 条件并满足

$$|k(x, y, u)| \leqslant R(x, y)(a + b|u|),$$
$$(x, y \in G, \quad -\infty < u < +\infty), \tag{3·47}$$

其中 $a>0, b>0$，非负可测函数 $R(x, y)$ 满足

$$\int_G \int_G [R(x, y)]^r \mathrm{d}x \mathrm{d}y < +\infty,$$

这里 $r = \max\{p, q\}$，$p>1$，$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$；又设

$$\lim_{u \to \infty} \frac{k(x, y, u)}{u} = Q(x, y) \quad \text{p.p.} \tag{3·48}$$

则 Урысон 算子 $K: L_p(G) \to L_p(G)$，在无穷远点 Fréchet 可微，并且导算子 $K'(\infty)$ 由下式表达($K'(\infty): L_p(G) \to L_p(G)$ 线性有界)：

$$K'(\infty)\varphi(x) = \int_G Q(x, y)\varphi(y) \mathrm{d}y. \tag{3·49}$$

证 由(3·47)与(3·48)式知

$$|Q(x,y)|\leqslant bR(x,y),\quad \text{p.p.}\tag{3·50}$$

由(3·47)式与(3·50)式，仿例3.3中的证明可知 $K: L_p(G)\to L_p(G)$ 有界(实际全连续)，$B: L_p(G)\to L_p(G)$ 线性有界(实际全连续)，这里 B 表算子

$$B\varphi(x)=\int_G Q(x,y)\varphi(y)\mathrm{d}y.\tag{3·51}$$

需要证明

$$\lim_{\|\varphi\|_{L_p}\to+\infty}\frac{\|K\varphi-B\varphi\|_{L_p}}{\|\varphi\|_{L_p}}=0.\tag{3·52}$$

$\forall\,\varepsilon>0$，首先 $\exists\,\delta>0$，使对任何 $\Omega\subset G\times G$，只要 $\max\Omega<\delta$，就有

$$\iint_\Omega[R(x,y)]^r\mathrm{d}x\mathrm{d}y<\varepsilon^r.\tag{3·53}$$

其次，由(3·48)式，利用 Егоров 定理(Егоров 定理是对函数序列而言的，但稍加修改其证明，即知对现在的情况也成立)可知必有 $\Omega_0\subset G\times G$，$\mathrm{mes}\Omega_0<\delta$ 存在，使 $F(x,y,u)=\dfrac{k(x,y,u)}{u}$ 在 $\Omega_1=G\times G\setminus\Omega_0$ 上一致收敛于 $Q(x,y)$(当 $u\to\infty$ 时)．于是，必有 $r>0$ 存在(可取 $r>1$)，使

$$|F(x,y,u)-Q(x,y)|<\varepsilon\quad(x,y\in\Omega_1,\ |u|\geqslant r).\tag{3·54}$$

令
$$\beta=\sup_{\|\varphi\|_{L_p}\leqslant r(\mathrm{mes}G)^{\frac{1}{p}}}\{\|K\varphi\|_{L_p},\|Bp\|_{L_p}\}.$$

对任何 $\varphi\in L_p(G)$，令

$$\varphi_1(x)=\begin{cases}\varphi(x), & \text{当}\ |\varphi(x)|\leqslant r\ \text{时};\\ r, & \text{当}\ |\varphi(x)|>r\ \text{时};\end{cases}$$

$$\varphi_2(x)=\begin{cases}\varphi(x), & \text{当} |\varphi(x)|>r \text{ 时};\\ r, & \text{当} |\varphi(x)|\leqslant r \text{ 时}.\end{cases}$$

显然

$$\begin{aligned}K\varphi(x)&=\int_G k(x,y,\varphi(y))\mathrm{d}y=\int_G k(x,y,\varphi_1(y))\mathrm{d}y\\&\quad+\int_G k(x,y,\varphi_2(y))\mathrm{d}y-\int_G k(x,y,r)\mathrm{d}y\\&=K\varphi_1(x)+K\varphi_2(x)-K\varphi_0(x),\end{aligned}$$

其中 $\varphi_0(x)\equiv r$. 同理 $B\varphi(x)=B\varphi_1(x)+B\varphi_2(x)-B\varphi_0(x)$; 由此并注意到 $\|\varphi_1\|_{L_p}\leqslant r(\mathrm{mex}G)^{\frac{1}{p}}$, $\|\varphi_0\|_{L_p}=r(\mathrm{mes}G)^{\frac{1}{p}}$ 即得

$$\begin{aligned}\|K\varphi-B\varphi\|_{L_p}&\leqslant 4\beta+\|K\varphi_2-B\varphi_2\|_{L_p}\\&\leqslant 4\beta+(\mathrm{mes}G)^{\frac{p-q}{pq}}\cdot\left(\int_G\int_G|F(x,y,\varphi_2(y))\right.\\&\quad\left.-Q(x,y)|^r\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{r}}\cdot\|\varphi_2\|_{L_p}.\end{aligned}\tag{3·55}$$

但显然 $|\varphi_2(x)|\leqslant|\varphi(x)|+r$, 故

$$\|\varphi_2\|_{L_p}\leqslant\|\varphi\|_{L_p}+r(\mathrm{mes}G)^{\frac{1}{p}}.\tag{3·56}$$

另一方面, 由(3·47)式并注意到 $r>1$ 可知

$$|F(x,y,u)-Q(x,y)|\leqslant(a+2b)R(x,y)\quad(|u|\geqslant r).\tag{3·57}$$

由(3·53)、(3·54)、(3·57)诸式, 并注意到 $|\varphi_2(x)|\geqslant r$, 得到

$$\begin{aligned}&\int_G\int_G|F(x,y,\varphi_2(y))-Q(x,y)|^r\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint_{\Omega_0}|F(x,y,\varphi_2(y))-Q(x,y)|^r\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&\quad+\iint_{\Omega_1}|F(x,y,\varphi_2(y))-Q(x,y)|^r\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned}$$

$$\leqslant (a+2b)^r \iint_{\Omega_0} [R(x,y)]^r \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \varepsilon^r \mathrm{mes}\Omega_1$$

$$< \varepsilon^r [(a+2b)^r + (\mathrm{mes}G)^2].$$

由此，再注意到(3·55)式与(3·56)式知

$$\overline{\lim_{\|\varphi\|_{L_p}\to+\infty}} \frac{\|K\varphi - B\varphi\|_{L_p}}{\|\varphi\|_{L_p}}$$

$$\leqslant \varepsilon (\mathrm{mes}G)^{\frac{|p-q|}{pq}} [(a+2b)^r + (\mathrm{mes}G)^2]^{\frac{1}{r}},$$

于是，根据 ε 的任意性即得(3·52)式．证完．

注意，若 $k_u'(x,y,u)$存在，且

$$\lim_{u\to\infty} k_u'(x,y,u) = Q(x,y) \quad \text{p.p.}, \qquad (3·58)$$

则条件(3·48)必满足．事实上，设在点(x,y)处，$k_u'(x,y,u) \to Q(x,y)(u\to\infty)$，则$\forall\varepsilon>0$，必$\exists a>0$，使当$|u|\geqslant a$ 时，恒有$|k_u'(x,y,u)-Q(x,y)|<\varepsilon$．于是当 $u>a$ 时，有

$$\left|\frac{k(x,y,u)}{u} - Q(x,y)\right|$$

$$= \left|\frac{k(x,y,u)-k(x,y,a)}{u} - Q(x,y) + \frac{k(x,y,a)}{u}\right|$$

$$= \left|\frac{k_u'(x,y,\xi)(u-a)}{u} - Q(x,y) + \frac{k(x,y,a)}{u}\right|$$

$$\leqslant |k_u'(x,y,\xi) - Q(x,y)|$$

$$+ \frac{a}{|u|}[|Q(x,y)|+\varepsilon] + \frac{|k(x,y,a)|}{|u|}$$

$$< \varepsilon + \frac{a}{|u|}[|Q(x,y)|+\varepsilon] + \frac{|k(x,y,a)|}{|u|},$$

其中 $a<\xi<u$，由此可知

$$\overline{\lim_{u\to+\infty}} \left|\frac{k(x,y,u)}{u} - Q(x,y)\right| \leqslant \varepsilon;$$

同理可知

$$\overline{\lim_{u\to\infty}}\left|\frac{k(x,y,u)}{u}-Q(x,y)\right|\leqslant\varepsilon.$$

于是根据 ε 的任意性即得$\frac{k(x,y,u)}{u}\to Q(x,y)(u\to\infty)$；故(3·48)式满足．

这里，条件(3·58)式比条件(3·48)式强．例如，设

$$k(x,y,u)=R(x,y)\left(1+u+\frac{\sin u^2}{u}\right)$$

$(u=0$ 时，规定$\frac{\sin u^2}{u}=0)$，则条件(3·48)式显然满足．

但由于

$$k_u'(x,y,u)=R(x,y)\left(1-\frac{\sin u^2}{u^2}+2\cos u^2\right),$$

故当 $u\to\infty$时，$k_u'(x,y,u)$无极限，因此条件(3·58)式不满足．

定理 3.6 若 $A:D\to E_2$ 全连续，D 包含 E_1 中某球的外部，且 A 在无穷远∞处 Fréchet 可微；则 $A'(\infty):E_1\to E_2$ 全连续．

证 和定理 3.5 的证明类似．若 $A'(\infty)$不全连续，则$\exists\,\varepsilon_0>0$，及 $h_i\in E_1$，$\|h\|\leqslant1(i=1,2,\cdots)$，使

$$\|A'(\infty)h_i-A'(\infty)h_j\|\geqslant\varepsilon_0\quad(i\neq j).\qquad(3\cdot59)$$

易知 $\sigma=\inf\|h_i\|>0$(因为若 $\inf\|h_i\|=0$，则存在子列 $h_{i_k}\to\theta$．由 $A'(\infty)$的连续性知，$\|A'(\infty)h_{i_k}-A'(\infty)h_{i_s}\|\to0$，当 $k,s\to\infty$时，此与(3·59)式矛盾)．由(3·46)式，$\exists\,\rho>0$，使当$\|x\|\geqslant\rho\sigma$时恒有$\|Ax-A'(\infty)x\|<\frac{\varepsilon_0}{3}\|x\|$；于是当 $i\neq j$ 时有

$$\begin{aligned}\|A(\rho h_i)-A(\rho h_j)\|&=\|[A(\rho h_i)-A'(\infty)(\rho h_i)]\\&\quad-[A(\rho h_j)-A'(\infty)(\rho h_j)]+\rho[A'(\infty)h_i-A'(\infty)h_j]\|\\&\geqslant\rho\|A'(\infty)h_i-A'(\infty)h_j\|-\|A(\rho h_i)-A'(\infty)(\rho h_i)\|\end{aligned}$$

$$-\|A(\rho h_j)-A'(\infty)(\rho h_j)\|\geqslant\frac{\rho\varepsilon_0}{3},$$

此与 A 的全连续性矛盾．证完．

定义 3.5 若 $A:D\to E_2$(D 是E_1 中某开集)在 D 中每一点x 都 Fréchet 可微，则 Fréchet 导算子 $A'(x)$随 x 而变，因此，$A':D\to(E_1\to E_2)$．若 A'又在点$x_0\in D$ 处 Fréchet 可微，则 A'在点x_0 处的 Fréchet 导算子$(A')'(x_0)$叫做算子 A 在点 x_0 处的**二阶 Fréchet 导算子**，记为 $A''(x_0)$．同理，二阶 Fréchet 导算子 $A''(x)$的 Fréchet 导算子(假如存在的话)叫做原算子 A 的**三阶 Fréchet 导算子**，记为 $A'''(x)$．一般地，$n-1$ 阶导算子 $A^{n-1}(x)$的 Fréchet 导算子(假如存在的话)叫做原算子 A 的 **n 阶 Fréchet 导算子**，记为 $A^{(n)}(x)$．

注 5 根据定义，显然 $A'(x)\in(E_1\to E_2)A''(x)\in(E_1\to(E_1\to E_2))$，一般地 $A^{(n)}(x)\in(\overbrace{E_1\to(E_1\to\cdots(E_1}^{n个}\to E_2)\cdots))$．

算子 $u_n:\overbrace{E_1\times E_1\times\cdots\times E_1}^{n个}\to E_2$ 称为 **n 线性有界算子**，如果：(i) $u_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)$对每一个变元 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$都是线性的；(ii)存在常数 M，使

$$\|u_n(x_1,\cdots,x_n)\|\leqslant M\|x_1\|\cdots\|x_n\|,$$
$$\forall\, x_i\in E_1\quad(i=1,2,\cdots,n).$$

易证，按普通的加法和数乘法，并定义范数

$$\|u_n\|=\sup_{\|x_i\|=1,\ i=1,2,\cdots,n}\|u_n(x_1,\cdots,x_n)\|,\qquad(3\cdot60)$$

则所有 u_n 构成一个 Banach 空间，记为$(\overbrace{E_1\times E_1\times\cdots\times E_1}^{n个}\to E_2)$．

若 u_n 属于$(\overbrace{E_1\to(E_1\to\cdots(E_1}^{n个}\to E_2)\cdots))$，则 u_n 可视为属

于$(\overbrace{E_1\times E_1\times\cdots\times E_1}^{n个}\to E_2)$. 事实上,视$(\cdots((u_nx_1)x_2)\cdots)x_n$为$u_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,则

$$\begin{aligned}&\|u_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)\|=\|(\cdots((u_nx_1)x_2)\cdots)\|\\ \leqslant&\|(\cdots(u_nx_1)x_2\cdots)x_{n-1}\|\cdot\|x_n\|\leqslant\cdots\\ \leqslant&\|u_nx_1\|\cdot\|x_2\|\cdots\|x_n\|\leqslant\|u_n\|\cdot\|x_1\|\cdots\|x_n\|\end{aligned}$$

故 $u_n\in(\overbrace{E_1\times E_1\times\cdots\times E_1}^{n个}\to E_2)$; 反之, 若 $u_n\in(\overbrace{E_1\times E_1\times\cdots\times E_1}^{n个}\to E_2)$,则 u_n 也可视为属于$(E_1\to(E_1\to\cdots(E_1\to E_2)\cdots))$. 事实上,在 $u_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)$中让 $x_1,\cdots,x_{n-1}$固定,只 x_n 变化,则 $u_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)=u_n(x_1,\cdots,x_{n-1})x_n$,其中 $u_n(x_1,\cdots,x_{n-1})\in(E_1\to E_2)$(因为$\|u_n(x_1,\cdots,x_{n-1})x_n\|=\|u_n(x_1,\cdots,x_n)\|\leqslant M\|x_1\|\cdots\|x_n\|$,故有 $u_n(x_1,\cdots,x_{n-1})\in(E_1\to E_2)$,且$\|u_n(x_1,\cdots,x_{n-1})\|\leqslant M\|x_1\|\cdots\|x_{n-1}\|$). 同理,在 $u_n(x_1,\cdots,x_{n-1})$中让 $x_1,\cdots,x_{n-2}$固定,只 x_{n-1}变化,则 $u_n(x_1,\cdots,x_{n-1})=u_n(x_1,\cdots,x_{n-2})x_{n-1}$,其中 $u_n(x_1,\cdots,x_{n-2})\in(E_1\to(E_1\to E_2))$. 这样继续下去,最后得 $u_n\in(E_1\to(E_1\to\cdots(E_1\to E_2)\cdots))$, 且有$(\cdots((u_nx_1)x_2)\cdots)x_n=u_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)$.

以后,$(\cdots((u_nx_1)x_2)\cdots)x_n$ 与 $u_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)$将不加区别,并简记为 $u_nx_1x_2\cdots x_n$;特别,若 $x_1=x_2=\cdots=x_n=h$,则 $u_nh_1\cdots h$ 简记 u_nh^n.

由以上可知 $A''(x)\in(E_1\times E_1\to E_2)$, 一般地, $A^{(n)}(x)\in(\overbrace{E_1\times E_1\times\cdots\times E_1}^{n个}\to E_2)$.

注 6 易证下面的结论:若$\exists Q\in(E_1\times E_1\to E_2)$满足

$$\|A'(x_0+h)k - A'(x_0)k - Qhk\| \leqslant \|k\|\|h\|\cdot\alpha(h), \tag{3·61}$$

其中 $\alpha(h)\to 0$ 当 $\|h\|\to 0$ 时，那末 $A''(x_0)$ 存在，并且有 $A''(x_0) = Q$. 事实上，由(3·61)式知

$$\|A'(x_0+h) - A'(x_0) - Qh\| \leqslant \|h\|\alpha(h),$$

由此知

$$\lim_{\|h\|\to 0} \frac{\|A'(x_0+h) - A'(x_0) - Qh\|}{\|h\|} = 0,$$

故 $A''(x_0)$ 存在，并且 $A''(x_0) = Q$.

例 3.5 考察例 3.1 中映 R^n 入 R^m 的算子 A

$$y = Ax,\quad x = (x_1, \cdots, x_n),\quad y = (y_1, \cdots, y_m),$$

其中

$$y_i = f_i(x_1, \cdots, x_n),\quad i = 1, \cdots, m.$$

设每个 f_i 都在点 $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)})$ 的某邻域内具有连续的二阶偏导数，于是，由例 3.1 中的结论知，当 $h = (h_1, \cdots, h_n)$, $\|h\|$ 充分小时，对 $k = (k_1, \cdots, k_n)$，利用中值公式，有

$$\begin{aligned}
& A'(x^{(0)} + h)k - A'(x^{(0)})k \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}\bigg|_{x^{(0)}+h} - \frac{\partial f_1}{\partial x_i}\bigg|_{x^{(0)}} \right) k_i, \cdots, \right. \\
&\qquad \left. \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f_m}{\partial x_i}\bigg|_{x^{(0)}+h} - \frac{\partial f_m}{\partial x_i}\bigg|_{x^{(0)}} \right) k_i \right) \\
&= \left(\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_i \partial x_j}\bigg|_{x^{(0)}+\theta_i^{(1)}h} k_i h_j, \cdots, \right. \\
&\qquad \left. \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f_m}{\partial x_i \partial x_j}\bigg|_{x^{(0)}+\theta_i^{(m)}h} k_i h_j \right),
\end{aligned}$$

其中，$0 < \theta_i^{(s)} < 1$, $(s = 1, \cdots, m; i = 1, \cdots, n)$. 由此，根据 $\dfrac{\partial^2 f_s}{\partial x_i \partial x_j}$ 的

连续性，利用(3·61)式，易知 $A''(x^{(0)})$ 存在，且具有表达式

$$A''(x^{(0)})hk$$
$$= \left(\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_i \partial x_j}\bigg|_{x^{(0)}} h_j k_i, \cdots, \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f_m}{\partial x_i \partial x_j}\bigg|_{x^{(0)}} h_j k_i\right),$$

由于 $\frac{\partial^2 f_s}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f_s}{\partial x_j \partial x_i}$，故又可写为

$$A''(x^{(0)})hk$$
$$= \left(\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_i \partial x_j}\bigg|_{x^{(0)}} h_i k_j, \cdots, \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f_m}{\partial x_i \partial x_j}\bigg|_{x^{(0)}} h_i k_j\right). \tag{3·62}$$

即 $A''(x^{(0)})$ 由二阶导数所组成的三维阵 $\left(\frac{\partial^2 f_s}{\partial x_i \partial x_j}\right)$ $(i = 1, \cdots, n; j = 1, \cdots, n; s = 1, \cdots, m)$ 表示．

例 3.6 考察 Урысон 算子(2·2)式，其中 G 表 R^N 中某有界闭集．假定 $k(x, y, u)$，$k_u'(x, y, u)$ 以及 $k_{uu}''(x, y, u)$ 都在 $x, y \in G$，$-\infty < u < +\infty$ 连续．这时，$K: C(G) \to C(G)$ 全连续．证明在任何点 $\varphi_0(x) \in C(G)$ 处，二阶 Fréchet 导算子 $K''(\varphi_0)$ 都存在，并且具有下面的表达式：

$$K''(\varphi_0)hk = \int_G k_{uu}''(x, y, \varphi_0(y))h(y)k(y)\mathrm{d}y. \tag{3·63}$$

证 令

$$Qhk = \int_G k_{uu}''(x, y, \varphi_0(y))h(y)k(y)\mathrm{d}y.$$

显然，$Q \in (C(G) \times C(G) \to C(G))$．由例 3.2 的结论知，对任何 $\varphi_0(x) \in C(G)$，$K'(\varphi_0)$ 都存在，并且具有表达式(3·15)．于是有

$$K'(\varphi_0 + h)k - K'(\varphi_0)k$$

$$= \int_G [k_u'(x, y, \varphi_0(y) + h(y))$$
$$- k_u'(x, y, \varphi_0(y))] k(y) \mathrm{d}y$$
$$= \int_G k_{uu}''(x, y, \varphi_0(y) + \theta(y) h(y)) k(y) \mathrm{d}y,$$

其中 $0 < \theta(y) < 1$，从而

$$\| K'(\varphi_0 + h)k - K'(\varphi_0)k - Qhk \|_C \leqslant \| h \|_C \| k \|_C \alpha(h), \tag{3·64}$$

其中 $\alpha(h) = (\max_{x, y \in G, 0 \leqslant \theta \leqslant 1} | k_{uu}''(x, y, \varphi_0(y) + \theta h(y)) - k_{uu}''(x, y, \varphi_0(y)) |) \mathrm{mes} G$. 显然当 $\| h \|_C \to 0$ 时 $\alpha(h) \to 0$，故 $K''(\varphi_0)$ 存在，并且有 $K''(\varphi_0) = Q$. 证完.

在下面三个定理中；l 都表 E_1 中的直线段 $\{x \mid x = x_0 + th, 0 \leqslant t \leqslant 1\}$.

定理 3.7 设 $F: D \to R^1$（D 是 E_1 中开集）是 D 上的泛函，$l \subset D$. 设在 l 上每一点处，$F^{(n+1)}(x)$ 都存在，则存在 $0 < \theta < 1$，使下面的 Tarlor 公式成立：

$$F(x_0 + h) = F(x_0) + F'(x_0)h + \frac{1}{2!} F''(x_0) h^2 + \cdots$$
$$+ \frac{1}{n!} F^{(n)}(x_0) h^n + \frac{1}{(n+1)!} F^{(n+1)}(x_0 + \theta h) h^{n+1}. \tag{3·65}$$

证 考察函数 $\varphi(t) = F(x_0 + th), 0 \leqslant t \leqslant 1$. 易知 $\varphi'(t) = F'(x_0 + th)h, \varphi''(t) = F''(x_0 + th)h^2, \cdots, \varphi^{(n+1)}(t) = F^{(n+1)}(x_0 + th)h^{n+1}, 0 \leqslant t \leqslant 1$. 由数学分析中函数的 Tarlor 公式知，存在 $0 < \theta < 1$，使

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \frac{1}{2!} \varphi''(0) + \cdots + \frac{1}{n!}$$

$$\varphi^{(n)}(0)+\frac{1}{(n+1)!}\varphi^{(n+1)}(0), \tag{3·66}$$

此即(3·65)式．证完．

定理 3.8 设 $A:D\to E_2$(D 是 E_1 中开集)，$l\subset D$．设在 l 上每一点 $A^{(n+1)}(x)$ 都存在，则存在 $0<\theta<1$，使

$$\left\|A(x_0+h)-Ax_0-A'(x_0)h-\cdots-\frac{1}{n!}A^{(n)}(x_0)h^n\right\|$$

$$\leqslant\frac{1}{(n+1)!}\|A^{(n+1)}(x_0+\theta h)h^{n+1}\|. \tag{3·67}$$

证 令

$$z_0=A(x_0+h)-Ax_0-A'(x_0)h-\cdots-\frac{1}{n}A^{(n)}(x_0)h^n.$$

可设 $z_0\neq\theta$(否则，不等式(3·67)显然成立)．由 Hahn－Banach 定理，$\exists f\in E_2^*$，使 $\|f\|=1$ 且 $f(z_0)=\|z_0\|$．考察函数 $\varphi(t)=fA(x_0+th)$，$0\leqslant t\leqslant 1$．易知 $\varphi'(t)=fA'(x_0+th)h$，$\varphi''(t)=fA''(x_0+th)h^2$，$\cdots$，$\varphi^{(n+1)}(t)=fA^{(n+1)}(x_0+th)h^{n+1}$．由 Tarlor 公式知，$\exists 0<\theta<1$ 使(3·66)式成立，即

$$f(z_0)=\frac{1}{(n+1)!}fA^{(n+1)}(x_0+\theta h)h^{n+1}$$

由此知

$$\|z_0\|=f(z_0)\leqslant\frac{1}{(n+1)!}\|f\|\|A^{(n+1)}(x_0+\theta h)h^{n+1}\|$$

$$=\frac{1}{(n+1)!}\|A^{(n+1)}(x_0+\theta h)h^{n+1}\|,$$

此即(3·67)式．证完．

定理 3.9 设 $A:D\to E_2$(D 是 E_1 中开集)，$l\subset D$．设 $A^{(n)}(x)$ 在 l 上存在并且连续，则带积分余项的 Tarlor 公式成立：

$$A(x_0+h)=Ax_0+A'(x_0)h+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}$$
$$A^{(n-1)}(x_0)h^{n-1}+\frac{1}{(n-1)!}\int_0^1(1-t)^{n-1}A^{(n)}(x_0$$
$$+th)h_n\mathrm{d}t. \tag{3·68}$$

证 任给 $f\in E_2^*$，考察函数 $\varphi(t)=fA(x_0+th)$，$0\leqslant t\leqslant 1$，则 $\varphi^{(s)}(t)=fA^{(s)}(x_0+th)h^s(s=1,2,\cdots,n)$，并且由假定知，$\varphi^{(n)}(t)$在 $0\leqslant t\leqslant 1$ 连续．根据函数的带余项的 Tarlor 公式知

$$\varphi(1)=\varphi(0)+\varphi'(0)+\cdots+\frac{1}{(n-1)}\varphi^{(n-1)}(0)$$
$$+\frac{1}{(n-1)!}\int_0^1\varphi^{(n)}(t)(1-t)^{n-1}\mathrm{d}t,$$

即(注意到(3·6)式)

$$fA(x_0+h)=f(Ax_0+A'(x_0)h+\cdots$$
$$+\frac{1}{(n-1)!}A^{(n-1)}(x_0)h^{n-1}$$
$$+\frac{1}{(n+1)!}\int_0^1(1-t)^{n-1}A^n(x_0+th)h^n\mathrm{d}t),$$

由 $f\in E_2^*$ 的任意性，利用 Hahn－Banach 定理，即知(3·68)式成立．证完．

系 在定理 3.9 的条件下，有

$$\left\|A(x_0+h)-Ax_0-A'(x_0)h-\cdots-\frac{1}{n!}A^{(n)}(x_0)h^n\right\|$$
$$\leqslant\frac{1}{(n-1)!}\int_0^1\left\|[A^{(n)}(x_0+th)-A^{(n)}(x_0)]h^n\right\|$$
$$\cdot(1-t)^{n-1}\mathrm{d}t \tag{3·69}$$

以及

$$\left\|A(x_0+h)-Ax_0-A(x_0)h-\cdots-\frac{1}{n!}A^{(n)}(x_0)h^n\right\|$$

$$\leqslant \frac{1}{n!}\left(\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\|A^{(n)}(x_0+th)-A^{(n)}(x_0)\|\right)\cdot\|h\|^n. \quad (3\cdot 70)$$

证 由于$\frac{1}{n!}A^{(n)}(x_0)h^n=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^1(1-t)^{n-1}A^{(n)}(x_0)h^n\mathrm{d}t$,故由(3·68)式得

$$A(x_0+h)-Ax_0-A'(x_0)h-\cdots-\frac{1}{n!}A^{(n)}(x_0)h^n$$

$$=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^1(1-t)^{n-1}[A^{(n)}(x_0+th)-A^{(n)}(x_0)]h^n\mathrm{d}t,$$

由此,利用(3·5)式即得(3·69)式.最后,由(3·69)式直接推出(3·70)式.证完.

注 7 显然,公式(3·65)、(3·67)、(3·68)分别是公式(3·39)、(3·40)、(3·41)的推广.

另外,在公式(3·69)中令 $n=1$,即得常用的公式:

$$\|A(x_0+h)-Ax_0-A'(x_0)h\|$$

$$\leqslant\int_0^1\|[A'(x_0+th)-A'(x_0)h]\|\mathrm{d}t. \quad (3\cdot 71)$$

Fréchet 微分和 Fréchet 导算子的概念是应用上用得最多的微分和导算子概念,因为 Fréchet 微分 $\mathrm{d}[A(x_0)h]=A'(x_0)h$ 定义成算子改变量 $A(x_0+h)-Ax_0$ 的线性主要部分,以后我们将看到,研究非线性算子 A 的某些问题可以转化为研究线性算子 $A'(x_0)$ 的相应的问题,这正反映了非线性泛函分析中的线性化方法.但是,很明显,Fréchet 微分概念对算子的要求是较强的,在讨论算子(特别是泛函)的某些问题时,可将条件减弱,从而得到较弱的微分和导算子的概念,即 Gâteaux 微分和 Gâteaux 导算子概念,这种微分和导算子概念是数学分析中函数的方向导数概念的推广。

定义 3.6 设 $A:D\to E_2$(D 是 E_1 中开集),$x_0\in D$.若对

任何 $h\in E_1$，极限

$$\lim_{t\to 0}\frac{A(x_0+th)-Ax_0}{t} \tag{3·72}$$

都存在(是 E_2 中元素)，则称 A 在点 x_0 处 **Gâteaux 可微**，极限(3·72)叫做 A 在 x_0 处(沿方向 h)的 **Gâteaux 微分**，记为 $D[A(x_0)h]$，即

$$D[A(x_0)h]=\lim_{t\to 0}\frac{A(x_0+th)-Ax_0}{t} \tag{3·73}$$

如果 Gâteaux 微分可以表为 $D[A(x_0)h]=Bh$，这里 $B\in(E_1\to E_2)$，则称 A 在 x_0 处具有**有界线性的** Gâteaux **微分**，B 叫做 A 在点 x_0 处的 **Gâteaux 导算子**，记为 $A'(x_0)$(这里使用与 Fréchet 导算子相同的符号，在证明了定理 3·10 以后，就会知道不会产生混淆)，即

$$D[A(x_0)h]=A'(x_0)h. \tag{3·74}$$

定理 3.10 设 $A:D\to E_2$(D 是 E_1 中开集)，$x_0\in D$. 那末

(ⅰ)若 A 在 x_0 处 Fréchet 可微，则 A 在 x_0 处必具有有界线性的 Gâteaux 微分，并且 $D[A(x_0)h]=\mathrm{d}[A(x_0)h]$，即 A 在 x_0 处的 Gâteaux 导算子和 Fréchet 导算子相等(均以 $A'(x_0)$表之)；

(ⅱ)若 A 在点 x_0 的某邻域内具有有界线性的 Gâteaux 微分，并且 Gâteaux 导算子 $A'(x_0)$在点 $x=x_0$ 处连续，则 A 在点 x_0 处 Fréchet 可微.

证 (ⅰ)由假定有

$$A(x_0+h)-Ax_0-A'(x_0)h=\omega(x_0,h),$$

其中 $A'(x_0)$表 Fréchet 导算子，$\omega(x_0,h)$满足(3·11)式. 于是

$$A(x_0+th)-Ax_0-A'(x_0)th=\omega(x_0,th),$$

即 $$\frac{A(x_0+th)-Ax_0}{t}-A'(x_0)h=\frac{\omega(x_0,th)}{t},$$

而 $$\lim_{t\to0}\left\|\frac{\omega(x_0,th)}{t}\right\|=\lim_{t\to0}\frac{\|\omega(x_0,th)\|}{\|th\|}\cdot\|h\|=0,$$

故 $$\lim_{t\to0}\frac{A(x_0+th)-Ax_0}{t}=A'(x_0)\cdot h,$$

因此，A 在 x_0 处具有有界线性的 Gâteaux 微分，且

$$D[A(x_0)h]=A'(x_0)h=\mathrm{d}[A(x_0)h].$$

(ⅱ) $\forall\varepsilon>0$，由假定 $\exists\delta>0$，使当 $\|h\|<\delta$ 量，恒有

$$\|A'(x_0+h)-A'(x_0)\|<\varepsilon, \tag{3·75}$$

其中 $A'(x_0+h)$，$A'(x_0)$ 均表 Gâteaux 导算子．证明当 $0<\|h\|<\delta$ 时，恒有

$$\|A(x_0+h)-Ax_0-A'(x_0)h\|\leqslant\varepsilon\|h\|. \tag{3·76}$$

现给定 h，满足 $0<\|h\|<\delta$．不失一般性，可设 $A(x_0+h)-Ax_0-A'(x_0)h\neq\theta$（否则(3·76)式自然成立）．由 Hahn－Banach 定理，存在 $f\in E_2^*$，使 $\|f\|=1$，且

$$\begin{aligned}&f[A(x_0+h)-Ax_0-A'(x_0)h]\\&=\|A(x_0+h)-Ax_0-A'(x_0)h\|.\end{aligned} \tag{3·77}$$

考察函数 $\varphi(t)=f(A(x_0+th))$，$0\leqslant t\leqslant1$．易知 $\varphi'(t)=f(A'(x_0+th)h)$，其中 $A'(x_0+th)$ 表 Gâteaux 导算子．于是由中值公式可知：存在 $0<\theta<1$，使 $\varphi(1)-\varphi(0)=\varphi'(\theta)$，即

$$f[A(x_0+h)-Ax_0]=fA'(x_0+\theta h)h. \tag{3·78}$$

由(3·77)式，(3·78)式及(3·75)式（注意 $\|\theta h\|<\delta$），得

$$\begin{aligned}&\|A(x_0+h)-Ax_0-A'(x_0)h\|\\&=f[A(x_0+h)-Ax_0-A'(x_0)h]\\&=f[A'(x_0+\theta h)-A'(x_0)]h\\&\leqslant\|f\|\cdot\|A'(x_0+\theta h)-A'(x_0)\|\cdot\|h\|\end{aligned}$$

$$= \| A'(x_0+\theta h) - A'(x_0) \| \| h \|$$
$$< \varepsilon \| h \|,$$

即知(3·76)式成立．故 A 在 x_0 处 Fréchet 可微，并且 $\mathrm{d}[A(x_0)h] = A'(x_0)h$，证完．

注意，若 A 在点 x_0 处具有有界线性的 Gâteaux 微分，则一般推不出 A 在 x_0 点处 Fréchet 可微．下面举两个例子(参看〔27〕,〔7〕)．

例 3.7 考察 R^2 上的泛函 $f: R^2 \to R^1$ 如下

$$f(x) = \begin{cases} x_1 + x_2 + \dfrac{x_1^3 x_2}{x_1^4 + x_2^2}, & \text{当 } x = (x_1, x_2) \neq (0,0) \text{ 时}; \\ 0, & \text{当 } x = (x_1, x_2) = (0,0) \text{ 时}. \end{cases} \tag{3·79}$$

因为 $\left| \dfrac{x_1^3 x_2}{x_1^4 + x_2^2} \right| \leqslant \dfrac{1}{2} |x_1|$，故 f 在点(0,0)处也是连续的，用 θ 表示零点(0,0)，$h = (h_1, h_2)$ 则有

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(\theta + th) - f(\theta)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{th_1 + th_2 + \dfrac{t^4 h_1^3 h_2}{t^4 h_1^4 + t^2 h^2}}{t} = h_1 + h_2,$$

故 f 在零点 θ 处 Gâteaux 可微，并且具有有界线性的 Gâteaux 微分：

$$D[f(\theta)h] = f'(\theta)h = h_1 + h_2, \tag{3·80}$$

其中 $f'(\theta)$ 表 Gâteaux 导算子．下证 f 在 θ 处不 Fréchet 可微．因为如果 f 在 θ 处 Fréchet 可微，则由定理 3.10 知

$$\mathrm{d}[f(\theta)h] = D[f(\theta)h] = f'(\theta)h = h_1 + h_2. \tag{3·81}$$

于是

$$\omega(\theta, h) = f(\theta + h) - f(\theta) - f'(\theta)h = \frac{h_1^3 h_2}{h_1^4 + h_2^2},$$

故
$$\frac{\omega(\theta, h)}{\|h\|}=\frac{h_1^3 h_2}{(h_1^4+h_2^2)\sqrt{h_1^2+h_2^2}}.$$
现在让 $h_2=h_1^2$,并令 $h_1\to+0$,得
$$\lim_{\|h\|\to 0}\frac{\omega(\theta, h)}{\|h\|}=\lim_{h_1\to 0}\frac{h_1^5}{2h_1^4\sqrt{h_1^2+h_1^4}}=\frac{1}{2},$$
此与 $\omega(\theta, h)=o(\|h\|)$矛盾.

例3.8 处处具有有界线性的 Gâteaux 微分,但处处不 Fréchet 可微的例子如下:

考察 Немыцкий 算子
$$\mathbf{f}\varphi(x)=f(x, \varphi(x)), \tag{3·82}$$
其中 $f(x, u)(x\in G, -\infty<u<+\infty)$满足 Caratheodory 条件,$G$ 表 R^N 中某可测集,$0<\mathrm{mes}G\leqslant+\infty$;设
$$|f(x, u)|\leqslant a(x)+b|u| \quad (x\in G,\ -\infty<u<+\infty), \tag{3·83}$$
其中 $b>0$, $a(x)\in L_2(G)$. 于是由定理 1.1, 1.2, 1.3 知 f: $L_2(G)\to L_2(G)$连续有界. 又设 $f_u'(x, u)$存在,也满足 Caratheodory 条件,并且存在常数 M,使
$$|f_u'(x, u)|\leqslant M \quad (x\in G,\ -\infty<u<+\infty) \tag{3·84}$$
我们证明,算子 $\mathbf{f}$ 在 $L_2(G)$中任何点 $\varphi_0(x)$处都具有有界线性的 Gâteaux 微分,并且
$$D[\mathbf{f}(\varphi_0)h]=f_u'(x, \varphi_0(x))h(x). \tag{3·85}$$
事实上,对任何 $h(x)\in L_2(G)$,有
$$\begin{aligned}&\frac{1}{t}[\mathbf{f}(\varphi_0(x)+th(x))-\mathbf{f}\varphi_0(x)]\\&=\frac{1}{t}[f(x, \varphi_0(x)+th(x))-f(x, \varphi_0(x))]\\&=f_u'(x, \varphi_0(x)+\theta(x)th(x))h(x),\end{aligned} \tag{3·86}$$

其中 $0<\theta(x)<1$. 由于对 p.p. $x\in G$, $f_u'(x,u)$关于 u 连续，故由(3·86)知

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[\mathbf{f}(\varphi_0+th(x))-\mathbf{f}\varphi_0(x)]$$

$$=f_u'(x,\varphi_0(x))h(x),\qquad \text{p.p.}\qquad (3\cdot 87)$$

又由(3·84)式与(3·86)式知

$$\Big|\frac{1}{t}[\mathbf{f}(\varphi_0(x)+th(x))-\mathbf{f}\varphi_0(x)]$$

$$-f_u'(x,\varphi_0(x))h(x)\Big|\leqslant 2M\big|h(x)\big|.\qquad (3\cdot 88)$$

由(3·87)式及(3·88)式，利用 Lebesgue 控制收敛定理得

$$\lim_{t\to 0}\int_G\Big|\frac{1}{t}[\mathbf{f}(\varphi_0(x)+th(x))-\mathbf{f}\varphi_0(x)]$$

$$-f_u'(x,\varphi_0(x))h(x)\Big|^2\mathrm{d}x=0,$$

故 $\mathbf{f}$ 在 $\varphi_0(x)$ 处 Gâteaux 可微且(3·85)式成立，显然算子 $Bh(x)=f_u'(x,\varphi_0(x))h(x)$映 $L_2(G)$入 $L_2(G)$线性有界(注意(3·84)式)，故 $\mathbf{f}$ 在 φ_0 具有有界线性的 Gâteaux 微分．

如果 $f(x,u)$不是 u 的一次函数，那末 $\mathbf{f}$ 在 $L_2(G)$中任何点 $\varphi_0(x)$都不是 Fréchet 可微的．事实上，若 $\mathbf{f}$ 在 $\varphi_0(x)\in L_2(G)$是 Fréchet 可微的，则由(3·85)式知

$$f(x,\varphi_0(x)+h(x))-f(x,\varphi_0(x))$$

$$-f_u'(x,\varphi_0(x))h(x)=\omega(\varphi_0(x),h(x)),$$

其中 $\omega(\varphi_0(x),h(x))$，满足

$$\lim_{\|h\|_{L_2}\to 0}\frac{\|\omega(\varphi_0,h)\|_{L_2}}{\|h\|_{L_2}}=0.\qquad (3\cdot 89)$$

对任何 $h(x)\in L_2(G)$，都有

$$\omega(\varphi_0(x),h(x))=0,\quad \text{p.p.}\qquad (3\cdot 90)$$

事实上,若有 $h_0(x)\in L_2(G)$ 存在,使在 G 中某正测度集上有 $\omega(\varphi_0(x),h_0(x))\neq 0$,则显然 $\exists\, G_0\subset G$, $\mathrm{mes}G_0>0$, 以及 $\alpha>0$, $\beta>0$, 使当 $x\in G_0$ 时, 恒有 $|\omega(\varphi_0(x),h_0(x))|\geqslant\alpha$, $|h_0(x)|\leqslant\beta$. 设 x_0 是 G_0 的一个全密点,于是 $\mathrm{mex}F_k>0(k=1,2,\cdots)$,这里 $F_k=G_0\cap V_k$, $V_k=\{x\,|\,|x-x_0|<\frac{1}{k}\}$. 作函数

$$h_k(x)=\begin{cases}h_0(x), & \text{当 } x\in F_k \text{ 时};\\ 0, & \text{当 } x\in G\setminus F_k \text{ 时},\end{cases}\qquad (k=1,2,\cdots).$$

显然 $h_k\in L_2(G)$ 并且 $\|h_k\|_{L_2}=\left(\int_{F_k}|h_0(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$
$\leqslant\beta(\mathrm{mes}F_k)^{\frac{1}{2}}$;
由于 $\mathrm{mes}F_k\to 0$, 故 $\|h_k\|_{L_2}\to 0(k\to\infty)$. 又

$$\|\omega(\varphi_0,h_k)\|_{L_2}=\left(\int_{F_k}|\omega(\varphi_0(x),h_0(x))|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\geqslant\alpha(\mathrm{mes}F_k)^{\frac{1}{2}},$$

故

$$\frac{\|\omega(\varphi_0,h_k)\|}{\|h_k\|_{L_2}}\geqslant\frac{\alpha}{\beta}\quad(k=1,2,\cdots),$$

此显然与(3·89)式矛盾 . 因此,对任何 $h(x)\in L_2(G)$,(3·90)式都成立,即

$$f(x,\varphi_0(x)+h(x))=f(x,\varphi_0(x))$$
$$+f_u{}'(x,\varphi_0(x))h(x),\quad \text{p.p.}\tag{3·91}$$

现将 G 表为 $G=\bigcup_{i=1}^{\infty}G_i$,其中 $G_1\subset G_2\subset G_3\subset\cdots$, $\mathrm{mes}G_i<+\infty$ $(i=1,2,\cdots)$. 对于任何 u, $-\infty<u<+\infty$, 在(3·91)式中取 $h(x)=g_i(x)$,其中

$$g_i(x)=\begin{cases}u-\varphi_0(x), \text{当} \in G_i \text{ 时},\\ 0, \quad \text{当 } x\in G\setminus G_i \text{ 时},\end{cases} \quad (i=1,2,\cdots)$$

(显然 $g_i(x)\in L_2(G)$)，则

$$f(x,u)=a_1(x)+b_1(x)u, \quad p.p. \text{ 于 } G_i, \quad (3\cdot 92)$$

其中 $a_1(x)=f(x,\varphi_0(x))-f_u'(x,\varphi_0(x))\varphi_0(x)\in L_2(G)$，$b_1(x)=f_u'(x,\varphi_0(x))$，$|b_1(x)|\leqslant M$. 由于(3·92)式对 $i=1,2,\cdots$ 都成立，故

$$f(x,u)=a_1(x)+b_1(x)u, \quad p.p. \text{ 于 } G.$$

即 $f(x,u)$是 u 的一次函数．

从定理 3.4 的证明过程中不难看出，若将 Fréchet 可微减弱成 Gâteaux 可微，则定理 3.4 仍类似地成立，即有

定理 3.11 用 l 表示直线段 $\{x \mid x=x_0+th, 0\leqslant t\leqslant 1\}$ $(x_0,h\in E_1)$.

(ⅰ)若泛函 $f:D\to R^1(l\subset D)$在 l 上 Gâteaux 可微，则存在 $0<\tau<1$，使中值公式成立：

$$f(x_0+h)-f(x_0)=D[f(x_0+\tau h)h]; \quad (3\cdot 93)$$

(ⅱ)若算子 $A:D\to E_2(l\subset D)$在 l 上 Gâteaux 可微，则存在 $0<\tau<1$，使

$$\|A(x_0+h)-Ax_0\|\leqslant\|D[A(x_0+\tau h)h]\|; \quad (3\cdot 94)$$

(ⅲ)若算子 $A:D\to E_2(l\subset D)$在 l 上 Gâteaux 可微，且 $D[A(x_0+th)h]$关于 t 连续$(0\leqslant t\leqslant 1)$，则

$$A(x_0+h)-Ax_0=\int_0^1 D[A(x_0+th)h]\mathrm{d}t. \quad (3\cdot 95)$$

关于 Banach 空间中微分学的详细讨论，可参看〔27〕.

§4　隐函数定理

本节把数学分析中的隐函数定理推广到算子方程，作为特例，还得出了反函数定理．

设 E_1, E_2, E_3 是 Banach 空间．Ω 是乘积空间 $E_1 \times E_2$ 中某开集．设 $F: \Omega \to E_3$. 考察方程

$$F(x, y) = 0. \tag{4·1}$$

设 $(x_0, y_0) \in \Omega$，使

$$F(x_0, y_0) = 0. \tag{4·2}$$

在什么条件下，在初值 (x_0, y_0) 附近，由方程(4·1)可惟一确定 y 为 x 的算子 $y = f(x)$？亦即在什么条件下，当 y 在 y_0 近旁时，方程(4·1)在 x_0 附近具有惟一的解？同时还要研究解算子 $f(x)$ 的性质．

定理 4.1(隐函数定理)　设在点 (x_0, y_0) 的某邻域内 $F(x, y)$ 连续，且它对 y 的偏导算子(Fréchet 导算子) $F_y'(x, y)$ 存在，并且 $F_y'(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 连续．又设 $F_y'(x_0, y_0): E_2 \to E_3$ 具有有界逆(即 $F_y'(x_0, y_0)$ 是 E_2 与 E_3 间的同胚映射)．则 $\exists r > 0, \tau > 0$，使当 $\|x - x_0\| < r$ 时，方程(4.1)在 $\|y - y_0\| < \tau$ 内具有惟一解 $y = f(x)$；并且 $y_0 = f(x_0)$，$f(x)$ 在球 $\|x - x_0\| < r$ 内连续．

证　由假定知，$\exists \delta > 0, \tau > 0$，使当 $\|x - x_0\| \leqslant \delta$，$\|y - y_0\| \leqslant \tau$ 时，$F(x, y)$ 连续，且有

$$\|F_y'(x, y) - F_y'(x_0, y_0)\| < \frac{1}{2M}, \tag{4·3}$$

其中 $M = \|[F_y'(x_0, y_0)]^{-1}\|$. 又由 $F(x, y_0)$ 的连续性知，$\exists 0$

$<r\leqslant\delta$，使当$\|x-x_0\|<r$时，恒有

$$\|F(x,y_0)\|=\|F(x,y_0)-F(x_0,y_0)\|<\frac{\tau}{2M}. \tag{4·4}$$

设x满足$\|x-x_0\|<r$，并把x固定，令

$$\Phi(x,y)=y-[F_y'(x_0,y_0)]^{-1}F(x,y).$$

显然，方程(4·1)的解y等价于Φ在E_2中的不动点．因此，只需证明Φ在球$\|y-y_0\|<\tau$中具有惟一不动点．

由(4·3)式知，当$\|y-y_0\|\leqslant\tau$时，有

$$\begin{aligned}&\|\Phi_y'(x,y)\|=\|I-[F_y'(x_0,y_0)]^{-1}F_y'(x,y)\|\\ \leqslant&\|[F_y'(x_0,y_0)]^{-1}\|\cdot\|F_y'(x_0,y_0)-F_y'(x,y)\|\\ <&M\cdot\frac{1}{2M}=\frac{1}{2}.\end{aligned} \tag{4·5}$$

于是，利用定理3.4(ii)知，当$\|y_1-y_0\|\leqslant\tau$，$\|y_2-y_0\|\leqslant\tau$时，恒有

$$\begin{aligned}&\|\Phi(x,y_2)-\Phi(x,y_1)\|\\ \leqslant&\|\Phi_y'(x,y_1+\theta(y_2-y_1))(y_2-y_1)\|\\ \leqslant&\|\Phi_y'(x,y_1+\theta(y_2-y_1))\|\\ &\cdot\|y_2-y_1\|\leqslant\frac{1}{2}\|y_2-y_1\|,\end{aligned} \tag{4·6}$$

其中$0<\theta<1$，故Φ是压缩的．又当$\|y-y_0\|\leqslant\tau$时有(注意到(4·6)式与(4·4)式)

$$\begin{aligned}&\|\Phi(x,y)-y_0\|\\ \leqslant&\|\Phi(x,y)-\Phi(x,y_0)\|+\|\Phi(x,y_0)-y_0\|\\ =&\|\Phi(x,y)-\Phi(x,y_0)\|+\|[F_y'(x_0,y_0)]^{-1}F(x,y_0)\|\\ <&\frac{1}{2}\|y-y_0\|+M\cdot\frac{\tau}{2M}\leqslant\tau,\end{aligned}$$

故Φ将闭球$\|y-y_0\|\leqslant\tau$映入$\|y-y_0\|<\tau$开球；于是根据压

缩映象原理可知，Φ 在 $\|y-y_0\|\leqslant\tau$ 中具有惟一不动点 $y=f(x)$，并且此不动点属于开球 $\|y-y_0\|<\tau$.

最后证明 $f(x)$ 在 $\|x-x_0\|<r$ 中连续(至于 $y_0=f(x_0)$ 是显然的). 设 $\|x_1-x_0\|<r$, $\|x_2-x_0\|<r$, 令 $y_1=f(x_1)$, $y_2=f(x_2)$, 则由(4·6)式知

$$\begin{aligned}\|y_1-y_2\|&=\|\Phi(x_2,y_2)-\Phi(x_1,y_1)\|\\&\leqslant\|\Phi(x_2,y_2)-\Phi(x_2,y_1)\|+\|\Phi(x_2,y_1)-\Phi(x_1,y_1)\|\\&\leqslant\frac{1}{2}\|y_2-y_1\|+\|[F_y'(x_0,y_0)]^{-1}[F(x_1,y_1)-F(x_2,y_1)]\|,\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}\|f(x_2)-f(x_1)\|&=\|y_2-y_1\|\\&\leqslant 2M\|F(x_1,y_1)-F(x_2,y_1)\|,\end{aligned}\tag{4·7}$$

由此根据 $F(x,y)$ 的连续性，即知当 $x_2\to x_1$ 时(x_1 固定)，有 $f(x_2)\to f(x_1)$. 证完.

系 在定理 4.1 的条件下，若更设在 (x_0,y_0) 的某邻域中 Fréchet 偏导算子 $F_x'(x,y)$ 与 $F_y'(x,y)$ 都存在并且连续，那末可取 $r>0$, $\tau>0$，使定理 4.1 结论中的惟一解 $y=f(x)$ 在 $\|x-x_0\|<r$ 中具有连续的 Fréchet 导算子 $f'(x)$，并且

$$f'(x)=-[F_y'(x,f(x))]^{-1}F_x'(x,f(x)),\quad \forall\|x-x_0\|<r.\tag{4·8}$$

证 令 $G(x,y)=[F_y'(x_0,y_0)]^{-1}F(x,y)$，则 $G_y'(x,y)=[F_y'(x_0,y_0)]^{-1}\cdot F_y'(x,y)\in(E_2\to E_2)$, $G_y'(x_0,y_0)=I$ 具有有界逆，且由假定知 $G_y'(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的某邻域中连续. 于是根据 Banach 代数的性质(例如，参见〔2〕224 页的定理 3)知在 (x_0,y_0) 的某邻域中，$G_y'(x,y)$ 也具有有界逆，并且 $[G_y'(x,y)]^{-1}$ 是连续的，从而 $F_y'(x,y)=F_y'(x_0,y_0)G_y'(x,y)$ 也具

有有界逆，且$[F_y'(x,y)]^{-1}=[G_y'(x,y)]^{-1}\cdot[F_y'(x_0,y_0)]^{-1}$也是连续的．因此可以认为定理4.1证明过程中所选取的$r>0,\tau>0$还满足：当$\|x-x_0\|<r$，$\|y-y_0\|<\tau$时，$F_x'(x,y)$，$F_y'(x,y)$，$[F_y'(x,y)]^{-1}$都存在连续，并且

$$\|F_x'(x,y)\|\leqslant M_1,\quad \|[F_y'(x,y)]^{-1}\|\leqslant M_1, \tag{4·9}$$

其中M_1是某常数．设$\|x_1-x_0\|<r$，$\|x_2-x_0\|<r$，令$y_1=f(x_1)$，$y_2=f(x_2)$．于是由(4·9)式知

$$\begin{aligned}
&\|f(x_2)-f(x_1)+[F_y'(x_1,y_1)]^{-1}F_x'(x_1,y_1)(x_2-x_1)\|\\
&\leqslant\|[F_y'(x_1,y_1)]^{-1}\|\\
&\quad\cdot\|F_y'(x_1,y_1)(y_2-y_1)+F_x'(x_1,y_1)(x_2-x_1)\|\\
&\leqslant M_1\|F_x'(x_1,y_1)(x_2-x_1)+F_y'(x_1,y_1)(y_2-y_1)\|.
\end{aligned}\tag{4·10}$$

取$\psi\in E_3^*$，$\|\psi\|=1$，使

$$\begin{aligned}
&\psi[F_x'(x_1,y_1)(x_2-x_1)+F_y'(x_1,y_1)(y_2-y_1)]\\
&=\|F_x'(x_1,y_1)(x_2-x_1)+F_y'(x_1,y_1)(y_2-y_1)\|
\end{aligned}$$

（当$F_x'(x_1,y_1)(x_2-x_1)+F_y'(x_1,y_1)(y_2-y_1)=\theta$时取$\psi=\theta$）．

考察函数

$$\varphi(t)=\psi F(x_1+t(x_2-x_1),y_1+t(y_2-y_1))$$
$$0\leqslant t\leqslant 1.$$

易知

$$\begin{aligned}
\varphi'(t)=\psi[&F_x'(x_1+t(x_2-x_1),y_1+t(y_2-y_1))(x_2-x_1)\\
&+F_y'(x_1+t(x_2-x_1),y_1+t(y_2-y_1))(y_2-y_1)];
\end{aligned}$$

故$\varphi'(t)$在$0\leqslant t\leqslant 1$连续，从而存在$0<\theta<1$，使$\varphi(1)-\varphi(0)=\varphi'(\theta)$．但$F(x_1,y_1)=F(x_2,y_2)=0$，故若令

$$x_\theta=x_1+\theta(x_2-x_1),\ y_\theta=y_1+\theta(y_2-y_1),$$

可得

$$\psi[F_x'(x_\theta, y_\theta)(x_2-x_1)+F_y'(x_\theta, y_\theta)(y_2-y_1)]=0,$$

从而

$$\begin{aligned}
&\|F_x'(x_1, y_1)(x_2-x_1)+F_y'(x_1, y_1)(y_2-y_1)\| \\
&=\psi\{[F_x'(x_1, y_1)-F_x'(x_\theta, y_\theta)](x_2-x_1) \\
&\quad+[F_y'(x_1, y_1)-F_y'(x_\theta, y_\theta)](y_2-y_1)\} \\
&\leqslant\|\psi\|\,\|[F_x'(x_1, y_1)-F_x'(x_\theta, y_\theta)](x_2-x_1) \\
&\quad+[F_y'(x_1, y_1)-F_y'(x_\theta, y_\theta)](y_2-y_1)\| \\
&\leqslant\|F_x'(x_1, y_1)-F_x'(x_\theta, y_\theta)\|\cdot\|x_2-x_1\| \\
&\quad+\|F_y'(x_1, y_1)-F_y'(x_\theta, y_\theta)\|\cdot\|y_2-y_1\|. \qquad (4\cdot11)
\end{aligned}$$

由(4·7)式利用定理3.4(ⅱ)及(4·9)式,可得

$$\begin{aligned}
&\|y_2-y_1\| \\
&\leqslant 2M\|F_x'(x_2+\theta_1(x_1-x_2), y_1)(x_1-x_2)\| \\
&\leqslant 2MM_1\|x_2-x_1\|, \qquad (4\cdot12)
\end{aligned}$$

于是由(4·10)、(4·11)、(4·12)诸式得

$$\begin{aligned}
&\|f(x_2)-f(x_1)+[F_y'(x_1, y_1)]^{-1}F_x'(x_1, y_1)(x_2-x_1)\| \\
&\leqslant\Big(M_1\|F_x'(x_1, y_1)-F_x'(x_\theta, y_\theta)\| \\
&\quad+2MM_1^2\|F_y'(x_1, y_1)-F_y'(x_\theta, y_\theta)\|\Big)\cdot\|x_2-x_1\|,
\end{aligned}$$

由此并注意到当 $x_2\to x_1$ 时 $y_2\to y_1$,从而

$$\|F_x'(x_1, y_1)-F_x'(x_\theta, y_\theta)\|\to0,$$

$$\|F_y'(x_1, y_1)-F_y'(x_\theta, y_\theta)\|\to0,$$

即知 $f(x)$在点 $x=x_1$ 处 Fréchet 可微,并且

$$\begin{aligned}
f'(x_1)&=-[F_y'(x_1, y_1)]^{-1}F_x'(x_1, y_1) \\
&=-[F_y'(x_1, f(x_1))]^{-1}F_x'(x_1, f(x_1)).
\end{aligned}$$

由于 x_1 的任意性,即知 $f(x)$在 $\|x-x_0\|<r$ 中每一点都

Fréchet 可微，并且 $f'(x)$具有表达式(4·8)．

最后，由(4·8)式，根据 $f(x)$，$F_x'(x,y)$，$[F_y'(x,y)]^{-1}$的连续性，即知 $f'(x)$在球$\|x-x_0\|<r$ 内连续．证完．

注 1 若 $E_1=R^n$，$E_2=R^m$，$E_3=R^m$，$x=(x_1,\cdots,x_n)$，$y=(y_1,\cdots,y_m)$，$F(x,y)=(F_1,F_2,\cdots,F_m)$．则方程(4·1)相当于函数方程组

$$F_i(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_m)=0 \quad (i=1,2,\cdots,m) \tag{4·13}$$

初始条件(4·2)相当于

$$F_i(x_1^{(0)},\cdots,x_n^{(0)},y_1^{(0)},\cdots,y_m^{(0)})=0 \quad (i=1,2,\cdots,m) \tag{4·14}$$

这里 $x_0=(x_1^{(0)},\cdots,x_n^{(0)})$，$y_0=(y_1^{(0)},\cdots,y_m^{(0)})$．由例 3.1 知 Fréchet 偏导算子 $F_y'(x_0,y_0)$由下式表达：$z=F_y'(x_0,y_0)h$ 相当于线性变换(从 $h=(h_1,\cdots,h_m)$到 $z=(z_1,\cdots,z_m)$)

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \left.\dfrac{\partial F_1}{\partial y_1}\right|_{(x_0,y_0)} & \cdots & \left.\dfrac{\partial F_1}{\partial y_m}\right|_{(x_0,y_0)} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \left.\dfrac{\partial F_m}{\partial y_1}\right|_{(x_0,y_0)} & \cdots & \left.\dfrac{\partial F_m}{\partial y_m}\right|_{(x_0,y_0)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_m \end{pmatrix},$$

因此，$F_y'(x_0,y_0)$具有有界逆相当于在点$(x_1^{(0)},\cdots,x_n^{(0)},y_1^{(0)},\cdots,y_m^{(0)})$的函数行列式

$$\frac{D(F_1,\cdots,F_m)}{D(y_1,\cdots,y_m)}=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial F_m}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{vmatrix}$$

不等于零．由此，显然这时的定理 4.1 及其系就是数学分析中的隐函数定理．因此，定理 4.1 及其系是数学分析中隐函数定理对一般 Banach 空间算子方程的推广．

作为隐函数定理的特例，是下面的反函数定理．

定理 4.2(反函数定理)设 $x_0 \in D$，D 是 E_1 中某开集．$f: D \to E_2$ Fréchet 可微，$f'(x)$在点 x_0 处连续且 $f'(x_0)$具有有界逆(即 $f'(x_0)$是 E_1 与 E_2 间的同胚映象)，则 $f(x)$在点 x_0 处局部同胚(即存在 x_0 的邻域 $U(x_0)$及 $y_0 = f(x_0)$的邻域 $V(y_0)$，使 $f(x)$在 $U(x_0)$上的限制是 $U(x_0)$到 $V(y_0)$的同胚映象)．

证 令 $F(x, y) = f(x) - y$，则 $F: D \times E_2 \to E_2$ 连续，并且 $F_x'(x, y) = f'(x)$，$F_y'(x, y) = -I$，$\forall (x, y) \in D \times E_2$．由假定可知 $F_x'(x_0, y_0) = f'(x_0)$具有有界逆．于是根据定理 4.1 可知，$\exists r > 0$，$\tau > 0$，使当$\|y - y_0\| < r$ 时，方程 $F(x, y) = 0$(即方程 $f(x) = y$)在$\|x - x_0\| < \tau$ 中具有惟一的解 $x = \varphi(y)$，并且 $\varphi(y)$在$\|y - y_0\| < r$ 内连续．用 $V(y_0)$表球$\|y - y_0\| < r$，$T(x_0)$表球$\|x - x_0\| < \tau$，令 $U(x_0) = \varphi(V(y_0))$．显然 $U(x_0) = f^{-1}(V(y_0)) \cap T(x_0)$．由于 f 是 Fréchet 可微的，故连续，从而开集 $V(y_0)$的逆映象 $f^{-1}(V(y_0))$是 D 中开集，即 E_1 中开集，从而 $U(x_0)$是 E_1 中开集，即 x_0 的一个邻域．显然 f 在 $U(x_0)$上的限制使 $U(x_0)$与 $V(y_0)$一一对应，并且 f 在 $U(x_0)$上连续，$f^{-1} = \varphi$ 在 $V(y_0)$上连续，即 f 是 $U(x_0)$与 $V(y_0)$间的同胚映象．证完．

系 在定理 4.2 的条件下，若更设 $f'(x)$在 D 中连续，那末 $f(x)$在点 x_0 处局部微分同胚(即存在 x_0 的邻域 $U(x_0)$及 y_0 的邻域 $V(y_0)$，使 f 在 $U(x_0)$上的限制是 $U(x_0)$与 $V(y_0)$

间的同胚映象，并且 f 在 $U(x_0)$具有连续的 Fréchet 导算子，f^{-1}在 $V(y_0)$上也具有连续的 Fréchet 导算子）.

证 由定理 4.1 的系知，定理 4.2 证明过程中的算子 $f^{-1}=\varphi$ 在 $V(y_0)$中具有连续的 Fréchet 导算子．证完．

注 2 定理4.2及其系是说明在 y_0 附近反函数 f^{-1}的存在连续和连续 Fréchet 可微的，所以称为反函数定理；由于结论是局部同胚和局部微分同胚，所以亦称同胚定理．

例 4.1 考察非线性积分方程

$$\varphi(x)=\lambda\int_G K(x,y,\varphi(y))\mathrm{d}y, \tag{4·15}$$

其中 G 表 R^N 中某有界闭集，$K(x,y,u)$，$K_u'(x,y,u)$都在 $(x,y)\in\hat{G}=G\times G$，$-r<u<r$ 上连续，r 表某正数；又 λ 是参数．设 $K(x,y,0)\equiv0$，$\forall(x,y)\in\hat{G}$．于是，显然对任何 λ，$\varphi(x)\equiv0$ 都是(4·15)的解．下面证明：若 $\lambda_0\neq0$ 不是线性积分方程

$$\varphi(x)=\lambda\int_G K_u'(x,y,0)\varphi(y)\mathrm{d}y \tag{4·16}$$

的特征值，那末必有 $\delta>0$，$\tau>0(\tau<r)$存在，使当 $|\lambda-\lambda_0|<\delta$ 时，方程(4·15)除零解($\varphi(x)\equiv0$)外没有满足 $|\varphi(x)|<\tau(\forall x\in G)$的其他连续解．

证 考察算子

$$A\varphi(x)=\int_G K(x,\varphi(y))\mathrm{d}y. \tag{4·17}$$

取 $0<s<r$，用 D 表 $C(G)$中的球$\{\varphi\mid\|\varphi\|_C<s\}$．由定理 2.2 的证明过程和例 3.2 知 $A:D\to C(G)$全连续，在 D 中每一点 φ_0 处 Fréchet 可微，并且

$$A'(\varphi_0)h = \int_G K_u'(x, y, \varphi_0(y))h(y)\mathrm{d}y. \qquad (4\cdot18)$$

由 $K_u'(x, y, u)$在$(x, y)\in \bar{G}$, $-s\leqslant u\leqslant s$ 上的一致连续性, 易知. 当$\|\varphi - \varphi_0\|_C\to 0$ 时($\varphi_0\in D$), 必有$\|A'(\varphi) - A'(\varphi_0)\|\to 0$, 即 $A'(\varphi)$在 D 内连续. 令 $F(\lambda, \varphi) = \varphi - \lambda A\varphi$, 显然方程(4·15)的解相当于方程

$$F(\lambda, \varphi) = 0 \qquad (4\cdot19)$$

的解. 很明显, $F: R_1\times D\to C(G)$连续, Fréchet 可微(关于 φ)且 $F_\varphi'(\lambda, \varphi) = I - \lambda A'(\varphi)$连续. 由假定, λ_0 不是线性积分方程(4·16)的特征值, 故 $F_\varphi'(\lambda_0, \theta) = I - \lambda_0 A'(\theta)$(映 $C(G)$入 $C(G)$)具有有界逆$[F_\varphi'(\lambda_0, \theta)]^{-1} = [I - \lambda_0 A'(\theta)]^{-1}$. 于是根据隐函数定理 4.1, 存在 $\delta>0$, $\tau>0$($\tau<s$), 使当$|\lambda - \lambda_0|<\delta$ 时, 方程(4·19)在$\|\varphi\|_C<\tau$ 内具有惟一解. 但已知 $\varphi = \theta$ 恒是解, 故此惟一解就是零解 $\varphi = \theta$. 证完.

例 4.2 考察方程组

$$y_i = f_i(x_1, \cdots, x_n) \quad (i = 1, 2, \cdots n), \qquad (4\cdot20)$$

其中各 n 元函数f_i 在点$x_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)})$的某邻域内具有连续的一阶偏导数. 将方程组(4·20)写成算子形式为 $y = f(x)$, $y = (y_1, \cdots, y_n)$, $x = (x_1, \cdots, x_n)$, $f = (f_1, \cdots, f_n)$. 若在点 $x_0 = (x_1^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)})$的 Jacobi 行列式

$$\frac{D(f_1, \cdots, f_n)}{D(x_1, \cdots, x_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdots \ \cdots \ \cdots \\ \cdots \ \cdots \ \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} \neq 0,$$

则 $f(x)$ 在点 x_0 处局部微分同胚．

事实上，由例 3.1 知，f 在 x_0 的某邻域中 Fréchet 可微，并且 $z=f'(x)h$ 相当于

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}. \tag{4·21}$$

由假定，诸偏导数 $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ 在 x_0 的某邻域中连续，由此易知 $f'(x)$ 在 x_0 的某邻域中连续又由假定，在 x_0 处的 Jacobi 行列式不为零，故线性变换(4·21)具有逆变换，即 $f'(x_0): R^n \to R^n$ 具有有界逆 $[f'(x_0)]^{-1}$．于是根据定理 4.2 的系知，$f(x)$ 在点 x_0 处局部微分同胚．证完．

最后指出，在定理 4.1 中，若假定 $F(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 的某邻域内具有直到 m 阶的连续的各阶 Fréchet 偏导算子，那末可以证明 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域中也具有直到 m 阶的连续的各阶 Fréchet 导算子(参看〔4〕,〔13〕)；同样，在定理 4.2 中，若假定 f 在 D 中具有连续的 m 阶的 Fréchet 导算子，那末可以证明 $f^{-1} = \varphi$ 在 y_0 的某邻域中也具有连续的 m 阶 Fréchet 导算子．

关于隐函数定理与反函数定理的详细讨论，请参看〔4〕、〔8〕、〔29〕．

第二章　拓扑度理论

拓扑度理论是研究非线性算子定性理论的有力工具，从它可推出许多著名的不动点定理．众所周知，压缩映象原理用来讨论非线性算子方程解的存在惟一性．这个解不惟一（例如，出现分歧现象），自然需要估计解的个数，这时压缩映象原理就无能为力了，而常可应用拓扑度理论．

本章主要讨论一般实 Banach 空间全连续算子场的 Leray－Schauder 度理论．为此，需要首先介绍 n 维欧式空间 R^n 中连续算子的 Brouwer 度．

§1　Brouwer 度

引入 Brouwer 度的方式很多（参看〔4〕、〔8〕～〔14〕、〔16〕、〔30〕～〔34〕，〔38〕）．最早是基于代数拓扑学的概念引入的（例如〔30〕、〔31〕、〔9〕），后来出现了避免使用代数拓扑学的概念而完全使用分析学的概念和方法引入的（例如〔32〕、〔33〕、〔38〕、〔4〕、〔34〕、〔10〕、〔11〕）．下面，我们利用分析的方法引入．

设 $f:\overline{\Omega}\rightarrow R^n$，$\Omega$ 是 R^n 中某有界开集，$p\in R^n$．我们的目的是要定义一个整数 $\deg(f,\Omega,p)$，使它能和方程

$$f(x)=p \tag{1·1}$$

在 Ω 中解的个数有关，这里假定（1·1）在 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 上无解，即 $p\overline{\in}f(\partial\Omega)$．当然，要求当 f 有微小变化时，$\deg(f,\Omega,p)$ 不

变;下面首先看最简单的 $n=1$ 情形. 设 $\Omega=(a,b)$, $f(a)\neq p$, $f(b)\neq p$. 显然我们不能简单地直接把 $\deg(f,(a,b),p)$ 定义为方程(1·1)在 (a,b) 中解的个数,因为当 f 微小变化时,此解的个数可能发生变化. 例如,方程 $f(x)=\varepsilon+\sin x=1$ 当 ε 为很小的正数时,在 $(0,\pi)$ 上有两个解,而当 ε 为很小的负数时则没有解(图 2-1·1). 但是,如果对方程(1·1)在 (a,b) 中的每个解 $x_i(i=1,2,\cdots,m)$ 赋与一个符号 $\operatorname{sgn} f'(x_i)$,而把解的代数和 $\sum_{i=1}^{m}\operatorname{sgn} f'(x_i)$ 作为 $\deg(f,(a,b),p)$,即定义

$$\deg(f,(a,b),p)=\sum_{i=1}^{m}\operatorname{sgn} f'(x_i), \qquad (1\cdot2)$$

则显然当 f 有微小变化时 $\deg(f,(a,b),p)$ 不变,并且(参看图 2-1·2)

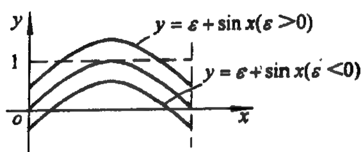


图 2-1·1

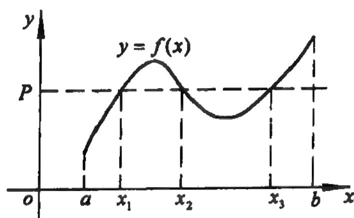


图 2-1·2

$$\deg(f,(a,b),p)=\begin{cases}1, & \text{当 } f(a)<p<f(b)\text{ 时;}\\ -1, & \text{当 } f(a)>p>f(b)\text{ 时;}\\ 0, & \text{当 } [f(a)-p][f(b)-p]>0\text{ 时;}\end{cases} \qquad (1\cdot3)$$

对于 $n>1$ 的一般情形,由第一章例 3.1 知 $f'(x)$ 是由矩阵

$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{1\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant j\leqslant n}$ 所确定的线性变换, 自然, 公式(1·2)中的 $\operatorname{sgn} f'(x)$ 应由 $\operatorname{sgn} J_f(x)$ 来代替, 这里 $J_f(x)$ 表 f 在点 x 的 Jacobi 行列式

$$J_f(x)=\frac{D(f_1,\cdots,f_n)}{D(x_1,\cdots,x_n)}=\left|\frac{\partial f_i}{\partial f_j}\right|.$$

于是, 由(1·2)式的启发, 对于一般的 R^n 情形, 应定义

$$\deg(f,\Omega,p)=\sum_{i=1}^{m}\operatorname{sgn} J_f(x^{(i)}),\qquad(1\cdot4)$$

其中 $x^{(i)}(i=1,2,\cdots,m)$ 表方程(1·1)在 Ω 内的解(参看〔11〕、〔14〕、〔34〕). 虽然按(1·4)式定义拓扑度 $\deg(f,\Omega,p)$ 比较自然和直观, 但讨论的步骤要多一些, 显得繁琐, 因此, 我们宁愿采用比较直接的积分方式(参看〔4〕,〔38〕). 在证明定理 1.2 以后, 读者将会看到此两种定义是等价的.

定义 1.1 设 Ω 是 R^n 中某有界开集, $f:\overline{\Omega}\to R^n$, f 是 C^2 映象(即 $f=(f_1,\cdots,f_n)$, $f_i(x_1,\cdots,x_n)$ 在 $\overline{\Omega}$ 上具有连续各二阶偏导数, $i=1,\cdots,n$), $p\in R^n\setminus f(\partial\Omega)$. 于是 $\tau=\inf\limits_{x\in\partial\Omega}\|f(x)-p\|>0$. 作连续函数 $\Phi:[0,+\infty)\to R^1$, 使它满足下面两个条件:

(i) 存在 σ,τ^*, 满足 $0<\sigma<\tau^*\leqslant\tau$, 且使当 $r\overline{\in}(\sigma,\tau^*)$ 时, 恒有 $\Phi(r)=0$;

(ii) $\int_{R^n}\Phi(\|z\|)\mathrm{d}z=1$.

定义拓扑度 $\deg(f,\Omega,p)$ 如下:

$$\deg(f,\Omega,p)=\int_\Omega\Phi(\|f(x)-p\|)J_f(x)\mathrm{d}x.\qquad(1\cdot5)$$

注 1 满足上述条件(i)、(ii)的连续(非负)函数 Φ 是很多的, 例如 $\Phi(r)=\frac{1}{\lambda_0}\Phi_0(r)$, 其中

$$\Phi_0(r)-\begin{cases}\sin\dfrac{\pi(r-\sigma)}{\tau^*-\sigma}, & 当\ \sigma\leqslant r\leqslant\tau^*\ 时;\\ 0, & 当\ 0\leqslant r<\sigma\ 及\ \tau^*<r<+\infty\ 时,\end{cases}$$

$\lambda_0=\int_{R_n}\Phi_0(\|z\|)\mathrm{d}z=S_{n-1}\int_\sigma^{\tau^*}r^{n-1}\sin\dfrac{\pi(r-\sigma)}{\tau^*-\sigma}\mathrm{d}r$, S_{n-1} 表 R^n 中单位球面的面积,即 $S_{n-1}=\dfrac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$.

注 2 要证明上述定义的合理性,必须证明按(1·5)式定义的 $\deg(f,\Omega,p)$不随 Φ 的选取而变;同时,还要证明 $\deg(f,\Omega,p)$是一个整数.下面一些引理就是证明这些事实.

引理 1.1 设 $f:\bar{\Omega}\to R^n$ 为 C^2 映象,用 $A_{ij}(x)$表行列式 $J_f(x)$中元素$\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$的代数余子式.则

$$\sum_{i=1}^n\frac{\partial}{\partial x_i}A_{ij}(x)=0\quad(j=1,2,\cdots,n),\quad\forall\,x\in\bar{\Omega}.\qquad(1\cdot6)$$

证 只对 $j=1$ 证明(1·6)式.$j=2,\cdots,n$ 时证明类似.我们有 $A_{ij}=(-1)^{i+1}D_i$,这里

$$D_i=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}\cdots\dfrac{\partial f_2}{\partial x_{i-1}} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_{i+1}}\cdots\dfrac{\partial f_2}{\partial x_n}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1}\cdots\dfrac{\partial f_n}{\partial x_{i-1}} & \dfrac{\partial_n f_n}{\partial x_{i+1}}\cdots\dfrac{\partial f_n}{\partial x_n}\end{vmatrix}$$

根据行列式的求导法,知

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_i}D_i&=\sum_{k<i}(-1)^{k-1}d_{ik}+\sum_{k>i}(-1)^{k-2}d_{ik}\\&=\sum_{i\neq k}(-1)^{k-1}\mathrm{sgn}(i-k)d_{ik},\end{aligned}$$

其中

$$d_{ik}=\begin{vmatrix}\frac{\partial^2 f_2}{\partial x_k\partial x_i} & \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\cdots\frac{\partial f_2}{\partial x_{i-1}} & \frac{\partial f_2}{\partial x_{i+1}}\cdots\frac{\partial f_2}{\partial x_{k-1}} & \frac{\partial f_2}{\partial x_{k+1}}\cdots\frac{\partial f_2}{\partial x_n}\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ \frac{\partial^2 f_n}{\partial x_k\partial x_i} & \frac{\partial f_n}{\partial x_1}\cdots\frac{\partial f_n}{\partial x_{i-1}} & \frac{\partial f_n}{\partial x_{i+1}}\cdots\frac{\partial f_n}{\partial x_{k-1}} & \frac{\partial f_n}{\partial x_{k+1}}\cdots\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\end{vmatrix}$$

于是

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}A_{i1}=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\frac{\partial}{\partial x_i}D_i$$

$$=\sum_{i,k=1}^{n}{}'(-1)^{i+k}\operatorname{sgn}(i-k)d_{ik},\tag{1·7}$$

其中$\sum'$表和式中不含$i=k$的项．由于$\frac{\partial^2 f_j}{\partial x_k\partial x_i}=\frac{\partial^2 f_j}{\partial x_i\partial x_k}$，故$d_{ik}=d_{ki}$．又，$\operatorname{sgn}(i-k)=-\operatorname{sgn}(k-i)$，故(1·7)式右端和式中的各项两两互相抵消．由此知$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}A_{i1}=0$. 证完．

引理 1.2 设连续函数 $\Phi:[0,+\infty)\to R^1$ 满足定义 1.1 中的条件(ⅰ). 今定义 $G:R^n\to R^n$ 如下：

$$\begin{cases}G(z)=\dfrac{z}{\|z\|^n}\displaystyle\int_0^{\|z\|}r^{n-1}\Phi(r)\mathrm{d}r, & \text{当 } z\neq 0 \text{ 时；}\\ G(0)=0.\end{cases}\tag{1·8}$$

则 $G(z)$是 C^1 映象，且 $\operatorname{div}G(z)=\Phi(\|z\|)$, $\forall z\in R^n$.

证 由于 Φ 满足条件(ⅰ)，故当$\|z\|<\sigma$ 时$G(z)=0$. 由此易知 G 是C^1 映象．令 $G(z)=(G_1(z),\cdots,G_n(z))$，则

$$\begin{cases}G_i(z)=\dfrac{z_i}{\|z\|^n}\displaystyle\int_0^{\|z\|}r^{n-1}\Phi(r)\mathrm{d}r\quad(i=1,2,\cdots,n), & z\neq 0\text{ 时；}\\ G_i(0)=0.\end{cases}\tag{1·9}$$

于是，当 $z\neq 0$ 时，有

$$\frac{\partial}{\partial z_i}G_i(z)=\frac{z_i}{\|z\|^n}\|z\|^{n-1}\Phi(\|z\|)\frac{\partial}{\partial z_i}\|z\|$$

$$+\int_0^{\|z\|} r^{n-1}\Phi(r)\mathrm{d}r\cdot\frac{\partial}{\partial z_i}\left(\frac{z_i}{\|z\|^n}\right)$$

$$=\Phi(\|z\|)\frac{z_i^2}{\|z\|^2}+\int_0^{\|z\|} r^{n-1}\Phi(r)\mathrm{d}r$$

$$\cdot\left(\frac{1}{\|z\|^n}-\frac{nz_i^2}{\|z\|^{n+2}}\right);$$

当 $z=0$ 时，显然$\frac{\partial}{\partial z_i}G_i(z)=0$；因此，对一切 $z\in R^n$ 恒有

$$\mathrm{div}G(z)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial z_i}G_i(z)=\Phi(\|z\|).$$

证完．

引理 1.3 设 $f:\bar{\Omega}\to R^n$ 为C^2映象，连续函数 $\Phi:[0,+\infty)\to R^1$ 满足定义 1.1 中条件(ⅰ)：$A_{ij}(x)$与 $G(z)$如引理 1.1 及引理 1.2 中所述($G_i(z)$由(1·9)式给出)．作映象 $F:\bar{\Omega}\to R^n$，如下：

$$F(x)=(F_1(x),\cdots,F_n(x)),$$

$$F_i(x)=\sum_{j=1}^{n}A_{ij}(x)G_j(f(x)-p),\ i=1,2,\cdots,n;$$

则 F 是C^1映象，并且

$$\mathrm{div}F(x)=\Phi(\|f(x)-p\|)J_f(x),\quad\forall x\in\bar{\Omega}.\quad(1\cdot10)$$

证 根据 f 是C^2映象及 $G(z)$是 C^1 映象，即知 F 是C^1映象．我们有

$$\frac{\partial}{\partial x_i}F_i(x)=\sum_{j=1}^{n}A_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_i}G_j(f(x)-p)$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\partial}{\partial x_i}A_{ij}(x)\right]G_j(f(x)-p)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} A_{ij}(x) \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial z_k} G_j(f(x)-p) \frac{\partial}{\partial x_i} f_k(x)$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{\partial}{\partial x_i} A_{ij}(x) \right] G_j(f(x)-p),$$

故

$$\operatorname{div} F(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} F_i(x)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \left[\sum_{i=1}^{n} A_{ij}(x) \frac{\partial f_k(x)}{\partial x_i} \right] \frac{\partial}{\partial z_k} G_j(f(x)-p)$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} A_{ij}(x) \right] G_j(f(x)-p). \qquad (1\cdot 11)$$

由引理 1.1 知(1·6)式成立．又由行列式的性质，知

$$\sum_{i=1}^{n} A_{ij}(x) \frac{\partial f_k(x)}{\partial x_i} = \begin{cases} J_f(x), & \text{当 } j=k \text{ 时；} \\ 0, & \text{当 } j \neq k \text{ 时．} \end{cases}$$

于是，由(1·11)式并利用引理 1.2，得

$$\operatorname{div} F(x) = \sum_{j=k} J_f(x) \frac{\partial}{\partial z_k} G_j(f(x)-p)$$

$$= J_f(x) \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial z_k} G_k(f(x)-p)$$

$$= J_f(x) \operatorname{div} G(f(x)-p)$$

$$= J_f(x) \Phi(\| f(x)-p \|).$$

证完．

定理 1.1 定义 1.1 中所定义的拓扑度 $\deg(f, \Omega, p)$ 不随函数 Φ 的选取而变．

证 设连续函数 Φ_1 和 Φ_2 都满足定义 1.1 中的条件(ⅰ)与(ⅱ)．于是，连续函数 $\Phi = \Phi_1 - \Phi_2$ 满足条件(ⅰ)，并且 $\int_{R^n} \Phi(\| z \|) \mathrm{d}z = 0$．由于 $\int_{R^n} \Phi(\| z \|) \mathrm{d}z = S_{n-1} \int_0^{+\infty} r^{n-1} \Phi(r) \mathrm{d}r$，其

中 $S_{n-1}=\dfrac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$ 表 R^n 中单位球面的面积，故有 $\int_0^{+\infty} r^{n-1}$ $\Phi(r)\mathrm{d}r=0$. 由于当 $r\geqslant\tau$ 时，$\Phi(r)=0$，故当 $x\in\partial\Omega$ 时，有

$$\int_0^{\|f(x)-p\|} r^{n-1}\Phi(r)\mathrm{d}r=\int_0^{+\infty} r^{n-1}\Phi(r)\mathrm{d}r=0,$$

从而，由(1·9)式以及引理 1.3 中 $F(x)$ 的定义，知当 $x\in\partial\Omega$ 时，$F(x)=0$. 于是，根据引理 1.3 并利用 Gauss 公式，得

$$\int_{\bar{\Omega}}\Phi(\|f(x)-p\|)J_f(x)\mathrm{d}x=\int_{\bar{\Omega}}\mathrm{div}F(x)\mathrm{d}x$$
$$=\int_{\partial\Omega}F(x)\cdot\mathrm{d}S=0,$$

即

$$\int_{\bar{\Omega}}\Phi_1(\|f(x)-p\|)J_f(x)\mathrm{d}x=\int_{\bar{\Omega}}\Phi_2(\|f(x)-p\|)J_f(x)\mathrm{d}x$$

证完．

下面证明定义 1.1 中定义的拓扑度 $\deg(f,\Omega,p)$是一个整数，并在一定的情形下，公式(1·4)成立．为此，需要先证明几个引理．

引理 1.4(A. Sard 定理)　设 Ω 是 R^n 中开集，$f:\Omega\to R^n$ 是 C^1 映象．令 $N_f=\{x\mid x\in\Omega,\text{使 } J_f(x)=0\}$. 则 N_f 在映象 f 下的象 $f(N_f)$是 R^n 中 Lebesgue 测度为零的集．

证　由于 Ω 可表为可数个闭正方体 $T_i(i=1,2,\cdots)$的并集，$\Omega=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}T_i$，故 $N_f=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}(N_f\cap T_i)$，$f(N_f)=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}f(N_f\cap T_i)$. 因此，要证明 $\mathrm{mes}f(N_f)=0$，只需证明对每个闭正方体 $T\subset\Omega$ 都有 $\mathrm{mes}f(N_f\cap T)=0$ 即可．

设 T 的边长为 l. 将 T 的每边都作 N 等分，则 T 分成 N^n 个小闭正方体，其直径为$\dfrac{\sqrt{n}l}{N}$. 任给 $\varepsilon>0$，由 $f'(x)$在 T 上的一致连

续性,知可取 N 充分大,使当 x,x_0 属于同一小闭正方体 P 时,恒有 $\|f'(x)-f'(x_0)\|<\varepsilon$,从而根据第一章公式(3·71)得

$$\begin{aligned}&\|f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)\|\\&\leqslant\int_0^1\|f'(x_0+t(x-x_0))-f'(x_0)\|\cdot\|x-x_0\|\mathrm{d}t\\&<\varepsilon\|x-x_0\|\leqslant\frac{\sqrt{n}l}{N}\varepsilon.\end{aligned}\tag{1·12}$$

若 $N_f\cap P\neq\varnothing$,则可取 $x_0\in N_f\cap P$. 考察线性变换 $y=f'(x_0)x$ 下 P 的象集 $f'(x_0)P$. 令 $Q=\left\{z\,\middle|\,z\in R^n,z\text{ 到 }f'(x_0)P\text{ 的距离小于 }\frac{\sqrt{n}l}{N}\varepsilon\right\}$. 由(1·12)式知,象集 $f(P)$的平移 $f(P)-f(x_0)+f'(x_0)x_0$ (令为 Q_1)含于 Q 中. 由 Lebesgue 外测度的平移不变性,知

$$m^*f(P)=m^*Q_1\leqslant m^*Q.\tag{1·13}$$

因为 $J_f(x_0)=0$,故线性变换 $y=f'(x_0)x$ 退化,从而 $f'(x_0)P$ 含于 R^n 中某 $n-1$ 维超平面 S 内(设 $J_f(x_0)=|a_{ij}|=0$,则存在不全为 0 的 $\alpha_i(i=1,2,\cdots,n)$,使 $\sum\limits_{i=1}^n\alpha_ia_{ij}=0,j=1,2,\cdots,n$. 于是,若 $y_i=\sum\limits_{j=1}^n a_{ij}x_j$,则 $\sum\limits_{i=1}^n\alpha_iy_i=0$;由此可知,$f'(x)P$ 的任何点 $y=(y_1,\cdots,y_n)$都属于平面 $\sum\limits_{i=1}^n\alpha_iy_i=0$ 内). 令 $M=\max\limits_{x\in T}\|f'(x)\|$. 于是,对于 $f'(x_0)P$ 中任二点 $y_1^*=f'(x_0)x_1^*$, $y_2^*=f'(x_0)x_2^*$ $(x_1^*,x_2^*\in P)$,有 $\|y_1^*-y_2^*\|\leqslant\|f'(x_0)\|\cdot\|x_1^*-x_2^*\|\leqslant\frac{\sqrt{n}lM}{N}$. 即 $f'(x_0)P$ 的直径 $\leqslant\frac{\sqrt{n}lM}{N}$. 由此可知,集 Q 含于某闭圆柱 H 中,此闭圆柱体 H 的底为超平面 S 内以任意取定的一点 $y_0\in f'(x_0)P$ 为中心,$R=\frac{\sqrt{n}lM}{N}+\frac{\sqrt{n}l\varepsilon}{N}$ 为半径的 $n-1$ 维球体,它的高为 $\frac{2\sqrt{n}l\varepsilon}{N}$. 注意到

半径为 R 的 $n-1$ 维球体的体积为 $\pi^{\frac{n-1}{2}}\left[\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\right]^{-1}R^{n-1}$,即知

$$m^*Q\leqslant \text{mes}\acute{H}=\pi^{\frac{n-1}{2}}\left[\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\right]^{-1}\left(\frac{\sqrt{n}lM}{N}+\frac{\sqrt{n}l\varepsilon}{N}\right)^{n-1}$$

$$\cdot\frac{2\sqrt{n}l\varepsilon}{N}=\frac{M_1(M+\varepsilon)^{n-1}\varepsilon}{N^n},\tag{1·14}$$

其中 $M_1=2\pi^{\frac{n-1}{2}}\left[\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\right]^{-1}n^{\frac{n}{2}}l^n=\text{const}$. 于是,由(1·13)与(1·14)式得

$$m^*f(N_f\cap P)\leqslant m^*f(P)\leqslant m^*Q\leqslant\frac{M_1(M+\varepsilon)^{n-1}\varepsilon}{N^n}.$$

由于满足 $N_f\cap P\neq\varnothing$ 的小闭正方体 P 至多 N^n 个,故

$$m^*f(N_f\cap T)\leqslant N^n\cdot\frac{M_1(M+\varepsilon)^{n-1}\varepsilon}{N^n}=M_1(M+\varepsilon)^{n-1}\varepsilon,$$

由此,根据 $\varepsilon>0$ 的任意性,即知 $m^*f(N_f\cap T)=0$,从而 $\text{mes}\,f(N_f\cap T)=0$. 证完.

引理 1.5 设 Ω 是 R^n 中有界开集,$f:\bar{\Omega}\to R^n$ 连续,则对于任意给定的 $\varepsilon>0$,必存在 $g:\bar{\Omega}\to R^n$,g 是 C^∞ 映象(即 $g=(g_1,\cdots,g_n)$,每个 $g_i(x_1,\cdots,x_n)$ 都在 Ω 上具有各阶连续偏导数),使对一切 $x\in\bar{\Omega}$,都有 $\|f(x)-g(x)\|<\varepsilon$.

证 由延拓定理(第一章定理 2.7),可保持连续性,将 f 延拓到整个 R^n 上. 令 $\Omega_1=\{x\mid x\in R^n$,使 x 到 $\bar{\Omega}$ 的距离小于 $1\}$. 由于 f 在 $\bar{\Omega}_1$ 上一致连续,故必存在 $0<h<1$,使当 $x\in\bar{\Omega}_1$,$x'\in\bar{\Omega}_1$,$\|x-x'\|\leqslant h$ 时,恒有 $\|f(x)-f(x')\|<\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$,其中 ε 是任意给定的正数. 考察函数 $\Psi:R^n\to R^1$ 如下(参看[37]):

$$\Psi(x)=\begin{cases}\frac{1}{\mu_0}e^{\frac{\|x\|^2}{\|x\|^2-h^2}}, & \text{当}\|x\|<h\text{ 时};\\ 0, & \text{当}\|x\|\geqslant h\text{ 时},\end{cases}\tag{1·15}$$

其中 $\mu_0=\int_{\|x\|<h} e^{\frac{\|x\|^2}{\|x\|^2-h^2}}\mathrm{d}x(0<\mu_0<+\infty)$. 由归纳法易知，函数 $e^{\frac{\|x\|^2}{\|x\|^2-h^2}}$ 的任何偏导数 $\frac{\partial^\alpha e^{\frac{\|x\|^2}{\|x\|^2-h^2}}}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}(\alpha=\alpha_1+\cdots+\alpha_n)$ 都具有如下的形式

$$\frac{P_{\alpha_1\cdots\alpha_n}(x_1,\cdots,x_n)}{(\|x\|^2-h^2)^{2\alpha}}e^{\frac{\|x\|^2}{\|x\|^2-h^2}},$$

其中 $P_{\alpha_1\cdots\alpha_n}$ 是 $x_1,\cdots,x_n$ 的多项式，由此易知 $\Psi(x)\in C^\infty(R^n)$，并且

$$\int_{R^n}\Psi(x)\mathrm{d}x=\int_{\|x\|\leqslant h}\Psi(x)\mathrm{d}x=1. \qquad (1\cdot16)$$

设 $f=(f_1,\cdots,f_n)$，作函数 $g_i:R^n\to R^1$ 如下：

$$g_i(x)=\int_{\bar{\Omega}_1}\Psi(z-x)f_i(z)\mathrm{d}z,\quad i=1,2,\cdots,n. \qquad (1\cdot17)$$

由于 $\Psi(x)\in C^\infty(R^n)$，$f_i(x)\in C(R^n)$，故(1·17)式右端的积分可以在积分号下求偏导数任意多次，从而 $g_i\in C^\infty(R^n)$，并且当 $x\in\bar{\Omega}$ 时有(注意到(1·16)式)

$$\begin{aligned}
&|g_i(x)-f_i(x)|\\
&=\left|\int_{\bar{\Omega}_1}\Psi(z-x)f_i(z)\mathrm{d}z-f_i(x)\right|\\
&=\left|\int_{\|z-x\|\leqslant h}\Psi(z-x)f_i(z)\mathrm{d}z-f_i(x)\right|\\
&=\left|\int_{\|u\|\leqslant h}\Psi(u)f_i(x+u)\mathrm{d}u-f_i(x)\right|\\
&=\left|\int_{\|u\|\leqslant h}\Psi(u)[f_i(x+u)-f_i(x)]\mathrm{d}u\right|\\
&\leqslant\int_{\|u\|\leqslant h}\Psi(u)\|f(x+u)-f(x)\|\mathrm{d}u\\
&<\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\int_{\|u\|\leqslant h}\Psi(u)\mathrm{d}u=\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}},\quad(i=1,2,\cdots,n),
\end{aligned}$$

从而，令 $g=(g_1,\cdots,g_n)$，则 $g:R^n\to R^n$ 是 C^∞ 映象，并且当 $x\in\bar{\Omega}$ 时，恒有

$$\|g(x)-f(x)\|=\left(\sum_{i=1}^{n}|g_i(x)-f_i(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}}<\varepsilon.$$

证完．

注 3 从证明中看出，所求出的 g，不仅是 $\bar{\Omega}\to R^n$ 的 C^∞ 映象，而且是 $R^n\to R^n$ 的 C^∞ 映象．另外，引理 1.5 还可直接从多元的 Weierstrass 定理（用多项式逼近连续函数）直接推出（参看〔152〕）．

引理 1.6 设 $-\infty<\mu<\lambda<+\infty$，则存在函数 $\varphi(x)\in C^\infty(-\infty,+\infty)$，使 $0\leqslant\varphi(x)\leqslant 1(-\infty<x<+\infty)$，并且当 $x>\lambda$ 时，$\varphi(x)=0$；当 $x<\mu$ 时，$\varphi(x)=1$.

证 令 $\delta=\frac{1}{3}(\lambda-\mu)$，显然可作连续函数 $f:(-\infty,+\infty)\to[0,1]$，使当 $x\geqslant\lambda-\delta$ 时，$f(x)=0$；当 $x\leqslant\mu+\delta$ 时，$f(x)=1$. 仿引理 1.5 之证，取 $0<h<\delta$，并令

$$\Psi(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\mu_0}e^{\frac{x^2}{x^2-h^2}}, & \text{当}|x|<h\text{ 时};\\ 0, & \text{当}|x|\geqslant|h|\text{时},\end{cases}$$

其中 $\mu_0=\int_{-h}^{h}e^{\frac{x^2}{x^2-h^2}}\mathrm{d}x$，于是 $\Psi(x)\in C^\infty(-\infty,+\infty)$，且

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\Psi(x)\mathrm{d}x=\int_{-h}^{h}\Psi(x)\mathrm{d}x=1.$$

令

$$\varphi(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\Psi(z-x)f(z)\mathrm{d}z,\quad -\infty<x<+\infty \qquad (1\cdot 18)$$

由于当 $|x|\geqslant h$ 时 $\Psi(x)$ 恒为零，故易知 $\varphi(x)\in C^\infty(-\infty,+\infty)$（事实上，对任何有限区间 (a,b)，当 $x\in(a,b)$ 时，(1·18)中

的积分 $\int_{-\infty}^{\infty}$ 都可换成积分 $\int_{a-\delta}^{b+\delta}$，故可在积分号下求导数)，并且显然 $0 \leqslant \varphi(x) \leqslant 1(-\infty < x < +\infty)$；又，当 $x > \lambda$ 时，有 $x-h > \lambda-\delta$，从而

$$\varphi(x)=\int_{x-h}^{x+h}\Psi(z-x)f(z)\mathrm{d}z=\int_{-h}^{h}\Psi(u)f(x+u)\mathrm{d}u$$
$$=\int_{-h}^{h}\Psi(u)\cdot 0\mathrm{d}u=0;$$

当 $x<\mu$ 时，有 $x+h<\mu+\delta$，故

$$\varphi(x)=\int_{x-h}^{x+h}\Psi(z-x)f(z)\mathrm{d}z=\int_{-h}^{h}\Psi(u)f(x+u)\mathrm{d}u$$
$$=\int_{-h}^{h}\Psi(u)\mathrm{d}u=1.$$

证完．

引理 1.7 设 Ω 为 R^n 中有界开集，$f:\bar{\Omega}\to R^n$ 为 C^2 映象，$p \overline{\in} f(\partial\Omega)$，$\tau=\inf\limits_{x\in\partial\Omega}\|f(x)-p\|$．则当 $g:\bar{\Omega}\to R^n$ 为 C^2 映象且 $\max\limits_{x\in\bar{\Omega}}\|f(x)-g(x)\|<\frac{\tau}{7}$ 时，恒有

$$\deg(g,\Omega,p)=\deg(f,\Omega,p). \tag{1·19}$$

证 由引理 1.6，存在二阶连续可微函数 $\xi:[0,+\infty)\to[0,1]$，使当 $0\leqslant r\leqslant\frac{2\tau}{7}$ 时，$\xi(r)=1$，当 $\frac{3\tau}{7}\leqslant r<+\infty$ 时，$\xi(r)=0$．考察映象

$$h(x)=[1-\xi(\|f(x)-p\|)]f(x)+\xi(\|f(x)-p\|)g(x).$$

显然 $h:\bar{\Omega}\to R^n$ 是 C^2 映象(注意，虽然 $\|f(x)-p\|$ 在 $f^{-1}(p)$ 上不可微，但因当 $0\leqslant r\leqslant\frac{3\tau}{7}$ 时 $\xi(r)\equiv 1$，故仍有 $h(x)\in C^2(\bar{\Omega})$)，并且当 $x\in\bar{\Omega}$ 时，

$$\|h(x)-f(x)\|=\xi(\|f(x)-p\|)$$

$$\cdot \|f(x)-g(x)\| < \frac{\tau}{7}, \tag{1·20}$$

$$\|h(x)-g(x)\| = [1-\xi(\|f(x)-p\|)]$$

$$\cdot \|f(x)-g(x)\| < \frac{\tau}{7}; \tag{1·21}$$

当 $x \in \partial\Omega$ 时,

$$\|h(x)-p\| \geqslant \|f(x)-p\| - \xi(\|f(x)-p\|)$$

$$\cdot \|f(x)-g(x)\| > \frac{6\tau}{7}. \tag{1·22}$$

今作函数 Φ_1 与 Φ_2,使它们都满足定义 1.1 中的条件(ⅰ)与(ⅱ),并且,当 $r \overline{\in} \left(\frac{4\tau}{7}, \frac{5\tau}{7}\right)$ 时, $\Phi_1(r)=0$, 当 $r \geqslant \frac{\tau}{7}$ 时, $\Phi_2(r)=0$. 于是,当 $\|f(x)-p\| > \frac{3\tau}{7}$ 时, $\xi(\|f(x)-p\|)=0$, 从而 $h(x) = f(x)$; 而当 $\|f(x)-p\| \leqslant \frac{3\tau}{7}$ 时, $\|h(x)-p\| \leqslant \|h(x)-f(x)\| + \|f(x)-p\| < \frac{4\tau}{7}$, 从而 $\Phi_1(\|f(x)-p\|) = 0$, $\Phi_1(\|h(x)-p\|)=0$;总之,对任何 $x \in \bar{\Omega}$, 均有

$$\Phi_1(\|f(x)-p\|)J_f(x) = \Phi_1(\|h(x)-p\|)J_h(x),$$

两端积分(注意到(1·22)式,(1·5)式及定理 1.1),即得

$$\deg(f,\Omega,p) = \deg(h,\Omega,p). \tag{1·23}$$

同样,当 $\|f(x)-p\| < \frac{2\tau}{7}$ 时, $\xi(\|f(x)-p\|)=1$, 从而 $h(x)=g(x)$;而当 $\|f(x)-p\| \geqslant \frac{2\tau}{7}$ 时,有

$$\|g(x)-p\| \geqslant \|f(x)-p\| - \|f(x)-g(x)\| > \frac{\tau}{7},$$

且(注意(1·20)式)

$$\|h(x)-p\| \geqslant \|f(x)-p\| - \|f(x)-h(x)\| > \frac{\tau}{7},$$

从而 $\Phi_2(\|g(x)-p\|)=0$, $\Phi_2(\|h(x)-p\|)=0$;总之,对任何 $x\in\bar{\Omega}$,均有

$$\Phi_2(\|g(x)-p\|)J_g(x)=\Phi_2(\|h(x)-p\|)J_h(x),$$

两端积分(注意到当 $x\in\partial\Omega$ 时,$\|g(x)-p\|\geqslant\|f(x)-p\|-\|f(x)-g(x)\|>\frac{6\tau}{7}$),得

$$\deg(g,\Omega,p) = \deg(h,\Omega,p). \tag{1·24}$$

由(1·23)式与(1·24)式即得(1·19)式．证完．

定理 1.2 定义 1.1 中所定义的拓扑度 $\deg(f,\Omega,p)$ 是一个整数;并且当 $p\overline{\in}f(N_f)$ 时($N_f=\{x\mid x\in\Omega, J_f(x)=0\}$),有公式

$$\deg(f,\Omega,p) = \sum_{i=1}^{m}\operatorname{sgn}J_f(x_i), \tag{1·25}$$

其中 $x_i(i=1,2,\cdots,m)$ 表方程(1·1)在 Ω 内的解(这时方程(1·1)在 Ω 内只有有限个解).

证 先设 $p\overline{\in}f(N_f)$. 这时方程(1·1)在 Ω 内只有有限个解,设为 $x_1,\cdots,x_m$(因若有无穷个解,则它们在 $\bar{\Omega}$ 内必有聚点 x_0,当然 $f(x_0)=p$. 由假定 $p\in R^n\setminus f(\partial\Omega)$,故 $x_0\in\Omega$. 由于 $J_f(x_0)\neq0$,此显然与反函数定理的结论矛盾). 由反函数定理,存在 x_i 的邻域 $\Omega_i\subset\Omega$,使在 f 下 Ω_i 与 $f(\Omega_i)$ 微分同胚($f(\Omega_i)$ 是 p 的邻域),显然可取 $\Omega_i(i=1,2,\cdots,m)$ 充分小,使 $\bar{\Omega}_i\cap\bar{\Omega}_j=\varnothing(i\neq j)$,并且在每一个 $\bar{\Omega}_i$ 上 $J_f(x)$ 保持定号(这是办得到的,因为由 $p\overline{\in}f(N_f)$ 知 $J_f(x_i)\neq0$, $i=1,2,\cdots,m$). 由于方程(1·1)在 $\bar{\Omega}_0=\bar{\Omega}\setminus\bigcup_{i=1}^{m}\Omega_i$ 上无解,故 $\tau_0=\inf_{x\in\bar{\Omega}_0}\|f(x)-p\|>0$. 令 $d_i=d(p,\partial f(\Omega_i))=\inf_{x\in\partial f(\Omega_i)}\|z-p\|$. 则 $d_i>0(i=1,2,\cdots,$

m). 令 $\tau_1 = \min\{\tau_0, d_1, \cdots, d_m\}$. 显然 $\tau_1 \leqslant \tau_0 \leqslant \tau = \inf_{x \in \partial\Omega} \| f(x) - p \|$. 今作满足定义 1.1 中条件(i)与(ii)的函数 Φ, 使 $r \geqslant \tau_1$ 时恒有 $\Phi(r) = 0$. 于是, 当 $x \in \bar{\Omega}_0$ 时, 恒有 $\Phi(\| f(x) - p \|) = 0$, 从而

$$\deg(f, \Omega, p) = \int_{\bar{\Omega}} \Phi(\| f(x) - p \|) J_f(x) \mathrm{d}x$$

$$= \sum_{i=0}^{m} \int_{\bar{\Omega}_i} \Phi(\| f(x) - p \|) J_f(x) \mathrm{d}x$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \int_{\bar{\Omega}_i} \Phi(\| f(x) - p \|) J_f(x) \mathrm{d}x. \qquad (1\cdot 26)$$

由于 f 是 Ω_i 与 $f(\Omega_i)$ 之间的微分同胚, 并且在 $\bar{\Omega}$ 上 $J_f(x)$ 保持定号, 故根据重积分的变量代换($z = f(x)$)公式, 有

$$\int_{\overline{f(\Omega_i)}} \Phi(\| z - p \|) \mathrm{d}z = \int_{\bar{\Omega}_i} (\| f(x) - p \|) | J_f(x) | \mathrm{d}x$$

$$= \operatorname{sgn} J_f(x_i) \int_{\bar{\Omega}_i} \Phi(\| f(x) - p \|) J_f(x) \mathrm{d}x. \qquad (1\cdot 27)$$

但因 $z \in R^n \setminus \overline{f(\Omega_i)}$ 时, $\| z - p \| > d_i \geqslant \tau_1$ 从而 $\Phi(\| z - p \|) = 0$, 因此

$$\int_{\overline{f(\Omega_i)}} \Phi(\| z - p \|) \mathrm{d}z$$

$$= \int_{R^n} \Phi(\| z - p \|) \mathrm{d}z = \int_{R^n} \Phi(\| z' \|) \mathrm{d}z' = 1,$$

故由(1·27)式得

$$\int_{\bar{\Omega}_i} \Phi(\| f(x) - p \|) J_f(x) \mathrm{d}x = \operatorname{sgn} J_f(x_i)$$

$$(i = 1, 2, \cdots, m),$$

由此代入(1·26)式即得(1·25)式. 由(1·25)式即知 $\deg(f, \Omega, p)$ 是整数.

现设 $p\in f(N_f)$. 由 Sard 定理(引理 1.4), $\mathrm{mes} f(N_f)=0$, 必存在 $p_1\in R^n\setminus f(N_f)$, 使 $\|p_1-p\|<\frac{\tau}{7}$ ($\tau=\inf_{x\in\partial\Omega}\|f(x)-p\|$). 令 $g(x)=f(x)+p-p_1$, 则 $g:\bar\Omega\to R^n$ 是 C^2 映象, 并且 $\max_{x\in\bar\Omega}\|f(x)-g(x)\|=\|p_1-p\|<\frac{\tau}{7}$. 于是, 根据引理 1.7 知

$$\deg(f,\Omega,p)=\deg(g,\Omega,p). \qquad (1\cdot 28)$$

由于

$$\|g(x)-p\|=\|f(x)-p_1\|\geqslant\|f(x)-p\|-\|p-p_1\|>\frac{6\tau}{7},$$

$$\forall x\in\partial\Omega,$$

故

$$\inf_{x\in\partial\Omega}\|g(x)-p\|=\inf_{x\in\partial\Omega}\|f(x)-p_1\|\geqslant\frac{6\tau}{7}.$$

今作满足定义 1.1 中条件(ⅰ)与(ⅱ)的函数 Φ, 使当 $r\geqslant\frac{6\tau}{7}$时, 恒有 $\Phi(r)=0$. 于是, 根据定义 1.1, 并注意到 $J_g(x)=J_f(x)$, $\forall x\in\bar\Omega$, 知

$$\deg(g,\Omega,p)=\int_{\bar\Omega}\Phi(\|g(x)-p\|)J_g(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_{\bar\Omega}\Phi(\|f(x)-p_1\|)J_f(x)\mathrm{d}x=\deg(f,\Omega,p_1).$$

从而由(1·28)式得

$$\deg(f,\Omega,p)=\deg(f,\Omega,p_1).$$

由前一段结果知 $\deg(f,\Omega,p_1)$是整数, 故 $\deg(f,\Omega,p)$也是整数. 证完.

注 4 当 $p\overline{\in} f(\bar\Omega)$时, 必有

$$\deg(f,\Omega,p)=0. \qquad (1\cdot 29)$$

事实上, 这时 $\tau_2=\inf_{x\in\bar\Omega}\|f(x)-p\|>0$. 取定义 1.1 中函数 Φ, 使

它除满足定义 1.1 中的条件(ⅰ)与(ⅱ)外，还满足：当 $r \geqslant \tau_2$ 时，恒有 $\Phi(r)=0$. 于是，由(1·5)式即得(1·29)式 .(1·29)式可视为包含在(1·25)式之中，即当 x_i 不存在时把(1·25)式右端理解为零 .

注 5 由定理 1.2 与引理 1.7 可知，定义 1.1 可换为下面等价的定义：设 Ω 是 R^n 中某有界开集，$f:\bar{\Omega}\to R^n$ 是 C^2 映象，$p \in R^n \setminus f(\partial\Omega)$，于是 $\tau=\inf\limits_{x\in\partial\Omega}\|f(x)-p\|>0$.

(ⅰ)若 $p \overline{\in} f(N_f)$ ($N_f=\{x \mid x\in\Omega, J_f(x)=0\}$)，则方程(1·1)在 Ω 内至多有有限个解，设为 $x_1,\cdots,x_m$. 这时定义拓扑度

$$\deg(f,\Omega,p)=\sum_{i=1}^{m}\operatorname{sgn}J_f(x_i) \qquad (1\cdot30)$$

(当(1·1)在 Ω 内无解时定义 $\deg(f,\Omega,p)=0$)；

(ⅱ)若 $p\in f(N_f)$. 由 Sard 定理，存在 $p_1 \overline{\in} f(N_f)$，使 $\|p_1-p\|<\frac{\tau}{7}$. 于是按(ⅰ)，$\deg(f,\Omega,p_1)$有定义 . 这时定义

$$\deg(f,\Omega,p)=\deg(f,\Omega,p_1). \qquad (1\cdot31)$$

由引理 1.7 与定理 1.2 易证，$\deg(f,\Omega,p_1)$不随 p_1 的选取而变，即若取 $p_2 \overline{\in} f(N_f)$，$\|p_2-p\|<\frac{\tau}{7}$，则按(1·30)式定义的拓扑度，有 $\deg(f,\Omega,p_1)=\deg(f,\Omega,p_2)$；因此，按(1·31)式定义拓扑度 $\deg(f,\Omega,p)$是合理的(参见[14]、[16]、[34]等).

例 1.1 设 f 是常算子，即 $f(x)\equiv z_0\in R^n$, $\forall x\in R^2$. 则显然 f 是 C^2 映象，并且 $J_f(x)\equiv 0$, $\forall x\in R^n$. 于是，对于 R^n 中任何有界开集 Ω，以及 R^n 中任何不等于 z_0 的 p，由(1·5)式都有

$$\deg(f,\Omega,p)=0.$$

例 1.2 考察 R^2 中算子 $f(x,y)=(e^x-1, y^2)$与 $g(x,y)=(y-x^3, y)$. 令 $T_r=\{(x,y)\mid x^2+y^2<r\}$, $r>0$. 求 $\deg(f, T_r, (0,0))$与 $\deg(g, T_r, (0,0))$.

显然, $f: \overline{T}_r \to R^2$, $g: \overline{T}_r \to R^2$ 都是 C^2 映象. 容易算得 $J_f((x,y))=2ye^x$, $J_g((x,y))=-3x^2$, 因此 $J_f((0,0))=J_g((0,0))=0$, 即$(0,0)\in f(N_f)$, $(0,0)\in g(N_g)$.

对任何 $0<\varepsilon<r$, 考察算子 $f_\varepsilon(x,y)=(e^x-1, y^2-\varepsilon^2)$. 显然 f_ε 是C^2 映象, 并且方程 $f_\varepsilon(x,y)=(0,0)$只有两个解$(0,\varepsilon)$与$(0,-\varepsilon)$. 并且容易算得 $J_{f_\varepsilon}((0,\varepsilon))=2\varepsilon>0$, $J_{f_\varepsilon}((0,-\varepsilon))=-2\varepsilon<0$. 由此知$(0,0)\overline{\in} f_\varepsilon(N_{f_\varepsilon})$. 由定理 1.2 的公式(1·25)知, $\deg(f_\varepsilon, T_r, (0,0))=1-1=0$. 再根据引理 1.7 知, 当 ε 充分小时, $\deg(f_\varepsilon, T_r, (0,0))=\deg(f, T_r, (0,0))$. 因此 $\deg(f, T_r, (0,0))=0$.

同样, 对任何 $0<\varepsilon<1$, 考察算子 $g_\varepsilon(x,y)=(y-x^3+\varepsilon^2 x, y)$. 方程 $g_\varepsilon(x,y)=(0,0)$只有三个解$(0,0)$, $(\varepsilon,0)$, $(-\varepsilon,0)$. 容易算得 $J_{g_\varepsilon}((x,y))=\varepsilon^2-3x^2$, 从而 $J_{g_\varepsilon}((0,0))=\varepsilon^2>0$, $J_g^\varepsilon((\varepsilon,0))=J_{g_\varepsilon}((-\varepsilon,0))=-2\varepsilon^2<0$. 于是由公式(1·25)得

$$\deg(g_\varepsilon, T_r, (0,0))=1-1-1=-1.$$

再根据引理 1.7 知, 当 ε 充分小时有

$$\deg(g, T_r, (0,0))=\deg(g_\varepsilon, T_r, (0,0))=-1.$$

当然, 逼近映象 f_ε, g_ε 的取法是很多的. 例如, 可将 f 的逼近映象取成$f_\varepsilon^*(x,y)=(e^x-1, y^2-\varepsilon y)$. 这时方程 $f_\varepsilon^*(x,y)=(0,0)$只有两个解$(0,0)$与$(0,\varepsilon)$. 容易算得 $J_\varepsilon^*((x,y))=(2y-\varepsilon)e^x$. 故 $J_\varepsilon^*((0,0))=-\varepsilon<0$, $J_\varepsilon^*((0,\varepsilon))=\varepsilon>0$. 于

是，由公式(1·25)式知

$$\deg(f_\varepsilon^*, T_r, (0,0)) = -1+1=0,$$

从而当 ε 充分小时有

$$\deg(f, T_r, (0,0)) = \deg(f_\varepsilon^*, T_r, (0,0)) = 0,$$

此与前面取 f_ε 时所获结果一致(当然应该是一致的).

下面，将定义 1.1 中对 C^2 映象定义的拓扑度推广到一般的连续映象，从而得到 Brouwer 度的概念．

定义 1.2 设 Ω 是R^n 中某有界开集，$f:\bar{\Omega}\to R^n$ 连续，$p\in R^n\setminus f(\partial\Omega)$. 于是 $\tau=\inf\limits_{x\in\partial\Omega}\|f(x)-p\|>0$. 令

$$T=\{g\,|\,g:\bar{\Omega}\to R^2 \text{ 是 } C^2 \text{ 映象，且}\max_{x\in\bar{\Omega}}\|f(x)-g(x)\|<\tau\}$$

由引理 1·5 知 T 不空．对 $g\in T$，有

$$\|g(x)-p\|\geqslant\|f(x)-p\|-\|f(x)-g(x)\|>0,$$

因此 $p\in R^n\setminus g(\partial\Omega)$，$\forall g\in T$. 于是根据定义 1.1，$\deg(g,\Omega,p)$有定义．规定 Brouwer 度(即拓扑度)$\deg(f,\Omega,p)$为

$$\deg(f,\Omega,p)=\deg(g,\Omega,p),\quad \forall g\in T. \tag{1·32}$$

注 6 要使定义(1·32)式是合理的，必须证明：当 $g_1\in T$，$g_2\in T$ 时，恒有

$$\deg(g_1,\Omega,p)=\deg(g_2,\Omega,p). \tag{1·33}$$

今证如下：令 $h_t(x)=(1-t)g_1(x)+tg_2(x)\quad 0\leqslant t\leqslant 1$. 显然，$h_t:\bar{\Omega}\to R^n$ 是 C^2 映象．由($\forall 0\leqslant t\leqslant 1$)

$$\|f(x)-h_t(x)\|$$
$$\leqslant(1-t)\|f(x)-g_1(x)\|)]+t\|f(x)-g_2(x)\|$$

知$\max\limits_{x\in\bar{\Omega}}\|f(x)-h_t(x)\|<\tau$，因此 $p\in R^n\setminus h_t(\partial\Omega)$，故按定义 1.1，$\deg(h_t,\Omega,p)(0\leqslant t\leqslant 1)$有定义．由于

$$\|h_t(x)-h_{t'}(x)\|=|t-t'|\cdot\|g_1(x)-g_2(x)\|,$$

故

$$\max_{x\in\Omega}\|h_t(x)-h_{t'}(x)\|=M|t-t'|,\qquad(1\cdot34)$$

其中 $M=\max_{x\in\Omega}\|g_1(x)-g_2(x)\|$. 由(1·34)式，根据引理 1.7 知，对于每个 $t'\in[0,1]$，都存在以 t' 为中心的某小开区间，当 t 在此小开区间中时，$\deg(h_t,\Omega,p)$ 保持不变；由此，根据有限覆盖定理知，对一切 $t\in[0,1]$，$\deg(h_t,\Omega,p)$ 均取相同的值，故

$$\deg(h_0,\Omega,p)=\deg(h_1,\Omega,p),$$

此即(1·33)式．证完．

注 7 当 Ω 是空集时，若 f 是 C^2 映象，则按定义 1.1 中的(1·5)式，$\deg(f,\phi,p)$ 应理解为 0；从而，若 f 为连续映象，按定义 1.2，也应理解为

$$\deg(f,\phi,p)=0.\qquad(1\cdot35)$$

以下，讨论 Brouwer 度的性质．

定理 1.3 Brouwer 度具有以下性质：

(ⅰ)正规性：$\deg(I,\Omega,p)=1$，$\forall p\in\Omega$，其中 I 表恒等算子，即 $Ix=x$，$\forall x\in R^n$；

(ⅱ)可加性：设 Ω_1,Ω_2 是 Ω 的两个互不相交的开子集，并且 $p\overline{\in}f(\bar{\Omega}\setminus(\Omega_1\cup\Omega_2))$，那末

$$\deg(f,\Omega,p)=\deg(f,\Omega_1,p)+\deg(f,\Omega_2,p);$$

(ⅲ)同伦不变性：设 $H:[0,1]\times\bar{\Omega}\to R^n$ 连续，令 $h_t(x)=H(t,x)$. 若 $p\overline{\in}h_t(\partial\Omega)$，$\forall 0\leqslant t\leqslant1$，则 $\deg(h_t,\Omega,p)$ 保持常数(对于 $0\leqslant t\leqslant1$)；

(ⅳ)可解性(Kronecker 存在定理)：若 $\deg(f,\Omega,p)\neq0$，则方程 $f(x)=p$ 在 Ω 内必有解；

(ⅴ)切除性：设 Ω_0 是 Ω 的开子集，并且 $p\overline{\in}f(\bar{\Omega}\setminus\Omega_0)$，则

$$\deg(f,\Omega,p)=\deg(f,\Omega_0,p).$$

(vi)若 $p\overline{\in}f(\partial\Omega)$，则

$$\deg(f,\Omega,p)=\deg(f-p,\Omega,\theta),$$

其中 $f-p$ 表映象 $f(x)-p(\forall x\in\bar{\Omega})$，$\theta$ 表 R^n 中的零元素 $\theta=(0,0,\cdots,0)$.

证 (i)由于 $J_I(x)\equiv 1$，故由(1·25)式即得(i).

(ii)由于 $\bar{\Omega}_0=\bar{\Omega}\setminus(\Omega_1\cup\Omega_2)$是有界闭集，故

$$2\tau_0=\inf_{x\in\bar{\Omega}_0}\|f(x)-p\|=\min_{x\in\bar{\Omega}_0}\|f(x)-p\|>0.$$

取 C^2 映象，$g:\bar{\Omega}\to R^n$，使 $\max_{x\in\bar{\Omega}}\|f(x)-g(x)\|<\tau_0$. 于是 $\inf_{x\in\bar{\Omega}_0}\|g(x)-p\|>\tau_0$，并且根据定义 1.2 知

$$\deg(f,\Omega,p)=\deg(g,\Omega,p),$$

$$\deg(f,\Omega_1,p)=\deg(g,\Omega_1,p),$$

$$\deg(f,\Omega_2,p)=\deg(g,\Omega_2,p).$$

取定义 1.1 中的 Φ，使当 $r>\tau_0$ 时，恒有 $\Phi(r)=0$，于是，根据(1·5)式，并注意到

$$\int_{\bar{\Omega}_0}\Phi(\|g(x)-p\|)J_g(x)\mathrm{d}x=0,\qquad(1\cdot 36)$$

即得

$$\deg(g,\Omega,p)=\int_{\bar{\Omega}}\Phi(\|g(x)-p\|)J_g(x)\mathrm{d}x$$

$$=\left(\int_{\bar{\Omega}_1}+\int_{\bar{\Omega}_2}+\int_{\bar{\Omega}_0}\right)\Phi(\|g(x)-p\|)J_g(x)\mathrm{d}x$$

$$=\left(\int_{\bar{\Omega}_1}+\int_{\bar{\Omega}_2}\right)\Phi(\|g(x)-p\|)J_g(x)\mathrm{d}x$$

$$=\deg(g,\Omega_1,p)+\deg(g,\Omega_2,p),$$

由此即得(ii).

(ⅲ)由假定知 $\tau=\min\limits_{(t,x)\in[0,1]\times\partial\Omega}\|H(t,x)-p\|>0$. 根据引理 1.5, 可取 C^2 映象 $G:[0,1]\times\bar{\Omega}\to R^n$, 使

$$\max_{(t,x)\in[0,1]\times\bar{\Omega}}\|H(t,x)-G(t,x)\|<\tau.$$

令 $g_t(x)=G(t,x)$, 则 $p\overline{\in}g_t(\partial\Omega)$, $0\leqslant t\leqslant1$, 并且根据定义 1.2, 有

$$\deg(h_t,\Omega,p)=\deg(g_t,\Omega,p),\quad 0\leqslant t\leqslant1. \tag{1·37}$$

由 $G(t,x)$在$[0,1]\times\bar{\Omega}$ 的一致连续性, 知对任何 $0\leqslant t_0\leqslant1$, 有

$$\lim_{t\to t_0}\max_{x\in\bar{\Omega}}\|g_t(x)-g_{t_0}(x)\|=0.$$

于是, 由引理 1.7 知, 对每个 $t_0\in[0,1]$存在以 t_0 为中心的小开区间, 使当 t 在其中时 $\deg(g_t,\Omega,p)$不变. 由此, 利用有限覆盖定理知, 对一切 $0\leqslant t\leqslant1$, $\deg(g_t,\Omega,p)$都保持不变, 从而, 根据(1·37)式知 $\deg(h_t,\Omega,p)$保持不变(对 $0\leqslant t\leqslant1$).

(ⅳ)用反证法. 假定 $f(x)=p$ 在 Ω 内无解, 于是 $p\overline{\in}f(\bar{\Omega})$($p\overline{\in}f(\partial\Omega)$ 是预先假定了的). 从而 $2\tau_0=\min\limits_{x\in\bar{\Omega}}\|f(x)-p\|>0$. 由引理 1.5, 取 C^2 映象 $g:\bar{\Omega}\to R^n$, 使 $\max\limits_{x\in\bar{\Omega}}\|f(x)-g(x)\|<\tau_0$. 从而$\min\limits_{x\in\bar{\Omega}}\|g(x)-p\|>\tau_0$. 由定义 1.2 知

$$\deg(f,\Omega,p)=\deg(g,\Omega,p). \tag{1·38}$$

取定义 1.1 中的函数 Φ, 使当 $r>\tau_0$ 时有 $\Phi(r)=0$. 从而

$$\deg(g,\Omega,p)=\int_{\bar{\Omega}}\Phi(\|g(x)-p\|)J_g(x)\mathrm{d}x=0,$$

由此以及(1·38)式得 $\deg(f,\Omega,p)=0$, 此与假定矛盾.

(ⅴ)由可加性(ⅱ)知

$$\deg(f,\Omega,p)=\deg(f,\Omega_0,p)+\deg(f,\Omega\setminus\overline{\Omega_0},p).$$

由于 $p\overline{\in}(\bar{\Omega}\setminus\Omega_0)$, $\bar{\Omega}\setminus\Omega_0=\overline{\Omega\setminus\bar{\Omega}_0}$, 故由(ⅳ)知 $\deg(f,\Omega\setminus$

$\Omega_0, p) = 0$，由此即得

$$\deg(f, \Omega, p) = \deg(f, \Omega_0, p).$$

（ⅵ）根据定义 1.1 的(1·5)式及定义 1.2，显然可知（ⅵ）成立．证完．

注 8　由于 $J_I(x) \equiv 1$，故由(1·25)式得

$$\deg(I, \Omega, p) = 0, \quad \forall p \overline{\in} \overline{\Omega}. \tag{1·39}$$

定理 1.4　Brouwer 度具有下列性质：

1° 边界值性质：$\deg(f, \Omega, p)$ 只与 f 在 $\partial\Omega$ 上的值有关，即：若 f, g 都是映 $\overline{\Omega}$ 入 R^n 的连续映象，$p \in R^n \setminus f(\partial\Omega)$ 并且当 $x \in \partial\Omega$ 时恒有 $f(x) = g(x)$，则必有

$$\deg(f, \Omega, p) = \deg(g, \Omega, p);$$

2° 连通区性质：当 p 在 $R^n \setminus f(\partial\Omega)$ 的连通区中变动时，$\deg(f, \Omega, p)$ 保持不变，即：若 p_1, p_2 属于 $R^n \setminus f(\partial\Omega)$ 的同一连通区，那末

$$\deg(f, \Omega, p_1) = \deg(f, \Omega, p_2); \tag{1·40}$$

3° 缺方向性质：若存在 $y_0 \in R^n$，$y_0 \neq \theta$，使

$$x \in \partial\Omega, \quad \tau \geqslant 0 \Rightarrow f(x) \neq p + \tau y_0, \tag{1·41}$$

那末必有 $\deg(f, \Omega, p) = 0$；

4° 降维性质：若 f 映 $\overline{\Omega}$ 入 R^n 的低维子空间 $R^m (m < n)$，则对任何 $p \in R^n \setminus f(\partial\Omega)$，都有 $\deg(f, \Omega, p) = 0$.

证　1°令 $H(t, x) = (1-t)f(x) + tg(x)$，$t \in [0, 1]$，$x \in \overline{\Omega}$．又令 $h_t(x) = H(t, x)$．由假定，当 $x \in \partial\Omega$ 时，有 $h_t(x) = f(x) = g(x) (0 \leqslant t \leqslant 1)$，从而 $p \overline{\in} h_t(\partial\Omega) = f(\partial\Omega) (0 \leqslant t \leqslant 1)$；因此，根据同伦不变性得

$$\deg(f, \Omega, p) = \deg(h_0, \Omega, p) = (h_1, \Omega, p)$$

$$= \deg(g, \Omega, p).$$

2° 设 U 是 $R^n \setminus f(\partial\Omega)$ 的一个连通区．设 $p \in U$，则 $\tau = \inf_{x\in\partial\Omega} \|f(x) - p\| > 0$．取 $0 < r < \tau$，并考察 R^n 中的球 $T(p, r) = \{x \mid \|x - p\| < r\}$．对任何 $p_1 \in U \cap T(p, r)$，令 $H(t, x) = f(x) - t(p_1 - p)$，$\forall 0 \leqslant t \leqslant 1, x \in \bar{\Omega}$．于是当 $0 \leqslant t \leqslant 1, x \in \partial\Omega$ 时，有 $\|H(t, x) - p\| \geqslant \|f(x) - p\| - t\|p_1 - p\| > \tau - r > 0$，从而根据定理 1.3(ⅲ)(同伦不变性)及(ⅳ)知

$$\deg(f, \Omega, p) = \deg(f - (p_1 - p), \Omega, p)$$
$$= \deg(f - p_1, \Omega, \theta) = \deg(f, \Omega, p_1)$$

由此可知，映象 $\Psi: p \to \deg(f, \Omega, p)$ 是 U 上的连续函数．因 U 连通，故 $\Psi(U)$ 是 R^1 中的连通集(参看〔24〕定理 8.7)，但 Ψ 取整数值，故 $\Psi(U)$ 由一个点组成，即当 $p \in U$ 时 $\deg(f, \Omega, p)$ 取同一整数值．

3° 用反证法．若 $\deg(f, \Omega, p) \neq 0$．取 τ_0，使

$$\tau_0 > (\|p\| + \sup_{x\in\bar{\Omega}} \|f(x)\|) \cdot \|y_0\|^{-1}. \tag{1·42}$$

令 $H(t, x) = f(x) - t\tau_0 y_0$．由假定(1·41)知，当 $0 \leqslant t \leqslant 1, x \in \partial\Omega$ 时，恒有 $H(t, x) \neq p$，从而根据同伦不变性，知 $\deg(f, \Omega, p) = \deg(f - \tau_0 y_0, \Omega, p)$．于是 $\deg(f - \tau_0 y_0, \Omega, p) \neq 0$．由 Kronecker 存在定理知，存在 $x_0 \in \Omega$，使 $f(x_0) - \tau_0 y_0 = p$．由此可知 $\tau_0 \leqslant (\|p\| + \|f(x_0)\|) \cdot \|y_0\|^{-1}$，此与(1·42)式矛盾．

4° 可设 $p \in R^m$(因若 $p \overline{\in} R^m$，则由假定知 $p \overline{\in} f(\bar{\Omega})$，从而根据可解性知 $\deg(f, \Omega, p) = 0$)．取 $y_0 \in R^n \setminus R^m$，于是 $y_0 \neq \theta$．下证(1·41)式成立．事实上，若有 $x^* \in \partial\Omega, \tau^* \geqslant 0$，使 $f(x^*) = p + \tau^* y_0$．根据假定 $p \overline{\in} f(\partial\Omega)$，知 $\tau^* > 0$．于是 $y_0 = \frac{1}{\tau^*}(f(x^*) - p) \in R^m$，由此得出矛盾．因此(1·41)式成立．

根据缺方向性质，得 $\deg(f,\Omega,p)=0$. 证完．

定义 1.3 设 $f:\bar{\Omega}\to R^n$ 连续．设 $x_0\in\Omega$ 是 f 的孤立零点，即 $f(x_0)=\theta$，且存在 $\delta>0$，使当 $\|x-x_0\|\leqslant\delta$, $x\neq x_0$ 时，恒有 $f(x)\neq\theta$. 根据切除性质易知，对于含于球 $T(x_0,\delta)=\{x\mid\|x-x_0\|<\delta\}$ 内且含有点 x_0 的任何区域 ω, Brouwer 度 $\deg(f,\omega,\theta)$ 都取相同的数值．此数值叫做 f 的**零点 x_0 的指数**，记为 $\mathrm{ind}(f,x_0)$，即

$$\mathrm{ind}(f,x_0)=\deg(f,\omega,\theta),\quad\forall x_0\in\omega\subset T(x_0,\delta).\tag{1·43}$$

定理 1.5 设 $f:\bar{\Omega}\to R^n$ 连续．又设 $f(x)$ 在 $\partial\Omega$ 上没有零点，且在 Ω 内只有有限个零点 $x_1,\cdots,x_m$. 则有**指数公式**：

$$\deg(f,\Omega,\theta)=\sum_{i=1}^{m}\mathrm{ind}(f,x_i).\tag{1·44}$$

证 对 x_i，取(1·43)式中的 ω_i 很小，使诸 $\omega_i(i=1,2,\cdots,m)$ 互不相交，且均含于 Ω 内．于是 f 在 $\bar{\Omega}\setminus(\bigcup_{i=1}^{m}\omega_i)$ 上没有零点，因此，根据可加性(它对有限个区域的情形显然也成立)及(1·43)式，得

$$\deg(f,\Omega,\theta)=\sum_{i=1}^{m}\deg(f,\omega_i,\theta)=\sum_{i=1}^{m}\mathrm{ind}(f,x_i).$$

证完．

定理 1.6 设 $f:\Omega\to R^n$ 是 C^1 映象，$x_0\in\Omega$. 若 $f(x_0)=\theta$, $J_f(x_0)\neq0$，则 x_0 是 f 的孤立零点，并且

$$\begin{aligned}\mathrm{ind}(f,x_0)&=\mathrm{ind}(f'(x_0),\theta)=\mathrm{sgn}J_f(x_0)\\&=\mathrm{sgn}\prod_{i=1}^{n}\lambda_i=(-1)^{\beta},\end{aligned}\tag{1·45}$$

其中 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 表线性算子 $f'(x_0):R^n\to R^n$ 的全部固有值(按代数重数计算)，β 表这些固有值中满足 $\lambda_i<0$ 的个数．

证 由反函数定理(第一章定理 4.2)知 x_0 是 f 的孤立零点．由 $\det f'(x_0)=J_f(x_0)\neq 0$ 知 $f'(x_0)$有有界逆,从而存在 $\alpha>0$,使$\|f'(x_0)h\|\geqslant\alpha\|h\|$, $\forall h\in R^n$. 取 $\tau>0$ 很小,使

$$f(x_0+h)\neq\theta,\quad \|f(x_0+h)-f(x_0)-f'(x_0)h\|<\alpha\|h\|,$$
$$\forall\, 0<\|h\|\leqslant r.$$

令 $\omega_0=\{h\mid\|h\|<r\}$, $\omega=\{x\mid\|x-x_0\|<r\}$. 由当 $h\in\partial\omega_0$, $0\leqslant t\leqslant 1$ 时,有

$$\begin{aligned}&\|f'(x_0)h+t[f(x_0+h)-f'(x_0)h]\|\\ \geqslant&\|f'(x_0)h\|4-t\|f(x_0+h)-f'(x_0)h\|\\ >&\alpha\|h\|-\alpha\|h\|=0,\end{aligned}$$

根据同伦不变性知, $\deg(f'(x_0),\omega_0,\theta)=\deg(f,\omega,\theta)$, 即 $\operatorname{ind}(f'(x_0),\theta)=\operatorname{ind}(f,x_0)$. 由于 $f'(x_0)$是 C^2 映象,根据公式(1·25)知

$$\operatorname{ind}(f'(x_0),\theta)=\operatorname{sgn}\ \det f'(x_0)=\operatorname{sgn}J_f(x_0).$$

由高等数学知

$$\det(f'(x_0)-\lambda I)=(\lambda_1-\lambda)(\lambda_2-\lambda)\cdots(\lambda_n-\lambda),$$

令 $\lambda=0$, 得 $\det f'(x_0)=\prod_{i=1}^{n}\lambda_i$. 另外,去掉正的 λ_i 和复数 λ_i (复数 λ_i 和它的共轭复数$\bar{\lambda}_i$ 必定同时是$f'(x_0)$的固有值),显然不影响 $\prod_{i=1}^{n}\lambda_i$ 的符号,因此 $\operatorname{sgn}\prod_{i=1}^{n}\lambda_i=(-1)^\beta$. 证完．

系 若 $-p\in\Omega$, 则 $\deg(-I,\Omega,p)=(-1)^n$;特别地,有 $\operatorname{ind}(-I,\theta)=(-1)^n$.

我们还可以证明下面两个定理(证明略去,可参看〔9〕、〔4〕).

定理 1.7(Borsuk) 设 $T_r=\{x\mid x\in R^n,\|x\|<r\}$. 若 f: $\overline{T}_r\to R^n$ 连续,并且在∂T_r 上是奇的,不为零的：

$$f(-x)=-f(x),\quad f(x)\neq\theta,\quad \forall\, x\in\partial T_r,\tag{1·46}$$

那末 $\deg(f,T_r,\theta)$ 必是奇数.

注 9 当把 T_r 换为关于 θ 对称的(即 $x\in\Omega$ 蕴涵 $-x\in\Omega$)、含 θ 的有界开集 Ω 时,定理 1.7 仍然成立(证明参看〔13〕、〔11〕).

定理 1.8 设 $T_r=\{x\mid x\in R^n,\|x\|<r\}$. 若 $f:\overline{T}_r\to R^n$ 连续,并且在 ∂T_r 上是偶的,不为零的:

$$f(-x)=f(x),\quad f(x)\neq\theta,\quad \forall\, x\in\partial T_r,\tag{1·47}$$

那末 $\deg(f,T_r,\theta)$ 必是偶数;若更设 R^n 的维数 n 是奇数,则有 $\deg(f,T_r,\theta)=0$.

利用这两个定理,可证下面两个定理.

定理 1.9 设 $T_r=\{x\mid x\in R^n,\|x\|<r\}$. 若 $f:\overline{T}_r\to R^n$ 连续,在 ∂T_r 上 $f(x)\neq\theta$,并且 $f(-x)$ 与 $f(x)$ 方向不相同:

$$f(-x)\neq\lambda f(x),\quad \forall\, x\in\partial T_r,\quad \lambda>0,\tag{1·48}$$

那末 $\deg(f,T_r,\theta)$ 必为奇数.

证 令 $H(t,x)=f(x)-tf(-x)$. 由(1·48)式及 $f(x)\neq\theta(\forall\, x\in\partial T_r)$ 知,$H(t,x)\neq\theta$, $\forall\, x\in\partial T_r$, $0\leqslant t\leqslant 1$. 从而根据同伦不变性知

$$\deg(f,T_r,\theta)=\deg(H(0,\cdot),T_r,\theta)=\deg(H(1,\cdot),T_r,\theta).$$

但 $H(1,-x)=-H(1,x)$,故由 Borsuk 定理(定理 1.7)知 $\deg(H(1,\cdot),T_r,\theta)$ 是奇数. 证完.

注 10 由定理1.7后的注 9 知:当把 T_r 换为关于 θ 对称的、含 θ 的有界开集 Ω 时,定理 1.9 仍然成立.

定理 1.10 设 $T_r=\{x\mid x\in R^n,\|x\|<r\}$. 若 $f:\overline{T}_r\to R^n$ 连续,在 ∂T_r 上 $f(x)\neq\theta$,并且 $f(-x)$ 与 $f(x)$ 方向不相反:

$$f(-x)\neq-\lambda f(x),\quad \forall x\in\partial T_r,\quad \lambda>0, \tag{1·49}$$

那末 $\deg(f, T_r, \theta)$ 必为偶数;若更设 n 是奇数,则必有 $\deg(f, T_r, \theta)=0$.

证 证明与定理 1.9 类似,只须令 $H(t, x)=f(x)+tf(-x)$,并注意到 $H(1,-x)=H(1,x)$,引用定理 1.8 即可.证完.

注 11 显然,条件(1·48)式与条件(1·49)式可分别写为

$$\frac{f(-x)}{\|f(-x)\|}\neq\frac{f(x)}{\|f(x)\|},\quad \forall x\in\partial T_r \tag{1·50}$$

与

$$\frac{f(-x)}{\|f(-x)\|}\neq-\frac{f(x)}{\|f(x)\|},\quad \forall x\in\partial T_r.$$

利用 Brouwer 度,可以得出一些有用的不动点定理和方程解的存在性原理.

定理 1.11(锐角原理) 设 Ω 是 R^n 中有界开集,$\theta\in\Omega$.设 $f:\bar{\Omega}\to R^n$ 连续,并且当 $x\in\partial\Omega$ 时,恒有 $(f(x), x)\geqslant 0$.则方程 $f(x)=\theta$ 在 $\bar{\Omega}$ 中必有解(即 f 在 $\bar{\Omega}$ 中必有零点).

证 可设 $f(x)\neq\theta$, $\forall x\in\partial\Omega$(否则,定理已获证).令 $h_t(x)=(1-t)x+tf(x)$, $\forall x\in\bar{\Omega}$, $0\leqslant t\leqslant 1$.于是,由

$$\|h_t(x)\|^2=(h_t(x), h_t(x))=(1-t)^2\|x\|^2$$
$$+2t(1-t)(f(x), x)+t^2\|f(x)\|^2,$$

根据假定,知当 $x\in\partial\Omega$, $0\leqslant t\leqslant 1$ 时,有 $\|h_t(x)\|^2>0$,从而 $\theta\overline{\in} h_t(\partial\Omega)$, $0\leqslant t\leqslant 1$,于是,根据 Brouwer 度的同伦不变性与正规性,得

$$\deg(f, \Omega, \theta)=\deg(h_1, \Omega, \theta)=\deg(h_0, \Omega, \theta)$$
$$=\deg(I, \Omega, \theta)=1.$$

由此可知，存在 $x_0\in\Omega$，使 $f(x_0)=\theta$. 证完．

注 12 条件 $(F(x),x)\geqslant 0(\forall x\in\partial\Omega)$ 表示向量 x 与 $f(x)$ 的夹角 α 是锐角($0\leqslant\alpha\leqslant 90°$)(图 2-1·3)，故称锐角原理．

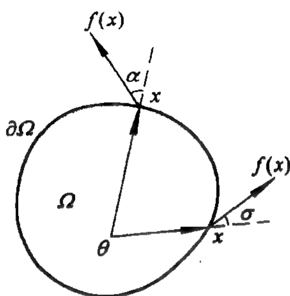


图 2-1·3

定理 1.12 设 Ω 是 R^n 中有界开集，$\theta\in\Omega$. 设 $F:\bar{\Omega}\to R^n$ 连续并且当 $x\in\partial\Omega$ 时，恒有

$$(F(x),x)\leqslant\|x\|^2. \tag{1·51}$$

那末 F 在 $\bar{\Omega}$ 内必具有不动点，即存在 $x_0\in\bar{\Omega}$，使 $F(x_0)=x_0$.

证 令 $f=I-F$，则当 $x\in\partial\Omega$ 时，$(f(x),x)=(x,x)-(F(x),x)\geqslant 0$，于是，根据锐角原理知，存在 $x_0\in\bar{\Omega}$，使得 $f(x_0)=\theta$，即 $F(x_0)=x_0$. 证完．

系 在定理 1.12 中，将条件(1·51)换为

$$\|F(x)\|\leqslant\|x\|,\quad\forall x\in\partial\Omega, \tag{1·52}$$

则定理 1.12 的结论仍成立．

事实上，从(1·52)式可推出(1·51)式：

$$(F(x),x)\leqslant\|F(x)\|\cdot\|x\|\leqslant\|x\|^2,\quad\forall x\in\partial\Omega.$$

定理 1.13(Brouwer 不动点定理) 设 D 是 R^n 中某有界凸闭集，$F:D\to D$ 连续，则 F 在 D 上必有不动点．

证 取球 $\Omega=T(\theta,R)=\{x\,|\,x\in R^n,\|x\|<R\}$，使 $\Omega\supset D$. 由延拓定理(见第一章定理 2.7)，可将 F 延拓为 $\tilde{F}:\bar{\Omega}\to D$ 连续．显然，当 $x\in\partial\Omega$ 时，恒有

$$\|\tilde{F}(x)\|<R=\|x\|,$$

故(1·52)式满足．于是，根据定理 1.12 的系知，存在 $x_0\in\bar{\Omega}$，使 $\tilde{F}(x_0)=x_0$．由于 $\tilde{F}$ 映 $\bar{\Omega}$ 入 D，故知 $\tilde{F}(x_0)\in D$，从而 $x_0\in D$，$F(x_0)=\tilde{F}(x_0)=x_0$．证完．

定理 1.14(Coercive 映象) 设 $F:R^n\to R^n$ 连续，并且

$$\lim_{\|x\|\to+\infty}\frac{(F(x),x)}{\|x\|}=+\infty. \tag{1·53}$$

则映象 F 是满射的，即 $F(R^n)=R^n$．

证 任给 $y\in R^n$，取 ρ 充分大，使在球面 $\|x\|=\rho$ 上有

$$(F(x)-y,x)\geqslant\|x\|\left[\frac{(F(x),x)}{\|x\|}-\|y\|\right]>0,$$

于是，根据锐角原理，知方程 $F(x)=y$ 在球 $\|x\|\leqslant\rho$ 中有解．证完．

注 13 满足(1·53)式的映象 F 称为 **Coercive 映象(强制映象)**．在 $F:R^1\to R^1$(即 $n=1$)的情形下，条件(1·53)为：

$$\lim_{x\to+\infty}F(x)=+\infty,\quad 且\ \lim_{x\to-\infty}F(x)=-\infty.$$

定理 1.15(强单调映象) 设 $F:R^n\to R^n$ 连续，并且满足

$$(F(x)-F(y),x-y)\geqslant\alpha(\|x-y\|)\cdot\|x-y\|,$$
$$\forall x,y\in R^n, \tag{1·54}$$

其中 $\alpha(0)=0$；$\alpha(t)>0$，$\forall t>0$；$\lim\limits_{t\to+\infty}\alpha(t)=+\infty$．

那末 F 是满射的，并且是一一对应的(即对任何 $y\in R^n$，方程 $F(x)=y$ 在 R^n 中具有惟一解)．

证 由于

$$(F(x),x)=(F(x)-F(\theta),x)+(F(\theta),x)$$
$$\geqslant[\alpha(\|x\|)-\|F(\theta)\|]\|x\|,$$

故条件(1·53)式满足．因此，由定理 1.14 知 F 是满射的．另外，由(1·54)式又知，若 $x\neq y$，则有 $(F(x)-F(y),x-y)>0$，

从而 $F(x)\neq F(y)$. 证完.

系 在定理 1.15 的条件下,若更设函数 $\alpha(t)$ 在 $0<t<+\infty$ 上是连续的,那末 F 是 R^n 与 R^n 之间的同胚映象.

证 只需证明,若 $F(x_n)\to F(x_0)$,则必有 $x_n\to x_0$. 事实上,若 $x_n\not\to x_0$,则存在子列 $\{x_{n_k}\}$,使 $\|x_{n_k}-x_0\|\to t_0$, $0<t_0\leqslant+\infty$. 由(1·54)式知

$$\begin{aligned}&\|F(x_{n_k})-F(x_0)\|\cdot\|x_{n_k}-x_0\|\\ \geqslant&(F(x_{n_k})-F(x_0),x_{n_k}-x_0)\\ \geqslant&\alpha(\|x_{n_k}-x_0\|)\cdot\|x_{n_k}-x_0\|,\end{aligned}$$

从而
$$\|F(x_{n_k})-F(x_0)\|\geqslant\alpha(\|x_{n_k}-x_0\|).$$
由此,令 $k\to\infty$ 取极限得 $0\geqslant\alpha(t_0)$(当 $t_0=+\infty$ 时,$\alpha(t_0)$ 应理解为 $\lim\limits_{t\to+\infty}\alpha(t)$),此与假定矛盾. 证完.

注 14 满足(1·54)式的映象 F 称为**强单调映象**. 特别,若令 $\alpha(t)=ct$, $c>0$,则(1·54)式为

$$(F(x)-F(y),x-y)\geqslant c\|x-y\|^2. \qquad (1·55)$$

这时,根据定理 1.15 的系知:若 $F:R^n\to R^n$ 连续且满足(1·55)式,那末 F 是 R^n 与 R^n 之间的同胚映象.

在第四章中将讨论一般的单调映象(算子).

下面讨论 Brouwer 度的乘积定理. 设 Ω 是 R^n 的有界开集,$f:\bar\Omega\to R^n$ 连续. 用 $D_i(i=1,2,\cdots)$ 表开集 $R^n\setminus f(\partial\Omega)$ 的全部连通区(注意,这些连通区最多可数个,因为对每个 D_i,可取有理点 $r_i\in D_i$,而有理点——即坐标为有理数的点——是可数的). 由 Brouwer 度的连通区性质知,当 p 在 D_i 中变动时,$\deg(f,\Omega,p)$ 是常数,用 $\deg(f,\Omega,D_i)$ 表此常数.

引理 1.8 设 $f:\bar\Omega\to R^n$ 连续,$f_k:R^n\to R^n$ 是 C^2 映射($k=$

$1,2,\cdots$)，并且当 $k\to+\infty$ 时，$f_k(x)$ 在 $\bar{\Omega}$ 上一致收敛于 $f(x)$. 设 $F:R^n\to R^1$ 连续，并且在 $f(\partial\Omega)$ 的某邻域内 $F(x)=0$. 又设存在 $\beta>0$，使当 $\|x\|\geqslant\beta$ 时恒有 $F(x)=0$.

那末，必有正整数 k_0 存在，使当 $k\geqslant k_0$ 时，$F(f_k(x))$ 在 $\partial\Omega$ 的某邻域（依赖于 k）内为零，并且

$$\int_{\Omega}F(f_k(x))J_{f_k}(x)\mathrm{d}x=\sum_i\deg(f,\Omega,D_i)\int_{\bar{D}_i}F(z)\mathrm{d}z \tag{1·56}$$

当 D_i 有无穷多个时，必存在正整数 i_0，使当 $i>i_0$ 时，$F(z)$ 在 $z\in\bar{D}_i$ 上恒为零，因此(1·56)式右端实际为有限项的和．

证　令 $C_F=\mathrm{supp}F$（F 的支集），即 $C_F=\overline{M}$, $M=\{z\,|\,z\in R^n, F(z)\neq0\}$. 由假定知 C_F 为有界闭集且

$$C_F\cap f(\partial\Omega)=\varnothing. \tag{1·57}$$

于是 $C_F\subset R^n\setminus f(\partial\Omega)=\bigcup\limits_i D_i$，因此，若 D_i 有无穷多个，根据有限覆盖定理知，存在 i_0，使 $C_F\subset\bigcup\limits_{i=1}^{i_0}D_i$. 于是显然当 $z\in D_i$（$i>i_0$）时，恒有 $F(z)=0$. 故(1·56)式右端实际为有限项的和．由(1·57)式并注意到 C_F, $f(\partial\Omega)$ 都是 R^n 中有界闭集，可知存在 $\varepsilon_0>0$，使

$$\|f(x)-z\|>\varepsilon_0,\quad\forall x\in\partial\Omega,\quad z\in C_F. \tag{1·58}$$

由此又知：存在 k^*，使

$$\|f_k(x)-z\|>\varepsilon_0,\quad\forall x\in\partial\Omega,\quad z\in C_F,\quad k\geqslant k^*. \tag{1·59}$$

由(1·59)式即知，当 $k\geqslant k^*$ 时，$F(f_k(x))$ 在 $\partial\Omega$ 的某邻域（依赖于 k）内恒为零．

现任取满足定义 1.1 中条件（ⅰ），（ⅱ）的非负连续函数 $\Phi_\tau:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$，并使那里的 $\tau^*<\varepsilon_0$. 于是，根据定

义 1.1，并注意到(1·59)式，得

$$\deg(f_k, \Omega, z) = \int_{\bar{\Omega}} \Phi_{\tau^*}(\|f_k(x) - z\|) J_{f_k}(x) \mathrm{d}x,$$

$$\forall z \in C_F, \quad k \geqslant k^*. \tag{1·60}$$

由于 $f_k(x)$ 在 $\bar{\Omega}$ 上一致收敛于 $f(x)$，故根据定义 1.2 及(1·58)式知：存在 $k_0 \geqslant k^*$，使当 $k \geqslant k_0$ 时，有

$$\deg(f, \Omega, z) = \deg(f_k, \Omega, z), \quad \forall z \in C_F,$$

从而，注意到(1·60)，得

$$\deg(f, \Omega, z) = \int_{\bar{\Omega}} \Phi_{\tau^*}(\|f_k(x) - z\|) J_{f_k}(x) \mathrm{d}x,$$

$$\forall z \in C_F, \quad k \geqslant k_0. \tag{1·61}$$

显然，上面的 k^* 及 k_0 均与 Φ_{τ^*} 的选取无关(只要 $\tau^* < \varepsilon_0$)，也与 $z \in C_F$ 无关. 用 $\eta(x)$ 表集 $\bar{\Omega}$ 的特征函数，即当 $x \in \bar{\Omega}$ 时，令 $\eta(x) = 1$，当 $x \in R^N \setminus \bar{\Omega}$ 时，令 $\eta(x) = 0$. 于是，由(1·61)式，有

$$\deg(f, \Omega, z) F(z) = \int_{R^n} F(z) \Phi_{\tau^*}(\|f_k(x) - z\|) \eta(x) J_{f_k}(x) \mathrm{d}x,$$

$$\forall z \in R^n, \quad k \geqslant k_0. \tag{1·62}$$

(注意，当 $z \in f(\partial\Omega)$ 时，等式左端的 $\deg(f, \Omega, z)$ 无意义，我们把它理解为零，这时，等式(1·62)也成立). 在(1·62)式两端对 z 在 R^n 积分，得

$$\int_{R^n} \deg(f, \Omega, z) F(z) \mathrm{d}z$$

$$= \int_{R^n} F_{\tau^*}(f_k(x)) \eta(x) J_{f_k}(x) \mathrm{d}x \quad \forall k \geqslant k_0, \tag{1·63}$$

其中

$$F_{\tau^*}(y) = \int_{R^n} \Phi_{\tau_*}(\|y - z\|) F(z) \mathrm{d}z \quad (y \in R^n). \tag{1·64}$$

注意到 $\Phi_{\tau^*}(r)$ 非负($0 \leqslant r < +\infty$)，有(对 $y \in R^n$)

$$|F_{\tau^*}(y)-F(y)|=\left|\int_{R^n}\Phi_{\tau^*}(\|y-z\|)(F(z)-F(y))\mathrm{d}z\right|$$

$$\leqslant\int_{R_n}\Phi_{\tau^*}(\|y-z\|)|F(z)-F(y)|\mathrm{d}z$$

$$\leqslant(\max_{\|z-y\|\leqslant\tau^*}|F(z)-F(y)|)\int_{R^n}\Phi_{\tau^*}(\|y-z\|)\mathrm{d}z$$

$$=\max_{\|z-y\|\leqslant\tau^*}|F(z)-F(y)|\leqslant\xi(\tau^*),\tag{1·65}$$

其中 $\xi(\tau^*)=\sup\limits_{y\in R^n}(\max\limits_{\|z-y\|\leqslant\tau^*}|F(z)-F(y)|)$. 由于当$\|z\|\geqslant\beta$时 $F(z)=0$, 并根据 $F(z)$在$\|z\|\leqslant\beta+1$ 上的一致连续性, 即知:当 $\tau^*\rightarrow0+$时, $\xi(\tau^*)\rightarrow0$. 于是, 由(1·65)式知:当 $\tau^*\rightarrow+0$ 时, $F_{\tau^*}(y)$在 R^n 上一致收敛于$F(y)$. 由此即知

$$\lim_{\tau^*\rightarrow+0}\int_{R^n}F_{\tau^*}(f_k(x))\eta(x)J_{f_k}(x)\mathrm{d}x$$

$$=\lim_{\tau^*\rightarrow+0}\int_{\bar{\Omega}}F_{\tau^*}(f_k(x))J_{f_k}(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_{\bar{\Omega}}F(f_k(x))\mathrm{d}x,$$

于是, 在(1·63)式中令 $\tau^*\rightarrow+0$ 取极限, 得

$$\int_{R^n}\deg(f,\Omega,z)F(z)\mathrm{d}z$$

$$=\int_{\bar{\Omega}}F(f_k(x))J_{f_k}(x)\mathrm{d}x\quad\forall k\geqslant k_0.\tag{1·66}$$

又显然

$$\int_{R^n}\deg(f,\Omega,z)F(x)\mathrm{d}z$$

$$=\sum_i\int_{\bar{D}_i}\deg(f,\Omega,z)F(z)\mathrm{d}z$$

$$=\sum_i\deg(f,\Omega,D_i)\int_{\bar{D}_i}F(z)\mathrm{d}z.\tag{1·67}$$

于是，由(1·66)式与(1·67)式即得(1·56)式．证完．

系 1 设 $f:\bar{\Omega}\to R^n$ 连续，$f_k:R^n\to R^n$ 是 C^2 映象($k=1,2,\cdots$)，并且当 $k\to\infty$ 时 $f_k(x)$在 $\bar{\Omega}$ 上一致收敛于 $f(x)$. 又设 $p\in R^n$，使$\|f(x)-p\|>\varepsilon_0$，$\forall x\in\partial\Omega$，其中 ε_0 是某正数．再设 $F:R^n\to R^1$ 连续，当$\|z-p\|\geqslant\varepsilon_0$ 时，$F(z)=0$，并且

$$\int_{R^n}F(z)\mathrm{d}z=1.$$

那末，必存在 k_0，使当 $k\geqslant k_0$ 时，$F(f_k(x))$在$\partial\Omega$ 的某邻域(依赖于 k)内为零，并且

$$\deg(f,\Omega,p)=\int_{\bar{\Omega}}F(f_k(x))J_{f_k}(x)\mathrm{d}x. \qquad (1\cdot 68)$$

证 F 显然满足引理 1.8 中的条件．故(1·56)式成立．用 S_0 表闭球$\{z\,|\,z\in R^n,\ \|z-p\|\leqslant\varepsilon_0\}$．于是，由假定知，在诸 D_i 中必有某D_{i_0}，使 $S_0\subset D_{i_0}$；从而，在其他的 $\bar{D}_i(i\neq i_0)$上，恒有 $F(x)=0$. 由此可知

$$\sum_i\deg(f,\Omega,D_i)\int_{\bar{D}_i}F(z)\mathrm{d}z=\deg(f,\Omega,D_{i_0})\int_{\bar{D}_{i_0}}F(z)\mathrm{d}z$$

$$=\deg(f,\Omega,p)\int_{S_0}F(z)\mathrm{d}z=\deg(f,\Omega,p)\int_{R^n}F(z)\mathrm{d}z$$

$$=\deg(f,\Omega,p).$$

证完．

系 2 设 $f:R^n\to R^n$ 是 C^2 映象，$p\in R^n$，使$\|f(x)-p\|>\varepsilon_0$，$\forall x\in\partial\Omega$，其中 ε_0 是某正数．又设 $F:R^n\to R^1$ 连续，当$\|z-p\|\geqslant\varepsilon_0$ 时，$F(z)=0$，并且$\int_{R^n}F(z)=1$. 那末，必有

$$\deg(f,\Omega,p)=\int_{\bar{\Omega}}F(f(x))J_f(x)\mathrm{d}x. \qquad (1\cdot 69)$$

证 在系 1 中取 $f_k = f(k=1,2,\cdots)$ 即获得证.

定理 1.16(拓扑度乘积定理) 设 $f:\bar{\Omega}\to R^n$ 连续,用 $D_i(i=1,2,\cdots)$ 表开集 $R^n\setminus f(\partial\Omega)$ 的全部连通区. 设 $g:f(\bar{\Omega})\to R^n$ 连续. $p\in R^n\setminus gf(\partial\Omega)$. 那末,下面的公式成立:

$$\deg(gf,\Omega,p)=\sum_{D_i\subset f(\Omega)}\deg(f,\Omega,D_i)\cdot\deg(g,D_i,p), \quad (1\cdot 70)$$

并且,当 D_i 有无穷多个时,必存在正整数 i_0,使当 $i>_0$ 时,恒有 $\deg(g,D_i,p)=0(\forall D_i\subset f(\Omega))$,因此(1·70)式右端实际为有限项的和.

证 先证(1·70)式右端实际是有限项的和. 事实上,易知原象 $g^{-1}(p)=\{y\mid y\in f(\bar{\Omega}),g(y)=p\}$ 是 R^n 中有界闭集,并且

$$g^{-1}(p)\cap f(\partial\Omega)=\varnothing. \quad (1\cdot 71)$$

从而 $g^{-1}(p)\subset\bigcup_i D_i$. 因此,若 D_i 有无穷多个,根据有限覆盖定理知,存在 i_0,使 $g^{-1}(p)\subset\bigcup_{i=1}^{i_0}D_i$,从而

$$g^{-1}(p)\cap D_i=\varnothing \quad (i>i_0). \quad (1\cdot 72)$$

由(1·71)式与(1·72)式知:当 $y\in\bar{D}_i(i>i_0)$ 时,必有 $g(y)\neq p$,于是,

$$\deg(g,D_i,p)=0 \quad (i>i_0,\ D_i\subset f(\Omega)), \quad (1\cdot 73)$$

因此,(1·70)式右端实际为有限项的和.

由引理 1.5 知,存在 C^2 映象 $f_k:R^n\to R^n$ 和 $g_k:R^n\to R^n(k=1,2,\cdots)$,使得当 $k\to\infty$ 时(图 2-1·4),

$$f_k(x)\to f(x) \quad (\text{关于 } x\in\bar{\Omega} \text{ 是一致的}) \quad (1\cdot 74)$$

$$g_k(x)\to g(x) \quad (\text{关于 } y\in f(\bar{\Omega}) \text{ 是一致的}). \quad (1\cdot 75)$$

令

$$u_k(x)=g_k(f(x)),\quad \forall x\in\bar{\Omega},\quad k=1,2,\cdots,$$

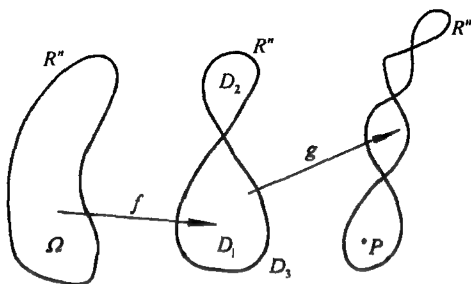


图 2-1·4 就图示情况，满足 $D_i \subset f(\Omega)$ 的 D_i 是 D_1 与 D_2

$$u_{ks}(x) = g_k(f_s(x)), \quad \forall x \in R^n, \quad k, s = 1, 2, \cdots.$$

于是，由(1·74)式与(1·75)式知，当 $k \to \infty$ 时，

$$u_k(x) \to g(f(x)) \quad (\text{关于 } x \in \bar{\Omega} \text{ 是一致的}), \tag{1·76}$$

并且，当 $s \to \infty$ 时，

$$u_{ks}(x) \to u_k(x) \quad (\text{关于 } x \in \bar{\Omega} \text{ 是一致的}). \tag{1·77}$$

由假定知，存 $\varepsilon_0 > 0$ 在，使

$$\| g(y) - p \| > \varepsilon_0, \quad \forall y \in f(\partial\Omega); \tag{1·78}$$

从而根据(1·75)式知，存在正整数 k_0，使

$$\| g_k(y) - p \| > \varepsilon_0, \quad y \in f(\partial\Omega), \quad k \geqslant k_0. \tag{1·79}$$

(1·78)式与(1·79)式又可分别写为

$$\| g(f(x)) - p \| > \varepsilon_0, \quad \forall x \in \partial\Omega \tag{1·80}$$

与

$$\| u_k(x) - p \| > \varepsilon_0, \quad \forall x \in \partial\Omega, \quad k \geqslant k_0. \tag{1·81}$$

作连续映象 $F: R^n \to R^1$，使当 $\| z - p \| \geqslant \varepsilon_0$ 时，恒有 $F(z) = 0$，并且 $\int_{R^n} F(z) \mathrm{d}z = 1$(关于这种映象的作法，可参看引理 1.5 的

证明过程). 由(1·74)式可取 $\beta>0$, 使$\|f_k(x)\|\leqslant\beta(\forall x\in\bar{\Omega}, k=1,2,\cdots)$, 从而有$\|f(x)\|\leqslant\beta(\forall x\in\bar{\Omega})$. 作连续映象 $G: R^n\to r^1$, 使当$\|y\|\leqslant\beta$时, $G(y)=1$, 当$\|y\|\geqslant\beta+1$时, $G(y)=0$, 由(1·81)式及(1·77)式, 应用引理 1.8 的系 1, 并注意到 $J_{u_{ks}}(x)=J_{g_k}(f_s(x))J_{f_s}(x)$, 得知: 对每个 $k\geqslant k_0$, 存在 $s_0(k)$, 使当 $s\geqslant s_0(k)$时, 恒有

$$\begin{aligned}\deg(u_k,\Omega,p)&=\int_{\bar{\Omega}}F(u_{ks}(x))J_{u_{ks}}(x)\mathrm{d}x\\&=\int_{\bar{\Omega}}F_k(f_s(x))J_{f_s}(x)\mathrm{d}x,\end{aligned}\qquad(1\cdot82)$$

其中 $F_k(y)=F(g_k(y))J_{g_k}(y)G(y)$. 由(1·79)式知, $F_k(y)(k\geqslant k_0)$在 $f(\partial\Omega)$的某邻域内恒为零, 并且当$\|y\|\geqslant\beta+1$时 $F_k(y)=0$; 因此, 根据引理 1.8 知, 存在 $s_1(k)\geqslant s_0(k)$, 使当 $s\geqslant s_1(k)(k\geqslant k_0)$时, 恒有

$$\int_{\bar{\Omega}}F_k(f_s(x))\mathrm{d}x=\sum_i\deg(f,\Omega,D_i)\int_{\bar{D}_i}F_k(y)\mathrm{d}y.\qquad(1\cdot83)$$

当 D_i 不含于$f(\Omega)$内时, 必有 $D_i\cap f(\bar{\Omega})=\varnothing$, 从而 $\deg(f,\Omega,D_i)=0$; 又当 $\bar{D}_i\subset f(\Omega)$时, 有 $\bar{D}_i\subset f(\bar{\Omega})$, 从而当 $y\in\bar{D}_i$ 时有$\|y\|\leqslant\beta$, $G(y)=1$. 于是, 有

$$\begin{aligned}&\sum_i\deg(f,\Omega,D_i)\int_{\bar{D}_i}F_k(y)\mathrm{d}y\\&=\sum_{D_i\subset f(\Omega)}\deg(f,\Omega,D_i)\int_{\bar{D}_i}F(g_k(y))J_{g_k}(y)\mathrm{d}y.\end{aligned}\qquad(1\cdot84)$$

由于 $g_k: R^n\to R^n$ 是 C^2 映象, 并显然有$\partial D_i\subset f(\partial\Omega)$, 故应用引理 1.8 系 2(注意到(1·79)式), 知

$$\int_{\bar{D}_i}F(g_k(y))J_{g_k}(y)\mathrm{d}y=\deg(g_k,D_i,p),\quad\forall k\geqslant k_0,$$

由(1·84)式知

$$\sum_i \deg(f,\Omega,D_i)\int_{\bar{D}_i} F_k(y)\mathrm{d}y$$
$$= \sum_{D_i\subset f(\Omega)} \deg(f,\Omega,D_i)\deg(g_k,D_i,p), \quad \forall k\geqslant k_0. \quad (1\cdot 85)$$

由(1·82)式、(1·83)式及(1·85)式，得

$$\deg(u_k,\Omega,p) = \sum_{D_i\subset f(\Omega)} \deg(f,\Omega,D_i)\deg(g_k,D_i,p),$$
$$\forall k\geqslant k_0 \quad (1\cdot 86)$$

由(1·78)式，注意到$\partial D_i\subset f(\partial\Omega)$，根据定义 1.2 知：存在 $k_1\geqslant k_0$，使当 $k\geqslant k_1$ 时，恒有

$$\deg(g,D_i,p) = \deg(g_k,D_i,p), \quad \forall D_i\subset f(\Omega). \quad (1\cdot 87)$$

又由(1·76)式，可取 $k_2\geqslant k_1$，使当 $k\geqslant k_2$ 时，恒有

$$\max_{x\in\bar{\Omega}}\|g(f(x)) - u_k(x)\| < \varepsilon_0.$$

令 $h_t(x) = tg(f(x)) + (1-t)u_k(x)$，$0\leqslant t\leqslant 1$，$x\in\bar{\Omega}$（$k\geqslant k_1$，$k$ 固定）．于是，当 $t\in[0,1]$，$x\in\partial\Omega$ 时，有

$$\|h_t(x) - p\| \geqslant \|g(f(x)) - p\| - (1-t)$$
$$\cdot\|g(f(x)) - u_k(x)\| > \varepsilon_0 - \varepsilon_0 = 0,$$

故由同伦不变性知 $\deg(h_0,\Omega,p) = \deg(h_1,\Omega,p)$，即

$$\deg(u_k,\Omega,p) = \deg(gf,\Omega,p), \quad \forall k\geqslant k_2. \quad (1\cdot 88)$$

由(1·86)式、(1·87)式及(1·88)式得(1·70)式．证完．

系 1　在定理 1.16 的条件下，若 $f(\Omega)$本身是一个连通开集，则

$$\deg(gf,\Omega,p) = \deg(f,\Omega,f(\Omega))\deg(g,f(\Omega),p). \quad (1\cdot 89)$$

系 2　设 x_0 是连续映象 f 的孤立零点，而 θ 又是连续映象 g 的孤立零点，则 x_0 是映象 gf 的孤立零点，并且

$$\mathrm{ind}(gf,x_0) = \mathrm{ind}(f,x_0)\cdot\mathrm{ind}(g,\theta). \quad (1\cdot 90)$$

证　由假定，存在以 θ 为中心的某开球ω，使 g 在 $\bar{\omega}$ 中仅以

θ 为零点．又由假定及 f 的连续性可知，存在以 x_0 为中心的某开球 Ω，使 f 在 $\bar{\Omega}$ 中仅以 x_0 为零点，并且 $f(\bar{\Omega})\subset\omega$．于是，显然 gf 在 $\bar{\Omega}$ 中仅以 x_0 为零点，并且

$$\mathrm{ind}(f, x_0)=\deg(f,\Omega,\theta), \tag{1·91}$$

$$\mathrm{ind}(gf, x_0)=\deg(gf,\Omega,\theta), \tag{1·92}$$

$$\mathrm{ind}(g,\theta)=\deg(g,\omega,\theta). \tag{1·93}$$

用 $D_i(i=1,2,\cdots)$表 $R^n\setminus f(\partial\Omega)$的全部连通区，并不妨设含 θ 的连通区为 D_1．由(1·70)式知

$$\deg(gf,\Omega,\theta)=\sum_{D_i\subset f(\Omega)}\deg(f,\Omega,D_i)\cdot\deg(g,D_i,\theta). \tag{1·94}$$

分两种情况：若 $D_1\subset f(\Omega)$，则

$$\deg(f,\Omega,D_1)=\deg(f,\Omega,\theta). \tag{1·95}$$

当 $D_i\subset f(\Omega)$且 $i\neq 1$ 时，必有 $g(y)\neq\theta$，$\forall\, y\in\bar{D}_i$，故

$$\deg(g,D_i,\theta)=0,\quad \forall\, i\neq 1, D_i\subset f(\Omega). \tag{1·96}$$

于是，由(1·94)、(1·95)、(1·96)三式，得

$$\deg(gf,\Omega,\theta)=\deg(f,\Omega,\theta)\cdot\deg(g,D_1,\theta). \tag{1·97}$$

由于 $\theta\in D_1\subset\omega$，故

$$\deg(g,D_1,\theta)=\deg(g,\omega,\theta). \tag{1·98}$$

于是，由(1·91)、(1·92)、(1·93)、(1·97)及(1·98)诸式，即得(1·90)式．

若 $D_1\not\subset f(\Omega)$，则存在 $p_0\in D_1\setminus f(\Omega)$．由连通区性质，知 $\deg(f,\Omega,\theta)=\deg(f,\Omega,p_0)$．但显然 $p_0\overline{\in} f(\bar{\Omega})$，故 $\deg(f,\Omega,p_0)=0$，从而 $\deg(f,\Omega,\theta)=0$．另一方面，对任何满足 $D_i\subset f(\Omega)$的 D_i，必有 $D_i\cap D_1=\varnothing$，从而 $\theta\overline{\in}\bar{D}_i$．于是，又有 $\theta\overline{\in} g(\bar{D}_i)$，故 $\deg(g,D_i,\theta)=0$，由此，根据(1·94)式，知 $\deg(gf,\Omega,\theta)=0$．于是，这时(1·90)式也成立（两端均等于零）．证完．

定理 1.17(简化定理)　设 Ω 是R^n 中有界开集,$F:\bar{\Omega}\to R^m$ $(m<n)$连续(其中,R^m 为 R^n 的子空间).令 $f(x)=x-F(x)$, $\forall x\in\bar{\Omega}$. 显然 $f:\bar{\Omega}\to R^n$ 连续.设 $p\in R^m\setminus f(\partial\Omega)$,用 g 表 f 在 $R^m\cap\bar{\Omega}$ 上的限制.于是,我们有化 R^n 中 Brouwer 度为 R^m 中 Brouwer 度的公式

$$\deg_n(f,\Omega,p)=\deg_m(g,R^m\cap\Omega,p).\qquad(1\cdot 99)$$

证　若 $R^m\cap\Omega=\varnothing$,则(1·99)式右端为零.这时,若有 $x_0\in\Omega$,使 $f(x_0)=p$,则 $x_0=p+F(x_0)\in R^m$,此与 $R^m\cap\Omega=\phi$ 矛盾,因此 $p\overline{\in}f(\bar{\Omega})$,故(1·99)式左端也为零.

设 $R^m\cap\Omega\neq\varnothing$, 不妨设 $F(x)=(F_1(x),\cdots,F_m(x),\overbrace{0,\cdots,0}^{n-m\text{个}})$. 先设 F 是C^2 映象,从而 f 也是C^2 映象,并设 $p\overline{\in}f(N_f)$, $N_f=\{x\,|\,x\in\Omega,J_f(x)=0\}$. 于是,根据定理 1.2 知

$$\deg_n(f,\Omega,p)=\sum_{i=1}^{s}\operatorname{sgn}J_f(x_i),\qquad(1\cdot 100)$$

其中 $x_i(i=1,2,\cdots,s)$表方程 $f(x)=p$ 在Ω 内的全部解.由于 $x_i=p+F(x_i)\in R^m$,故 $x_i\in R^m\cap\Omega(i=1,2,\cdots,s)$. 另外,显然当 $x\in R^m\cap\Omega$ 时有$J_f(x)=J_g(x)$,故 $p\overline{\in}g(N_g)$,其中 $N_g=\{x\,|\,x\in R^m\cap\Omega,J_g(x)=0\}$. 于是,再根据定理 1.2 知

$$\deg_m(g,R^m\cap\Omega,p)=\sum_{i=1}^{s}\operatorname{sgn}J_g(x_i).\qquad(1\cdot 101)$$

由(1·100)式与(1·101)式,注意到 $J_f(x_i)=J_g(x_i)(i=1,2,\cdots,s)$即得(1·99)式.

其次设 F 是一般的连续映象.令 $\tau=\inf\limits_{x\in\partial\Omega}\|f(x)-p\|$, $\sigma=\inf\limits_{x\in\partial(R^m\cap\Omega)}\|g(x)-p\|$. 显然 $\sigma\geqslant\tau>0$. 根据引理 1.5 知,存在

C^2 映象 $F_0:\bar{\Omega}\to R^m$, $F_0(x)=(F_{01}(x),\cdots,F_{0m}(x),\overbrace{0,\cdots,0}^{n-m个})$,

使 $\max\limits_{x\in\bar{\Omega}}\|F(x)-F_0(x)\|<\frac{\tau}{2}$. 令 $f_0(x)=x-F_0(x)$, $\forall x\in\bar{\Omega}$, 并用 g_0 表 f_0 在 $R^m\cap\bar{\Omega}$ 上的限制. 于是由定义 1.2 知

$$\deg_n(f,\Omega,p)=\deg_n(f_0,\Omega,p), \tag{1·102}$$

$$\deg_m(g,R^m\cap\Omega,p)=\deg_m(g_0,R^m\cap\Omega,p). \tag{1·103}$$

由 Sard 定理(引理 1.4), 存在 $p_0\in R^m$, $\|p-p_0\|<\frac{\tau}{14}$, 使 $p_0\overline{\in}g_0(N_{g_0})$, 这里 $N_{g_0}=\{x\,|\,x\in R^m\cap\Omega, J_{g_0}(x)=0\}$. 显然 $p_0\overline{\in}f_0(N_{f_0})$(因为若 $p_0\in f_0(N_{f_0})$, 则存在 $x_0\in\Omega$, 使 $f_0(x_0)=p_0$ 且 $J_{f_0}(x_0)=0$. 但 $x_0=p_0+F_0(x_0)\in R^m$, 故 $x_0\in R^m\cap\Omega$, $J_{g_0}(x_0)=J_{f_0}(x_0)=0$, 从而 $p_0\in g_0(N_{g_0})$, 矛盾). 由于

$$\operatorname*{ind}_{x\in\partial\Omega}\|f_0(x)-p\|>\frac{\tau}{2},\quad \operatorname*{ind}_{x\in\partial(R^m\cap\Omega)}\|g_0(x)-p\|\geqslant\frac{\tau}{2},$$

根据引理 1.7 知

$$\begin{aligned}&\deg_n(f_0,\Omega,p)=\deg_n(f_0-p,\Omega,\theta)\\&=\deg_n(f_0-p_0,\Omega,\theta)=\deg_n(f_0,\Omega,p_0),\end{aligned} \tag{1·104}$$

$$\begin{aligned}&\deg_m(g_0,R^m\cap\Omega,p)=\deg_m(g_0-p,R^m\cap\Omega,\theta)\\&=\deg_m(g_0-p_0,R^m\cap\Omega,\theta)\\&=\deg_m(g_0,R^m\cap\Omega,p_0).\end{aligned} \tag{1·105}$$

但根据前面已证的结果知

$$\deg_n(f_0,\Omega,p_0)=\deg_m(g_0,R^m\cap\Omega,p_0). \tag{1·106}$$

于是, 由(1·102)～(1·106)诸式即得(1·99)式. 证完.

利用拓扑度的乘积定理和简化定理, 不难作出 Brouwer 度等于任何预先给定的整数的连续映象来.

例 1.3 设 Ω 是 $R^n(n\geqslant 2)$中的单位球：$\Omega=\{x\,|\,x\in R^n,\|x\|<1\}$．任给整数 m，证明：必可作出连续映象 $f:\bar{\Omega}\to R^n$，使 $\deg(f,\Omega,\theta)=m$．

证 首先考虑 $n=2$ 的情形．将 R^2 看作复平面．先设 $m\geqslant 0$．考察 C^2 映象 $f(z)=z^m$．若 $m=0$，显然 $\deg(f,\Omega,\theta)=0$（注意，$z=x+iy$ 是复变量，$\Omega=\{z\,|\,|z|<1\}$）．若 $m>0$，则 $z=\theta$ 是f 的惟一零点．取 $p=re^{i\theta}$，$0<r<1$．由于 $f(\partial\Omega)=\partial\Omega$，故 θ 与 p 属于$R^2\setminus f(\partial\Omega)$的同一连通区，从而

$$\operatorname{ind}(f,\theta)=\deg(f,\Omega,\theta)=\deg(f,\Omega,p). \qquad (1\cdot 107)$$

令 $f(z)=u+iv$，则

$$J_f(z)=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y}\\[2mm] \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}.$$

由于 $f(z)=z^m$ 是解析函数，满足 $C-R$ 方程，故知$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$且$f'(z)=\dfrac{\partial u}{\partial x}+i\,\dfrac{\partial v}{\partial x}$．又 $f'(z)=mz^{m-1}$，于是

$$J_f(z)=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2=|f'(z)|^2=m^2|z|^{2(m-1)}>0,\quad \forall\, z\neq\theta.$$

而方程 $f(z)=p$ 在Ω 内恰有 m 个根：$z_k=r^{\frac{1}{m}}e^{i\left(\frac{\theta}{m}+\frac{2k\pi}{m}\right)}$，$(k=0,1,\cdots,m-1)$．于是，根据公式(1·25)知

$$\deg(f,\Omega,p)=\sum_{k=0}^{m-1}\operatorname{sgn}J_f(z_k)=m. \qquad (1\cdot 108)$$

由(1·107)式与(1·108)式得

$$\deg(f,\Omega,\theta)=m. \qquad (1\cdot 109)$$

其次设 $m<0$．令 $m_1=-m>0$．考察映象 $f_1(z)=z^{m_1}$，上面已证

$$\operatorname{ind}(f_1,\theta)=\deg(f_1,\Omega,\theta)=m_1. \tag{1·110}$$

再考察 C^2 映象 $g(z)=\bar{z}$. 显然, $z=\theta$ 是 g 的惟一零点. 令 $g(z)=u+iv$, 则 $u=x, v=-y$, 于是

$$J_g(z)=\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{vmatrix}=-1,\quad \forall z\in R^2.$$

于是, 根据公式(1·25)知

$$\operatorname{ind}(g,\theta)=\deg(g,\Omega,\theta)=-1. \tag{1·111}$$

令 $f=gf_1$, 即 $f(z)=\bar{z}^{m_1}$. 则 $z=\theta$ 是 f 的惟一零点, 并且由定理 1.16 的系 2 知

$$\begin{aligned}\deg(f,\Omega,\theta)&=\operatorname{ind}(f,\theta)=\operatorname{ind}(gf_1,\theta)\\&=\operatorname{ind}(f_1,\theta)\cdot\operatorname{ind}(g,\theta)=-m_1=m.\end{aligned}$$

应当指出, 对于熟悉代数拓扑学中 Brouwer 度定义的读者, (1·109)式和(1·110)式是显然的, 因为当 z 沿 $\partial\Omega$ 逆时针方向绕一圈时, $w=z^m\,(m>0)$ 沿 $\partial\Omega$ 逆时针方向绕 m 圈, 而 $w=\bar{z}$ 沿 $\partial\Omega$ 顺时针方向绕一圈.

现设 $n>2$. 将复平面 R^2 视为 R^n 的子空间. 令 $P:R^n\to R^2$ 为投影算子. 对给定的整数 m, 根据上面已证的结果, 可作连续映象 $h_1:R^2\to R^2$, 使 $\deg(h_1,\Omega_2,\theta)=m\,(\Omega_2=\{z\,|\,z\in R^2, |z|<1\})$. 现作连续映象 $f:R^n\to R^n$ 如下:

$$f(x)=x-[Px-h_1(Px)],\quad \forall x\in R^n.$$

显然, 当 $x=z\in R^2$ 时, $f(z)=h_1(z)$. 于是, 根据简化定理(定理 1.17), 得(注意, $\Omega=\{x\,|\,x\in R^n, \|x\|<1\}$, $\theta\in R^2\setminus f(\partial\Omega)$, 因为若存在 $x_0\in\partial\Omega$, 使 $f(x_0)=\theta$, 则 $x_0=Px_0-h_1(Px_0)\in R^2$, 从而 $Px_0=x_0$, $h_1(x_0)=\theta$, $x_0\in\partial\Omega_2$, 此与 $\theta\overline{\in}$

$h_1(\partial\Omega_2)$矛盾).

$$\deg(f,\Omega,\theta)=\deg(h,R^2\cap\Omega,\theta)=\deg(h_1,\Omega_2,\theta)=m.$$

证完.

注 15 对于 $n=1,\Omega=(a,b),f:\bar{\Omega}\to R^1$ 连续的情形,读者不难自己证明:$\deg(f,\Omega,p)$必为 1, −1,0 三个数之一.

以上讨论了 n 维欧氏空间中连续映象的拓扑度概念和它的性质.利用它,不难引入有限维实 Banach 空间中连续映象的拓扑度概念.

定义 1.4 设 E_n 是 n 维实 Banach 空间,Ω 是 E_n 中有界开集,$f:\bar{\Omega}\to E_n$ 连续.$p\in E_n\setminus f(\partial\Omega)$.按下法定义拓扑度 $\deg(f,\Omega,p)$:任取 E_n 的一组基 $e_1,\cdots,e_n$.于是,任何 $x\in E_n$ 可惟一地表成 $x=\sum_{i=1}^{n}\alpha_1 e_i$,其中 $\alpha_i(i=1,2,\cdots,n)$是实数.作映象 $h:E_n\to R^n$ 如下:令 $hx=y$, $y=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\in R^n$.显然 h 是 E_n 与 R^n 间的线性同胚.于是 $h(\Omega)$是 R^n 中的有界开集,并且有$\overline{h(\Omega)}=h(\bar{\Omega})$,

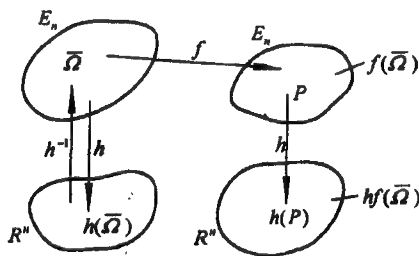


图 2-1·5

$h(\partial\Omega)=\partial h(\Omega)$.考察映象 $F=hfh^{-1}$(图 2-1·5).显然 $F:\overline{h(\Omega)}\to R^n$ 连续且 $h(p)\in R^n\setminus F(\partial h(\Omega))$.于是,$\deg(F,h(\Omega),h(p))$有意义.我们定义

$$\deg(f,\Omega,p)=\deg(F,h(\Omega),h(p)).\qquad(1\cdot112)$$

注 16 为要使(1·112)式是合理的,必须证明 $\deg(F, h(\Omega), h(p))$,不随基 $e_1, \cdots, e_n$ 的选取而变．设 $d_1, \cdots, d_n$ 是 E_n 的另一基．于是 $x=\sum_{i=1}^{n} \beta_i d_i$, E_n 与 R^n 的线性同胚映象 k 为 $kx=z$, $z=(\beta_1, \cdots, \beta_n) \in R^n$．和 F 对应的映象为 $G=kfk^{-1}$: $\overline{k(\Omega)} \rightarrow R^n$．需要证明

$$\deg(F, h(\Omega), h(p))=\deg(G, k(\Omega), k(p)). \tag{1·113}$$

由于 $e_1, \cdots, e_n$ 与 $d_1, \cdots, d_n$ 都是 E_n 的基,故 $e_j=\sum_{i=1}^{n} a_{ij} d_i (j=1, \cdots, n)$, $A=(a_{ij})$, $\det A=|a_{ij}| \neq 0$. 于是

$$x=\sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \alpha_j\right) d_i,$$

故 $\beta_i=\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \alpha_j (j=1,2, \cdots, n)$,即 $z=Ay$. 从而又有 $kx=z=Ay=Ahx$, $\forall x \in E_n$,故 $k=Ah$, $k(\bar{\Omega})=Ah(\bar{\Omega})$. 由此又知

$$G=kfk^{-1}=Ahfh^{-1} A^{-1}=AFA^{-1}. \tag{1·114}$$

先设 F 是 C^2 映象．易知当 $z=Ay$ 时有

$$F(y)=h(p) \Leftrightarrow G(z)=k(p), \tag{1·115}$$

$$J_G(z)=(\det A) \cdot J_F(A^{-1} z) \cdot(\det A^{-1})=J_F(y). \tag{1·116}$$

令

$$N_F=\{y \mid y \in h(\Omega),\ J_F(y)=0\},$$

$$N_G=\{y \mid y \in h(\Omega),\ J_G(y)=0\},$$

由(1·115)式与(1·116)式易知

$$h(p) \in F(N_F) \Leftrightarrow k(p) \in G(N_G). \tag{1·117}$$

若 $h(p) \overline{\in} F(N_F)$,则 $k(p) \overline{\in} G(N_G)$. 这时,由(1·115)式与(1·116)式,利用定理 1.2 的公式(1·25),即知(1·113)式成

立．

若 $h(p)\in F(N_F)$，则 $k(p)\in G(N_G)$．记

$$\tau_1=\inf_{y\in\partial h(\Omega)}\|F(y)-h(p)\|>0,$$

$$\tau_2=\inf_{z\in\partial h(\Omega)}\|G(z)-k(p)\|>0.$$

令

$$\tau=\min\{\tau_1,\tau_2\}. \tag{1·118}$$

注意到非奇异线性变换 A 将测度为零的集变成测度为零的集，由 Sard 定理知：存在 $u,v\in R^n$，$v=Au$，使

$$u\overline{\in}F(N_F),\quad \|u-h(p)\|<\frac{\tau}{7},$$

$$v\overline{\in}G(N_G),\quad \|v-k(p)\|<\frac{\tau}{7},$$

于是，根据引理 1.7，有

$$\deg(F,h(\Omega),h(p))=\deg(F,h(\Omega),u), \tag{1·119}$$

$$\deg(G,k(\Omega),k(p))=\deg(G,k(\Omega),v). \tag{1·120}$$

令 $g=h^{-1}u$，则 $u=h(g)$，$v=Ah(g)=k(g)$．于是，根据前面已证的结果，知

$$\deg(F,h(\Omega),u)=\deg(G,k(\Omega),v). \tag{1·121}$$

由(1·119)～(1·121)诸式即知(1·113)式成立．

最后，设 F 为一般的连续映象．取 C^2 映象 $F_1:h(\bar{\Omega})\to R^n$，使

$$\max_{y\in k(\bar{\Omega})}\|F(y)-F_1(y)\|<\frac{\tau}{1+\|A\|}<\tau.$$

于是，$G_1\doteq AF_1A^{-1}:k(\bar{\Omega})\to R^n$ 也是 C^2 映象，并且易知

$$\max_{z\in k(\bar{\Omega})}\|G(z)-G_1(z)\|\leqslant\|A\|\cdot\frac{\tau}{1+\|A\|}<\tau.$$

由此，根据定义 1.2，有

$$\deg(F, h(\Omega), h(p)) = \deg(F_1, h(\Omega), h(p)), \qquad (1\cdot122)$$

$$\deg(G, k(\Omega), k(p)) = \deg(G_1, k(\Omega), k(p)). \qquad (1\cdot123)$$

但由前面已证的结果知

$$\deg(F_1, h(\Omega), h(p)) = \deg(G_1, k(\Omega), k(p)). \qquad (1\cdot124)$$

于是，由(1·122)～(1·124)诸式即知(1·113)式成立．证完．

注 17 易知前述 R^n 中连续映象拓扑度的主要性质和定理(定理 1.3～1.10，1.12 的系，1.13，1.16，1.17)对于按(1·112)式定义的有限维实 Banach 空间中连续映象的拓扑度来说也是成立的(这时定理 1.6 中的条件 $J_f(x_0)\neq 0$ 应改为线性算子 $f'(x_0): E_n \to E_n$ 具有有界逆，注意到 E_n 是有限维空间，这又等价于 $f'(x_0)$ 是满射的，即 $f'(x_0)E_n = E_n$；这时(1·45)式应为

$$\operatorname{ind}(f, x_0) = \operatorname{ind}(f'(x_0), \theta) = \operatorname{sgn} \prod_{i=1}^{n} \lambda_i = (-1)^{\beta}$$

其中 λ_i, β 的意义不变；定理 1.12 的系的证明可仿后面定理2.4系 2 之证明)．

§2 Leray－Schauder 度

本节的目的是要把§1 中有限维空间中连续映象的拓扑度概念推广到一般 Banach 空间中的映象上去．首先自然考虑连续映象．但下面的例子(参看〔10〕)说明，在一般 Banach 空间中，不可能对所有的连续映象都定义拓扑度，使具有拓扑度的基本性质(即定理 1.3 所述的诸性质)．

例 2.1 考察[0, 1]上的连续函数空间 $C[0,1]$．令 $x_0(s) \equiv \frac{1}{2}$，$\Omega = \{x(s) \mid x(s) \in C[0,1], \|x - x_0\| < \frac{1}{2}\}$．显然 $\bar{\Omega} =$

$\{x(s)\,|\,x(s)\in C[0,1],\ \|x-x_0\|\leqslant\frac{1}{2}\}$, $\partial\Omega=\{x(s)\,|\,x(s)\in C[0,1],\ \|x-x_0\|=\frac{1}{2}\}$．任取$[0,1]$上的连续函数 $F(s)$，使满足 $0\leqslant F(s)\leqslant 1$，$\forall\,0\leqslant s\leqslant 1$，并且 $F(0)=0$，$F(1)=1$．考察映象 $f:x(s)\to F[x(s)]$，显然 $f:\bar{\Omega}\to C[0,1]$连续(实际上，f 映 $\bar{\Omega}$ 入 $\bar{\Omega}$)．令

$$h_t(x(s))=tF(x(s))+(1-t)x(s),$$
$$\forall\,x(s)\in\bar{\Omega},\ \ 0\leqslant t\leqslant 1. \tag{2·1}$$

任取 $y_0(s)\in\Omega$，证明 $y_0\overline{\in}h_t(\partial\Omega)$，$\forall\,0\leqslant t\leqslant 1$．事实上，若存在 $t_1\in[0,1]$，$x_1(s)\in\partial\Omega$，使

$$y_0(s)=t_1F(x_1(s))+(1-t_1)x_1(s),\ \ 0\leqslant s\leqslant 1. \tag{2·2}$$

由于 $x_1(s)\in\partial\Omega$，即 $\|x_1-x_0\|=\frac{1}{2}$，故存在 $s_1\in[0,1]$，使 $x_1(s_1)=0$ 或 1，从而 $F(x_1(s_1))=0$ 或 1．于是由(2·2)式知 $y_0(s_1)=0$ 或 1，此与 $y_0(s)\in\Omega$ 矛盾．

如果对空间 $C[0,1]$中任何连续映象，都可以引入拓扑度概念，使之具有拓扑度的基本性质，那末由(2·2)式，根据拓扑度的同伦不变性和正规性，得

$$\deg(f,\Omega,y_0)=\deg(I,\Omega,y_0)=1.$$

从而根据可解性知，方程

$$f(x(s))=F(x(s))=y_0(s) \tag{2·3}$$

在 Ω 内必有解．但这是不可能的，因为可以作出这样的 F 和 y_0，使方程(2·3)在 Ω 内无解．例如，取

$$F(s)=\begin{cases} s, & \text{当 } 0\leqslant s\leqslant \frac{1}{2}; \\ 1-s, & \text{当 } \frac{1}{2}< s\leqslant \frac{5}{8}; \\ \frac{5}{3}(s-1)+1, & \text{当 } \frac{5}{8}< s\leqslant 1, \end{cases}$$

$$y_0(s)=\frac{1}{4}+\frac{s}{2},\ 0\leqslant s\leqslant 1.$$

(如图 2－2·1). 显然 F 满足前述条件, $y_0(s)\in\Omega$. 这时方程 (2·3)在 Ω 内必无解. 事实上,若有 $x^*(s)\in\Omega$, 使 $F(x^*(s)) = y_0(s)$, $\forall\, 0\leqslant s\leqslant 1$, 则 $\frac{3}{4}=y_0(1)=F(x^*(1))$, 由此易知 $x^*(1)=\frac{17}{20}>\frac{1}{2}$. 同样, $\frac{1}{4}=y_0(0)=F(x^*(0))$, 故, $x^*(0)=\frac{1}{4}$. 因此, 存在 $s^*\in(0,1)$, 使 $x^*(s^*)=\frac{1}{2}$. 显然当 s 大于 s^* 而与 s^* 充分近时, $F(x^*(s))\leqslant\frac{1}{2}$, 但 $y_0(s)>y_0(s^*)=F(x^*(s^*))=\frac{1}{2}$, 此与 $F(x^*(s))=y_0(s)$, $\forall\, 0\leqslant t\leqslant 1$, 矛盾.

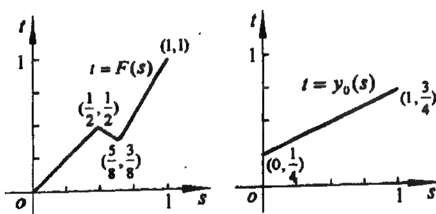


图 2－2·1

例 2.1 说明, 对于一般的实 Banach 空间, 我们不能考虑所

有的连续映象，而必须从连续映象中分出一类性质较好的映象来．由第一章定理 2.6 知，全连续映象可以用有限维映象来逼近，这就启发我们，可以用有限维空间中的拓扑度来定义全连续映象的拓扑度，这时当然要要求所定义的拓扑度与逼近映射的选择无关．根据简化定理(定理 1.17)，这又启发我们应考虑形如 $f(x)=x-F(x)$ 的映象(即 $f=I-F$)，其中 $F:\bar{\Omega}\to E$ 全连续(E 是实 Banach 空间，Ω 是 E 中有界开集)，I 表恒等映象(即 $Ix=x,\ \forall x\in E$)．这种 f 称为**全连续场**．

引理 2.1 设 Ω 是 E 中有界开集，$f=I-F:\bar{\Omega}\to E$ 是全连续场，则

(ⅰ) f 是固有映象，即任何紧集 $D\subset E$ 的原象 $f^{-1}(D)$ 都是紧集；

(ⅱ) f 是闭映象，即任何闭集 $S\subset\bar{\Omega}$ 的象 $f(S)$ 都是闭集．

证 (ⅰ)设 $x_n\in f^{-1}(D)$，则 $x_n\in\bar{\Omega}$ 且 $y_n=f(x_n)=x_n-F(x_n)\in D$，由 D 紧及 F 全连续知，存在自然数的子列 n_i，使 $y_{n_i}\to y_0\in D$，$F(x_{n_i})\to z_0\in E$，从而 $x_{n_i}=y_{n_i}+F(x_{n_i})\to y_0+z_0=x_0\in\bar{\Omega}$．再根据 F 的连续性知 $y_0=x_0-F(x_0)=f(x_0)$，故 $x_0\in f^{-1}(D)$．因此 $f^{-1}(D)$ 是紧集．

(ⅱ)设 $z_n\in f(S)$，$z_n\to z_0\in E$，要证 $z_0\in f(S)$．存在 $x_n\in S$，使 $z_n=f(x_n)=x_n-F(x_n)$．由 F 全连续，存在子列 $F(x_{n_k})\to y_0\in E$，从而，注意到 S 闭，知 $x_{n_k}=z_{n_k}+F(x_{n_k})\to z_0+y_0=x_0\in S$．再根据 F 的连续性得 $z_0=x_0-F(x_0)=f(x_0)$，故 $z_0\in f(S)$．证完．

定义 2.1 设 Ω 是实 Banach 空间 E 中有界开集，$F:\bar{\Omega}\to E$ 全连续．令 $f(x)=x-F(x)$，$\forall x\in\bar{\Omega}$，即 $f=I-F$．设 $p\in E$

$\setminus f(\partial\Omega)$. 由引理 2.1 知 f 是闭映象，故 $f(\partial\Omega)$是 E 中闭集，从而 $\tau = d(p, f(\partial\Omega)) = \inf_{x\in\partial\Omega}\|f(x)-p\|>0$. 根据第一章定理 2.6 知，存在 E 的有限维子空间$E^{(n)}$, $p\in E^{(n)}$及有界连续算子 $F_n:\bar{\Omega}\to E^{(n)}$, 使

$$\|F(x)-F_n(x)\|<\tau,\quad \forall x\in\bar{\Omega}. \tag{2·4}$$

考察 $E^{(n)}$的有界开集 $\Omega_n = E^{(n)}\cap\Omega$(注意, $\partial\Omega_n\subset\partial\Omega$)和算子 $f_n(x) = x - F_n(x)$. 显然 $f_n:\bar{\Omega}_n\to E^{(n)}$, 连续．今证 $p\overline{\in}$ $f_n(\partial\Omega_n)$. 事实上，当 $x\in\partial\Omega_n\subset\partial\Omega$ 时，由(2·4)式知

$$\|f_n(x)-p\|\geqslant\|f(x)-p\|-\|F(x)-F_n(x)\|>0.$$

由此可知，$E^{(n)}$中的拓扑度 $\deg_n(f_n,\Omega_n,p)$有意义．定义全连续场 f 的 **Leray - Schauder 度** $\deg(f,\Omega,p)$为 $\deg_n(f_n,\Omega_n,p)$, 即

$$\deg(f,\Omega,p)=\deg(f_n,\Omega_n,p). \tag{2·5}$$

注 1 为要使定义(2·5)式是合理的，必须证明按(2·5)式定义的 $\deg(f,\Omega,p)$与空间 $E^{(n)}$及算子 F_n 的选择均无关．先证当 $E^{(n)}$固定时，$\deg(f_n,\Omega_n,p)$与 F_n 的选择无关．事实上，若 $G_n:\bar{\Omega}\to E^{(n)}$有界、连续，也满足(2·4)式，即$\|F(x)-G_n(x)\|<\tau$, $\forall x\in\bar{\Omega}$. 令 $g_n(x)=x-G_n(x)$. 又令($\forall 0\leqslant t\leqslant 1, x\in\bar{\Omega}_n$)

$$\begin{aligned}H(t,x)&=tf_n(x)+(1-t)g_n(x)\\&=x-F(x)+t(F(x)-F_n(x))+(1-t)(F(x)-G_n(x)).\end{aligned}$$

于是，当 $0\leqslant t\leqslant 1, x\in\partial\Omega$ 时有

$$\begin{aligned}\|H(t,x)-p\|&\geqslant\|f(x)-p\|-t\|F(x)-F_n(x)\|\\&-(1-t)\|F(x)-G_n(x)\|>\tau-t\tau-(1-t)\tau=0,\end{aligned}$$

故由有限维空间中拓扑度的同伦不变性知

$$\deg_n(g_n,\Omega_n,p)=\deg(f_n,\Omega_n,p).$$

再证 $\deg(f_n, \Omega_n, p)$与 $E^{(n)}$的选取无关．设另取 $E^{(m)}$($p \in E^{(m)}$)及 F_m，需证($f_m = I - F_m$)

$$\deg_n(f_n, \Omega_n, p) = \deg_m(f_m, \Omega_m, p). \tag{2·6}$$

用 $E^{(l)}$表 $E^{(n)}$与 $E^{(m)}$的线性和，则 $E^{(l)}$是 E 的有限维子空间，并且 $E^{(n)} \subset E^{(l)}, E^{(m)} \subset E^{(l)}$．令 $\Omega_l = E^{(l)} \cap \Omega$．显然可把 F_n 视为映 $\bar{\Omega}$ 入 $E^{(l)}$，从而 $f_n: \bar{\Omega}_l \to E^{(l)}$．于是，根据简化定理(定理 1.17)知

$$\deg_l(f_n, \Omega_l, p) = \deg_n(f_n, \Omega_n, p); \tag{2·7}$$

同理有

$$\deg_l(f_m, \Omega_l, p) = \deg_m(f_m . \Omega_m, p). \tag{2·8}$$

但前面已证，当 $E^{(n)}$固定时，$\deg_n(f_n, \Omega_n, p)$与 F_n(从而 f_n)的选择无关，故知

$$\deg_l(f_n, \Omega_l, p) = \deg_l(f_m, \Omega_l, p). \tag{2·9}$$

于是，由(2·7)～(2·9)诸式即得(2·6)式．

下面证明全连续场的 Leray - Schauder 度保持有限维空间中 Brouwer 度的基本性质．

定理 2.1 Leray - Schauder 度具有下列性质：

(ⅰ)正规性：$\deg(I, \Omega, p) = 1, \forall p \in \Omega$；

(ⅱ)可加性：设 Ω_1, Ω_2 是 Ω 的两个互不相交的开子集，并且 $p \overline{\in} f(\bar{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2))$，那末

$$\deg(f, \Omega, p) = \deg(f, \Omega_1, p) + \deg(f, \Omega_2, p);$$

(ⅲ)同伦不变性：设 $H: [0,1] \times \bar{\Omega} \to E$ 全连续．令 $h_t(x) = x - H(t, x)$．若 $p \overline{\in} h_t(\in \Omega)$，$\forall 0 \leqslant t \leqslant 1$，则 $\deg(h_t, \Omega, p)$ 保持常数($\forall 0 \leqslant t \leqslant 1$)；

(ⅳ)可解性(Kronecker 存在定理)：若 $\deg(f, \Omega, p) \neq 0$，则

方程 $f(x)=p$ 在 Ω 内必有解；

（v）切除性：设 Ω_0 是 Ω 的开子集，并且 $p\overline{\in} f(\bar{\Omega}\setminus\Omega_0)$，则

$$\deg(f,\Omega,p)=\deg(f,\Omega_0,p);$$

（vi）若 $p\overline{\in} f(\partial\Omega)$，则

$$\deg(f,\Omega,p)=\deg(f-p,\Omega,\theta).$$

证 结论（i）与（vi）是显然的（根据 $\deg(f,\Omega,p)$ 的定义（2·5）式）．下证（ii）：由于 $\bar{\Omega}\setminus(\Omega_1\cup\Omega_2)$ 是闭集，故 $f(\bar{\Omega}\setminus\Omega_1\cup\Omega_2)$ 是有界闭集，从而

$$\tau_0=\inf_{x\in\bar{\Omega}\setminus(\Omega_1\cup\Omega_2)}\|f(x)-p\|>0.$$

作 $E^{(n)}(p\in E^{(n)})$ 与 $F_n:\bar{\Omega}\to E^{(n)}$，使 $\|F(x)-F_n(x)\|<\tau_0$，$\forall x\in\bar{\Omega}$．令 $f_n=I-F_n$，$\Omega_n=E^{(n)}\cap\Omega$，$\Omega_n^{(1)}=E^{(n)}\cap\Omega_1$，$\Omega_n^{(2)}=E^{(n)}\cap\Omega_2$．则由定义 2.1 知

$$\deg(f,\Omega,p)=\deg_n(f_n,\Omega_n,p),$$

$$\deg(f,\Omega_1,p)=\deg_n(f_n,\Omega_n^{(1)},p),$$

$$\deg(f,\Omega_2,p)=\deg_n(f_n,\Omega_n^{(2)},p).$$

注意到 $\Omega_n^{(1)}\subset\Omega_n$，$\Omega_n^{(2)}\subset\Omega_n$，$\Omega_n^{(1)}\cap\Omega_n^{(2)}=\varnothing$，以及 $p\overline{\in} f_n(\bar{\Omega}_n\setminus(\Omega_n^{(1)}\cup\Omega_n^{(2)}))$．根据 Brouwer 度的可加性（定理 1.3（ii）），知

$$\deg_n(f_n,\Omega_n,p)=\deg(f_n,\Omega_n^{(1)},p)+\deg(f_n,\Omega_n^{(2)},p),$$

于是得

$$\deg(f,\Omega,p)=\deg(f,\Omega_1,p)+\deg(f,\Omega_2,p).$$

再证（iii）．先证

$$\tau^*=\inf_{(t,x)\in[0,1]\times\partial\Omega}\|h_t(x)-p\|>0. \qquad (2\cdot10)$$

事实上，若 $\tau^*=0$，则存在 $0\leqslant t_n\leqslant1$，$x_n\in\partial\Omega$，使

$$h_{t_n}(x_n) = x_n - H(t_n, x_n) \to p \quad (n \to \infty).$$

由 H 的全连续性易知，存在子列 $H(t_{n_i}, x_{n_i}) \to z_0 \in E$，且 $t_{n_i} \to t_0 \in [0,1]$. 由此知 $x_{n_i} \to p + z_0 = x_0 \in \partial \Omega$. 再由 H 的连续性得 $x_0 - H(t_0, x_0) = p$，此与假定矛盾，故(2·10)式成立．由定理 2.6 知，存在 E 的有限维子空间 $E^{(n)}$ ($p \in E^{(n)}$) 及连续、有界算子 $G_n: [0,1] \times \bar{\Omega} \to E^{(n)}$，使 $\| H(t,x) - G_n(t,x) \| < \tau^*$，$\forall (t, x) \in [0,1] \times \bar{\Omega}$. 令 $g_t(x) = x - G_n(t,x)$，$\Omega_n = E^{(n)} \cap \Omega$. 于是，根据定义 2.1 知

$$\deg(h_t, \Omega, p) = \deg_n(g_t, \Omega_n, p), \quad \forall\, 0 \leqslant t \leqslant 1. \tag{2·11}$$

由(2·10)式知，当 $x \in \partial \Omega_n$，$0 \leqslant t \leqslant 1$ 时有

$$\| g_t(x) - p \| \geqslant \| h_t(x) - p \| - \| H(t,x) - G_n(t,x) \| > 0,$$

故 $p \overline{\in} g_t(\partial \Omega_n)$，$\forall\, 0 \leqslant t \leqslant 1$. 于是，由 Brouwer 度的同伦不变性知，$\deg_n(g_t, \Omega_n, p)$ 保持常数，从而由(2·11)式知 $\deg(h_t, \Omega, p)$ 保持常数($\forall\, 0 \leqslant t \leqslant 1$).

下证(iv)．用反证法．假定 $f(x) = p$ 在 Ω 内无解．于是 $p \overline{\in} f(\bar{\Omega})$ ($p \overline{\in} f(\partial \Omega)$ 是预先假定了的)．由引理 2.1，$f(\bar{\Omega})$ 是 E 中有界闭集，故 $\tau_* = \inf\limits_{x \in \bar{\Omega}} \| f(x) - p \| > 0$. 取 E 的有限维子空间 $E^{(n)}$ ($p \in E^{(n)}$) 及连续、有界算子 $F_n: \bar{\Omega} \to E^{(n)}$，使 $\| F(x) - F_n(x) \| < \tau_*$，$\forall x \in \bar{\Omega}$. 令 $f_n = I - F_n$，$\Omega_n = E^{(n)} \cap \Omega$，根据定义 2.1 知

$$\deg(f, \Omega, p) = \deg(f_n, \Omega_n, p). \tag{2·12}$$

但因当 $x \in \bar{\Omega}_n \subset \bar{\Omega}$ 时有

$$\| f_n(x) - p \| \geqslant \| f(x) - p \| - \| F(x) - F_n(x) \| > 0,$$

故 $p \overline{\in} f_n(\bar{\Omega}_n)$．于是，根据 Brouwer 度的 Kronecker 定理，知 $\deg_n(f_n, \Omega_n, p) = 0$. 由(2·12)式知 $\deg(f, \Omega, p) = 0$，此与假定

矛盾．

最后，结论(ⅴ)的证明与定理1.3(ⅴ)的证明完全一样，从略．证完．

注2 显然，$\deg(I, \Omega, p)=0$，$\forall p \overline{\in} \overline{\Omega}$；另外，对于结论(ⅲ)中 H 全连续的条件，我们常用下面的结论来判断：若 $H:[0,1]\times\overline{\Omega}\to E$ 连续，并且对每个固定的 $t\in[0,1]$，$H(t,\cdot):\overline{\Omega}\to E$ 是紧算子，而且 $H(t,x)$ 对于 t 在任何点 $t_0\in[0,1]$ 的连续性关于 $x\in\overline{\Omega}$ 是一致的；那末必有 $H:[0,1]\times\overline{\Omega}\to E$ 全连续．

今证如下：任给 $(t_n, x_n)\in[0,1]\times\overline{\Omega}(n=1,2,\cdots)$，需证序列 $\{H(t_n, x_n)\}$ 有收敛子列．不妨设 $t_n\to t_0\in[0,1]$（否则取子序列即可）．由假定，$\{H(t_1, x_n)\}$ 有收敛子列，从而存在 $\{x_n\}$ 的子列 $\{x_n^{(1)}\}$，使序列 $\{H(t_1, x_n^{(1)})\}$ 的直径小于1．同理，存在 $\{x_n^{(2)}\}\subset\{x_n^{(1)}\}$，使序列 $\{H(t_2, x_n^{(2)})\}$ 的直径小于 $\frac{1}{2}$．一般地，存在 $\{x_n^{(k)}\}\subset\{x_n^{(k-1)}\}$，使 $\{H(t_k, x_n^{(k)})\}$ 的直径小于 $\frac{1}{k}$．如此继续做下去．下证对角线序列 $\{H(t_n, x_n^{(n)})\}$ 必收敛．事实上，$\forall\varepsilon>0$，由假定，存在 $\delta=\delta(\varepsilon, t_0)>0$，使当 $t\in[0,1]$，$|t-t_0|<\delta$ 时，对一切 $x\in\overline{\Omega}$，恒有 $\|H(t,x)-H(t_0,x)\|<\frac{\varepsilon}{3}$．取正整数 $N>\frac{3}{\varepsilon}$，使当 $n>N$ 时，$|t_n-t_0|<\delta$，于是，当 $m>n>N$ 时，有

$$\begin{aligned}
&\|H(t_m, x_m^{(m)})-H(t_n, x_n^{(n)})\|\\
\leqslant&\|H(t_m, x_m^{(m)})-H(t_0, x_m^{(m)})\|\\
&+\|H(t_0, x_m^{(m)})-H(t_n, x_m^{(m)})\|\\
&+\|H(t_n, x_m^{(m)})-H(t_n, x_n^{(n)})\|\\
<&\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{1}{n}<\varepsilon.
\end{aligned}$$

故 $\{H(t_n, x_n^{(n)})\}$ 是基本列，从而收敛于某 $y_0 \in E$. 下证 $H(t_n^{(n)}, x_n^{(n)}) \to y_0$. 任给 $\varepsilon > 0$，由假定，存在 $\delta > 0$，使当 $t \in [0, 1]$，$|t - t_0| < \delta$ 时，对一切 $x \in \bar{\Omega}$，恒有 $\| H(t, x) - H(t_0, x) \| < \frac{\varepsilon}{3}$. 由于 $\{t_n^{(n)}\}$ 是 $\{t_n\}$ 的子列，故存在 N_0，使当 $n > N_0$ 时，有 $|t_n - t_0| < \delta$，$|t_n^{(n)} - t_0| < \delta$，并且 $\| H(t_n, x_n^{(n)}) - y_0 \| < \frac{\varepsilon}{3}$. 于是，当 $n > N_0$ 时，有

$$
\begin{aligned}
\| H(t_n^{(n)}, x_n^{(n)}) - y_0 \| &\leqslant \| H(t_n^{(n)}, x_n^{(n)}) - H(t_0, x_n^{(n)}) \| \\
&\quad + \| H(t_0, x_n^{(n)}) - H(t_n, x_n^{(n)}) \| + \| H(t_n, x_n^{(n)}) - y_0 \| \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon.
\end{aligned}
$$

故 $H(t_n^{(n)}, x_n^{(n)}) \to y_0$. 证完.

定理 2.2 Leray－Schauder 度具有下列性质：

1° 边界值性质：$\deg(f, \Omega, p)$ 只与 f 在 $\partial\Omega$ 上的值有关，即：若 f, g 都是 $\bar{\Omega}$ 上的全连续场，$p \in E \setminus f(\partial\Omega)$，并且当 $x \in \partial\Omega$ 时，恒有 $f(x) = g(x)$，则必有

$$\deg(f, \Omega, p) = \deg(g, \Omega, p);$$

2° 连通区性质：当 p 在 $E \setminus f(\partial\Omega)$ 的连通区中变动时，$\deg(f, \Omega, p)$ 保持不变，即：若 p_1, p_2 属于 $E \setminus f(\partial\Omega)$ 的同一连通区，那末 $\deg(f, \Omega, p_1) = \deg(f, \Omega, p_2)$；

3° 缺方向性质：若存在 $y_0 \in E$，$y_0 \neq \theta$，使

$$x \in \partial\Omega, \quad \tau \geqslant 0 \Rightarrow f(x) \neq p + \tau y_0,$$

那末必有 $\deg(f, \Omega, p) = 0$.

证明和定理 1.4 之 1°、2°、3° 的证明完全类似，从略.

设 $f = I - F: \bar{\Omega} \to E$ 是全连续场，$x_0 \in \Omega$ 是 f 的孤立零点. 和定义 1.3 完全一样，按(1·43)式引入 **f 在零点 x_0 处的指数**

$\operatorname{inf}(f, x_0)$的概念,并可同样地证明与定理 1.5 相应的定理,即

定理 2.3 设 $f = I - F: \overline{\Omega} \to E$ 是全连续场,又设 f 在$\partial\Omega$ 上没有零点,且在 Ω 内只有有限个零点 $x_1, \cdots, x_m$,则有**指数公式**

$$\deg(f, \Omega, \theta) = \sum_{i=1}^{m} \operatorname{ind}(f, x_i). \tag{2·13}$$

定理 2.4 设 $f = I - F$ 与 $f_1 = I - F_1$ 都是映 $\overline{\Omega}$ 入 E 的全连续场,又设 $p \overline{\in} f(\partial\Omega)$, $p \overline{\in} f_1(\partial\Omega)$,并且

$$\| F_1(x) - F(x) \| \leqslant \| x - F(x) - p \|, \quad \forall\, x \in \partial\Omega. \tag{2·14}$$

那末必有

$$\deg(f_1, \Omega, p) = \deg(f, \Omega, p). \tag{2·15}$$

证 令 $H(t, x) = F(x) + t(F_1(x) - F(x))$,则 $H: [0,1] \times \overline{\Omega} \to E$ 全连续. 又令 $h_t(x) = x - H(t, x)$. 证明 $p \overline{\in} h_t(\partial\Omega)$, $\forall\, 0 \leqslant t \leqslant 1$. 事实上,若存在 $x_0 \in \partial\Omega, 0 \leqslant t_0 \leqslant 1$,使 $p = h_{t_0}(x_0)$,即 $p = x_0 - F(x_0) - t_0(F_1(x_0) - F(x_0))$. 由假定知 $t_0 \neq 0$, $t_0 \neq 1$.

$$\begin{aligned} \| F_1(x_0) - F(x_0) \| &= \frac{1}{t_0} \| x_0 - F(x_0) - p \| \\ &> \| x_0 - F(x_0) - p \|, \end{aligned}$$

此与(2·14)式矛盾. 于是根据同伦不变性即知(2·15)式成立. 证完.

系 1 设 $f = I - F$, $f_1 = I - F_1$,都是映 $\overline{\Omega}$ 入 E 的全连续场, $p \overline{\in} f(\partial\Omega)$. 如果

$$\| F_1(x) - F(x) \| < \| x - F(x) - p \|, \quad \forall\, x \in \partial\Omega, \tag{2·16}$$

则 $p \overline{\in} f_1(\partial\Omega)$,且(2·15)式成立.

证 只需注意当 $x \in \partial\Omega$ 时,

$$\| x - F_1(x) - p \| \geqslant \| x - F(x) - p \| - \| F(x) - F_1(x) \| > 0.$$

证完.

系 2 设 $\theta\in\Omega, A:\bar{\Omega}\to E$ 全连续．若

$$\|Ax\|\leqslant\|x\|,\quad Ax\neq x,\quad \forall x\in\partial\Omega, \tag{2·17}$$

则

$$\deg(I-A,\Omega,\theta)=1.$$

证 在定理 2.4 中，令 $F=\theta, F_1=A, p=\theta$，即得

$$\deg(I-A,\Omega,\theta)=\deg(I,\Omega,\theta)=1.$$ 证完．

定理 2.5 设 $B:E\to E$ 是线性全连续算子，并且 1 不是 B 的固有值，则

$$\mathrm{ind}(I-B,\theta)=(-1)^{\beta}, \tag{2·18}$$

其中 β 表 B 的实的大于 1 的全部固有值代数重数之和．

证 由全连续线性算子的 Riesz－Schauder 理论，知 B 的实的大于 1 的全部固有值只有有限多个，设为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$．用 $E(\lambda_i,B)$ 表 B 对应于 λ_i 的根子空间，即 $E(\lambda_i,B)=N(T^{\nu}), T=B-\lambda_i I, N(T^n)=\{x\,|\,x\in E, T^n x=\theta\}$ 而 ν 为正整数，使当 $n<\nu$ 时，$N(T^n)$ 是 $N(T^{n+1})$ 的真子空间，而当 $n\geqslant\nu$ 时，有 $N(T^n)=N(T^{\nu})$．$N(T^{\nu})$ 的维数（必有限）即为 B 的固有值 λ_i 的代数重数．令 $G(\lambda_i,B)=W(T^{\nu})=\{y\,|\,y=T^{\nu}x, x\in E\}$，则 $G(\lambda_i,B)$ 是 E 的子空间．由全连续线性算子的 Riesz－Schauder 理论（参看〔40〕）知，E 可表为 $E(\lambda_i,B)$ 与 $G(\lambda_i,B)$ 的直接和：任何 $x\in E$ 可惟一表为 $x=u+v, u\in E(\lambda_i,B), v=G(\lambda_i,B)$ 而且投影算子 $P(\lambda_i)x=u$ 和 $Q(\lambda_i)x=v\,(\forall x\in E)$ 都是线性有界算子．用 E_0 表子空间 $E(\lambda_1,B), E(\lambda_2,B),\cdots,E(\lambda_k,B)$ 的直接和，则 E_0 的维数是 β，E_0 是 B 的不变子空间，B 在 E_0 上的限制 B_0 没有异于 $\lambda_1,\cdots,\lambda_k$ 的固有值．

显然，算子 $P_0=P(\lambda_1)+P(\lambda_2)+\cdots+P(\lambda_k)$ 是投影到 E_0 上的投影算子．令 $Q_0=I-P_0$，则 Q_0 是投影到子空间 $E^0=$

$Q_0(E)$上的投影算子(一般地, E^0 是无限维的), E 是 E^0 与的直接和, E^0 也是 B 的不变子空间, B 在 E^0 上的限制 B^0 不具有大于 1 的实固有值.

用 Ω 表 E 中单位球: $\Omega=\{x \mid x\in E, \|x\|<1\}$ 令

$$H(t,x)=2tP_0x+(1-t)B_0P_0x+(1-t)B^0Q_0x,$$
$$\forall x\in\partial\overline{\Omega},\ 0\leqslant t\leqslant 1.$$

注意到 E_0 是有限维子空间, 易知 $H:[0,1]\times\overline{\Omega}\to E$ 全连续. 令 $h_t(x)=x-H(t,x)$, $\forall x\in\overline{\Omega}, 0\leqslant t\leqslant 1$. 下证 $\theta\overline{\in} h_t(\partial\Omega)$, $\forall 0\leqslant t\leqslant 1$. 事实上, 若 $\exists\, t_0\in[0,1]$, $x_0\in\partial\Omega$, 使

$$\begin{aligned}\theta&=x_0-H(t_0,x_0)\\&=(1-2t_0)P_0x_0-(1-t_0)B_0P_0x_0\\&\quad+Q_0x_0-(1-t_0)B^0Q_0x_0.\end{aligned}$$

于是

$$(1-2t_0)P_0x_0-(1-t_0)B_0P_0x_0=\theta, \tag{2·19}$$

$$Q_0x_0-(1-t_0)B^0Q_0x_0=\theta. \tag{2·20}$$

若 $t_0=0$, 则由(2·19)、(2·20)两式得 $x_0=Bx_0$, 此与 1 不是 B 的固有值之假定矛盾; 若 $t_0=1$, 则由(2·19)与(2·20)两式得 $P_0x_0=Q_0x_0=\theta$, 从而 $x_0=\theta$, 此与 $x_0\in\partial\Omega$ 矛盾; 若 $0<t_0<1$, 由(2·20)式, 注意到 B^0 不具有大于 1 的实固有值, 知 $Q_0x_0=\theta$, 从而 $P_0x_0\neq\theta$(因 $x_0\neq\theta$), 这表示(注意到(2·19)式) $\frac{1-2t_0}{1-t_0}$是 B_0 的固有值, 但显然$\frac{1-2t_0}{1-t_0}<1$, 此与 B_0 没有异于 $\lambda_1,\cdots,\lambda_k$ 的固有值矛盾. 总之, 有 $\theta\overline{\in} h_t(\partial\Omega)$, $0\leqslant t\leqslant 1$. 于是根据同伦不变性知

$$\mathrm{ind}(I-B,\theta)=\deg(I-B,\Omega,\theta)$$

$$= \deg(h_0, \Omega, \theta) = \deg(h_1, \Omega, \theta). \qquad (2\cdot21)$$

但 $h_1(x) = x - H(1, x) = x - 2P_0x$, 即 $h_1 = I - 2P_0$. 根据 Leray－Schauder 度的定义,注意到 h_1 在空间 E_0 中闭域 $E_0 \cap \bar{\Omega}$ 上的限制为 $I - 2I = -I$,并根据定理 1.6 的系,得到

$$\deg(h_1, \Omega, \theta) = \deg(-I, E_0 \cap \Omega, \theta) = (-1)^{\beta}. \qquad (2\cdot22)$$

由(2·21)式与(2·22)式即得(2·18)式．证完．

定理 2.6(Leray－Schauder)　设 D 是 E 中开集, $A: D \to E$ 全连续, $x_0 \in D$, $Ax_0 = x_0$. 又设 A 在点 x_0 处 Fréchet 可微,并且 1 不是导算子 $A'(x_0)$ 的固有值．那末 x_0 必是 A 的孤立不动点,并且指数

$$\operatorname{ind}(I - A, x_0) = \operatorname{ind}(I - A'(x_0), \theta) = (-1)^{\beta}, \qquad (2\cdot23)$$

其中 β 表 $A'(x_0)$ 的实的大于 1 的全部固有值代数重数之和．

证　由第一章定理 3.5 知 $A'(x_0): E \to E$ 是线性全连续算子．于是,根据定理 2.5 知

$$\operatorname{ind}(I - A'(x_0), \theta) = (-1)^{\beta}, \qquad (2\cdot24)$$

由于 1 不是 $A'(x_0)$ 的固有值,故存在 $\alpha > 0$,使

$$\| h - A'(x_0)h \| \geqslant \alpha \| h \|, \ \forall h \in E.$$

又由 $A'(x_0)$ 的定义知,存在 $\tau > 0$,使当 $0 < \| h \| \leqslant \tau$ 时,恒有

$$\| A(x_0 + h) - Ax_0 - A'(x_0)h \| < \alpha \| h \|.$$

于是,注意到 $Ax_0 = x_0$,知

$$\| A(x_0 + h) - x_0 - A'(x_0)h \| < \| h - A'(x_0)h \|,$$
$$\forall 0 < \| h \| \leqslant \tau. \qquad (2\cdot25)$$

$S(z_0, r)$ 用记号表球 $\{x \mid \| x - z_0 \| < r\}$,并令

$$f(h) = h - (A(x_0 + h) - x_0) = x_0 + h - A(x_0 + h),$$

则由(2·25)式,应用定理 2.4 的系 1,知 θ 是 $f(h)$ 的孤立零点,

并且

$$\deg(f, S(\theta, r), \theta) = \deg(I - A'(x_0), S(\theta, r), \theta)$$

$$\forall\, 0 < r \leqslant \tau. \tag{2·26}$$

于是 x_0 是 A 的孤立不动点，并且

$$\deg(f, S(\theta, r), \theta) = \deg(I - A, S(x_0, r), \theta)$$

$$= \mathrm{ind}(I - A, x_0), \qquad \forall\, 0 < r \leqslant \tau, \tag{2·27}$$

又，显然

$$\deg(I - A'(x_0), S(\theta, r), \theta) = \mathrm{ind}(I - A'(x_0), \theta). \tag{2·28}$$

于是，由(2·24)、(2·26)、(2·27)及(2·28)诸式即得(2·23)式．证完．

注 3 〔39〕对 1 是 $A'(x_0)$ 的固有值的情形进行了讨论．

定理 2.7 设 $T_r = \{x \mid x \in E, \|x\| < r\}\ (r > 0)$，$A: \overline{T}_r \to E$ 全连续，$f = I - A$．若

$$A(-x) = -Ax, \quad Ax \neq x, \quad \forall\, x \in \partial T_r, \tag{2·29}$$

则 $\deg(f, T_r, \theta)$ 是奇数．

证 根据 Leray - Schauder 度的定义 2.1，有

$$\deg(f, T_r, \theta) = \deg(f_n, T_r^n, \theta), \tag{2·30}$$

其中 $f_n = I - A_n$，A_n 是按第一章定理 2.6 作出的有限维算子，$A_n: \overline{T}_r \to E^{(n)}$ 连续、有界，并且

$$\|Ax - A_n x\| < \tau = \inf_{x \in \partial T_r} \|f(x)\|$$

$T_r^n = E^{(n)} \cap T_r$．在第一章定理 2.6 的证明中，$y_1, \cdots, y_m$ 是 $A(\overline{T}_r)$ 的 ε - 网（这里取 $\varepsilon = \tau$），现在用 $y_1, \cdots, y_m, y_{m+1}, \cdots, y_{2m}$ $(y_{m+i} = -y_i,\ i = 1, 2, \cdots, m)$ 来代替 $y_1, \cdots, y_m$，它们仍然是 $A(\overline{T}_r)$ 的 ε - 网．这时，第一章(2·20)式应为

$$A_n x = \frac{1}{d(Ax)} \sum_{i=1}^{2m} d_i(Ax) y_i, \quad \forall x \in \overline{T}_r. \qquad (2 \cdot 31)$$

易知 $d_i(y) = d_{m+i}(-y), d_i(-y) = d_{m+i}(y), i = 1, 2, \cdots, m$；由此知 $d(y) = d(-y), \forall y \in E$. 根据(2·31)式，并注意到(2·29)式，易知

$$A_n(-x) = -A_n x, \quad \forall x \in \partial T_r^n \subset \partial T_r. \qquad (2 \cdot 32)$$

于是，根据 Borsuk 定理(定理 1.7)知 $\deg(f_n, T_r^n, \theta)$是奇数，从而由(2·30)式知 $\deg(f, T_r, \theta)$是奇数．证完．

系 设 $T_r = \{x \mid x \in E, \|x\| < r\}, (r > 0) A: \overline{T}_r \to E$ 全连续，$f = I - A$，若

$$f(x) \neq \theta, \quad \frac{f(-x)}{\|f(-x)\|} \neq \frac{f(x)}{\|f(x)\|}, \quad \forall x \in \partial T_r, \quad (2 \cdot 33)$$

则 $\deg(f, T_r, \theta)$是奇数．

证 令 $H(t, x) = \frac{1}{1+t} Ax - \frac{t}{1+t} A(-x)$，则 $H: [0, 1] \times \overline{T}_r \to E$ 全连续．令 $h_t(x) = x - H(t, x) = \frac{1}{1+t} f(x) - \frac{t}{1+t} f(-x)$．下证 $\theta \overline{\in} h_t(\partial T_r), 0 \leqslant t \leqslant 1$．事实上，若有 $0 \leqslant t_0 \leqslant 1, x_0 \in \partial T_r$ 存在，使 $h_{t_0}(x_0) = \frac{1}{1+t_0} f(x_0) - \frac{t_0}{1+t_0} f(-x_0) = \theta$，则 $t_0 > 0$(由(2·33)式)且 $f(x_0) = t_0 f(-x_0)$，

$$\frac{f(x_0)}{\|f(x_0)\|} = \frac{t_0 f(-x_0)}{\|t_0 f(-x_0)\|} = \frac{f(-x_0)}{\|f(-x_0)\|},$$

此与(2·33)式矛盾．于是，根据同伦不变性知

$$\deg(h_0, T_r, \theta) = \deg(h_1, T_r, \theta).$$

但 $h_0(x) = f(x), h_1(x) = x - [\frac{1}{2} Ax - \frac{1}{2} A(-x)]$．由于 $\frac{1}{2} Ax - \frac{1}{2} A(-x)$是奇的，即

$$\frac{1}{2}A(-x)-\frac{1}{2}Ax=-\left[\frac{1}{2}Ax-\frac{1}{2}A(-x)\right],$$

故根据定理 2.7 知 $\deg(h_1, T_r, \theta)$是奇数，从而 $\deg(f, T_r, \theta)$是奇数．证完．

注 4 由上述证明方法以及定理1.7后的注 9 可知：当把 T_r 换为关于 θ 对称的含 θ 的有界开集 Ω 时，定理 2.7 及其系仍然成立．

定理 2.8(拓扑度乘积定理) 设 Ω 是 E 中有界开集，$f=I-F:\overline{\Omega}\rightarrow E$ 是全连续场，用$\{D_\alpha\}$表开集 $E\setminus f(\partial\Omega)$的全部连通区．设 $g=I-G:f(\overline{\Omega})\rightarrow E$ 是全连续场，$p\in E\setminus gf(\partial\Omega)$那末下面的公式成立：

$$\deg(gf,\Omega,p)=\sum_{D_\alpha\subset f(\Omega)}\deg(f,\Omega,D_\alpha)\cdot\deg(g,D_\alpha,p),\quad(2\cdot34)$$

其中 $\deg(f,\Omega,D_\alpha)$表 $\deg(f,\Omega,y)$，$\forall\, y\in D_\alpha$；并且当 D_α 有无穷多个时，除有限多个 D_α 外，均有 $\deg(g,D_\alpha,p)=0\,(D_\alpha\subset f(\Omega))$，因此，(2·34)右端实际上是有限项的和．

证 首先注意，$gf=(I-G)(I-F)=I-[F+Gf]$故 $gf:\overline{\Omega}\rightarrow E$ 是全连续场，因此(2·34)左端有意义．

由假定知 $g^{-1}(p)$与 $f(\partial\Omega)$不相交，因此 $g^{-1}(p)\subset E\setminus f(\partial\Omega)=\bigcup\limits_\alpha D_\alpha$．根据引理 2.1 知 $g^{-1}(p)$是紧集，因此，存在有限个 D_α 已经覆盖 $g^{-1}(p)$，从而对于其他的含于 $f(\Omega)$内的 D_α，显然有 $\deg(g,D_\alpha,p)=0$．故(2·34)右端是有限项的和．

取 $r>0$，使球 $T=\{x\,|\,x\in E,\|x\|<r\}\supset f(\overline{\Omega})$．由全连续算子的延拓定理(第一章定理 2.7)知，可把 G 延拓为映 $\overline{T}$ 入 E 全连续(仍记为 G)．于是 $g=I-G:\overline{T}\rightarrow E$ 是全连续场．对整数 k，令

$$O_k = \{ y \mid y \in T \setminus f(\partial \Omega), \deg(f, \Omega, y) = k \}$$

$$N_k = \{ \alpha \mid D_\alpha \subset f(\Omega), \deg(f, \Omega, D_\alpha) = k \}.$$

注意到当 $y \in T \setminus f(\bar{\Omega})$时，$\deg(f, \Omega, y) = 0$ 即知

$$O_k = \bigcup_{\alpha \in N_k} D_\alpha, \quad \forall k \neq 0.$$

于是$\partial O_k \subset f(\partial \Omega)$. 注意到前面已证，除有限个 D_α 外，对其他的 D_α(并设 $D_\alpha \subset f(\Omega)$)均有 $p \overline{\in} g(\bar{D}_\alpha)$，根据 Leray－Schauder 度的切除性与可加性，有

$$\sum_{D_\alpha \subset f(\Omega)} \deg(f, \Omega, D_\alpha) \cdot \deg(g, D_\alpha, p)$$

$$= \sum_{k \neq 0} k \left(\sum_{\alpha \subset N_k} \deg(g, D_\alpha, p) \right) = \sum_{k \neq 0} k \deg(g, O_k, p). \quad (2 \cdot 35)$$

因此，只需证明

$$\deg(gf, \Omega, p) = \sum_{k \neq 0} k \deg(g, O_k, p). \quad (2 \cdot 36)$$

由于 $g^{-1}(p)$紧，并且与有界闭集 $f(\partial \Omega)$不相交，故它们间的距离

$$\tau = \operatorname{dis}(g^{-1}(p), f(\partial \Omega)) = \inf_{y \in T, g(y) = p, x \in \partial \Omega} \| y - f(x) \| > 0. \quad (2 \cdot 37)$$

根据第一章定理 2.6，可取 E 的有限维子空间$E^{(n)}$及 $F_n : \bar{\Omega} \to E^{(n)}$连续、有界，使

$$\sup_{x \in \bar{\Omega}} \| F(x) - F_n(x) \| < \frac{\tau}{2}, \quad \text{且 } f_n(\bar{\Omega}) \subset T, \quad (2 \cdot 38)$$

其中 $f_n = I - F_n$. 对任何 $y \in g^{-1}(p)$, $z \in \partial \Omega$，有

$$\tau \leqslant \| y - f(z) \| \leqslant \| y - f_n(z) \| + \| F(z) - F_n(z) \|$$

$$\leqslant \| y - f_n(z) \| + \sup_{x \in \bar{\Omega}} \| F(x) - F_n(x) \|$$

再注意到(2·38)式，即得

$$\sup_{x \in \bar{\Omega}} \| F(x) - F_n(x) \| < \operatorname{dis}(g^{-1}(p), f_n(\partial \Omega)). \quad (2 \cdot 39)$$

令

$$O_k^{(n)}=\{y\,|\,y\in T\setminus f_n(\partial\Omega),\deg(f_n,\Omega,y)=k\}.$$

由(2·38)式与(2·39)式知：当 $y\in g^{-1}(p)$时，恒有 $\deg(f,\Omega,y)=\deg(f_n,\Omega,y)$；从而 $g^{-1}(p)\cap O_k=g^{-1}(p)\cap O_k^{(n)}$. 故 $p\overline{\in}g(O_k\setminus O_k^{(n)})$. 于是，由 $O_k=(O_k\setminus O_k^{(n)})\cup(O_k\cap O_k^{(n)})$，利用 Leray－Schauder 度的切除性，知

$$\deg(g,O_k,p)=\deg(g,O_k\cap O_k^{(n)},p).$$

同理可知

$$\deg(g,O_k^{(n)},p)=\deg(g,O_k^{(n)}\cap O_k,p).$$

由此得

$$\deg(g,O_k,p)=\deg(g,O_k^{(n)},p). \tag{2·40}$$

由(2·39)式知 $\deg(p,gf_n(\partial\Omega))>0$. 根据第一章定理 2.6，取 E 的有限维子空间$E^{(m)}$以及连续、有界算子 $G_m:\overline{T}\to E^{(m)}$，使

$$\sup_{x\in\overline{T}}\|G(x)-G_m(x)\|<\operatorname{dis}(p,gf_n(\partial\Omega)). \tag{2·41}$$

注意到$\partial O_k^{(n)}\subset f_n(\partial\Omega)$($\forall k\neq0$，这和$\partial O_k\subset f(\partial\Omega)$，$k\neq0$，类似)，有 $\operatorname{dis}(p,g(\partial O_k^{(n)}))\geqslant\operatorname{dis}(p,gf_n(\partial\Omega))$，$\forall k\neq0$，从而

$$\sup_{x\in\overline{T}}\|G(x)-G_m(x)\|<\operatorname{dis}(p,g(\partial O_k^{(n)})),\quad \forall k\neq0 \tag{2·42}$$

令 $g_m=I-G_m$，于是由(2·42)式，并根据定理 2.4 的系 1 知

$$\deg(g,O_k^{(n)},p)=\deg(g_m,O_k^{(n)},p),\ \forall k\neq0. \tag{2·43}$$

由(2·41)式知：当 $x\in\partial\Omega$ 时有

$$\begin{aligned}\|g_mf_n(x)-p\|&\geqslant\|gf_n(x)-p\|-\|g_mf_n(x)-gf_n(x)\|\\&\geqslant\operatorname{dis}(p,gf_n(\partial\Omega))-\sup_{z\in\overline{T}}\|g_m(z)-g(z)\|\\&=\operatorname{dis}(p,gf_n(\partial\Omega))-\sup_{z\in\overline{T}}\|G_m(z)-G(z)\|>0,\end{aligned}$$

故 $p \overline{\in} g_m f_n(\partial \Omega)$. 今取 E 的有限维子空间 $E^{(l)}$, 使得 $E^{(n)} \subset E^{(l)}, E^{(m)} \subset E^{(l)}, p \in E^{(l)}$. 于是, 根据 Leray - Schauder 度的定义, 有

$$\deg(g_m, O_k^{(n)}, p) = \deg_l(g_m, O_k^{(n)} \cap E^{(l)}, p,) \quad (2\cdot44)$$

$$\deg(g_m f_n, \Omega, p) = \deg_l(g_m f_n, \Omega \cap E^{(l)}, p). \quad (2\cdot45)$$

根据 Brouwer 度的乘积定理(定理 1.16), 并仿(2·35)式的推导, 知

$$\begin{aligned} &\deg_l(g_m f_n, \Omega \cap E^{(l)}, p) \\ &= \sum_{k \neq 0} k \deg_l(g_m, O_k^{(n)} \cap E^{(l)}, p). \end{aligned} \quad (2\cdot46)$$

由(2·46)、(2·45)、(2·44)、(2·43)、(2·40)诸式, 得

$$\deg(g_m f_n, \Omega, p) = \sum_{k \neq 0} k \deg(g, O_k, p). \quad (2\cdot47)$$

下面证明

$$\deg(g_m f_n, \Omega, p) = \deg(g f_n, \Omega, p), \quad (2\cdot48)$$

$$\deg(g f_n, \Omega, p) = \deg(g f, \Omega, p). \quad (2\cdot49)$$

令

$$h_t(x) = t g f_n(x) + (1-t) g_m f_n(x) = x - H(t, x),$$

其中 $H(t, x) = F_n x + t G f_n(x) + (1-t) G_m f_n(x)$. 显然, H: $[0,1] \times \overline{\Omega} \to E$ 全连续. 由(2·41)式知当 $0 \leqslant t \leqslant 1, x \in \partial \Omega$ 时有(注意(2·38)式, $f_n(\overline{\Omega}) \subset T$)

$$\begin{aligned} &\| p - h_t(x) \| \geqslant \| p - g f_n(x) \| - (1-t) \| g f_n(x) - g_m f_n(x) \| \\ &\geqslant \text{dis}(p, g f_n(\partial \Omega)) - (1-t) \sup_{z \in T} \| g(z) - g_m(z) \| \\ &\geqslant \text{dis}(p, g f_n(\partial \Omega)) - \sup_{z \in T} \| G(z) - G_m(z) \| > 0, \end{aligned}$$

故 $p \overline{\in} h_t(\partial \Omega), 0 \leqslant t \leqslant 1$. 因此 Leray - Schauder 度的同伦不变性知(2·48)式成立.

令

$$h_t^*(x)=g(tf_n(x)+(1-t)f(x))=x-H^*(t,x),$$

其中

$$H^*(t,x)=tF_n(x)+(1-t)F(x)+G(tf_n(x)+(1-t)f(x)).$$

注意,由于 $f_n(\bar{\Omega})\subset T$, $f(\bar{\Omega})\subset T$,而 T 是凸集,故 $tf_n(x)+(1-t)f(x)\in T$, $\forall 0\leqslant t\leqslant 1$, $x\in\Omega$;又,$g=I-G:\bar{T}\to E$ 全连续场,故 $h_t^*(x)$有意义,并且显然 $H^*:[0,1]\times\bar{\Omega}\to E$ 全连续. 下证 $p\overline{\in}h_t^*(\partial\Omega)$, $0\leqslant t\leqslant 1$. 事实上,若不然,则存在 $0\leqslant t_0\leqslant 1$ 及 $x_0\in\partial\Omega$,使

$$p=h_{t_0}^*(x_0)=g(t_0f_n(x_0)+(1-t_0)f(x_0))=g(y_0),$$

其中 $y_0=t_0f_n(x_0)+(1-t_0)f(x_0)\in T$. 于是,$y_0\in g^{-1}(p)$. 我们有(注意(2·38)式)

$$\begin{aligned}0&=\|y_0-[t_0f_n(x_0)+(1-t_0)f(x_0)]\|\\&\geqslant\|y-f(x_0)\|-t_0\|f(x_0)-f_n(x_0)\|\\&=\|y_0-f(x_0)\|-t_0\|F(x_0)-F_n(x_0)\|\\&\geqslant \mathrm{dis}(g^{-1}(p),f(\partial\Omega))-\sup_{x\in\bar{\Omega}}\|F(x)-F_n(x)\|>0,\end{aligned}$$

得出矛盾. 故 $p\overline{\in}h_t^*(\partial\Omega)$, $0\leqslant t\leqslant 1$. 于是,根据同伦不变性知(2·49)式成立.

由(2·49)、(2·48)、(2·47)三式即得(2·36)式. 证完.

系 1 在定理2.8的条件下,若 $f(\Omega)$本身是一个连通开集,则

$$\deg(gf,\Omega,p)=\deg(f,\Omega,f(\Omega))\cdot\deg(g,f(\Omega),p).$$

系 2 设 x_0 是全连续场 $f=I-F$ 的孤立零点,而 θ 又是全连续场$g=I-G$ 的孤立零点,则 x_0 是全连续场 gf 的孤立零点,并且

$$\operatorname{ind}(gf, x_0) = \operatorname{ind}(f, x_0) \cdot \operatorname{ind}(g, \theta). \qquad (2 \cdot 50)$$

证 同于定理1.16系2之证．从略．

注5 我们还可用公理法来引入拓扑度的概念，即把 $\deg(f, \Omega, p)$ 视为三变元 f, Ω, p 的整值函数，而把它的几条最基本的性质作为公理来要求(例如，参看〔55〕、〔34〕、〔9〕)．从而，可证明Brouwer度的惟一性与Leray－Schauder度的惟一性(参见〔34〕)，即：若三变元 f, Ω, p 的整值函数 $\deg(f, \Omega, p)$(这里，Ω 取 R^n 中一切有界开集，f 取一切映 $\bar{\Omega}$ 入 R^n 的连续映象，p 取满足 $p \in R^n \setminus f(\partial\Omega)$ 的一切点)具有定理1.3中的性质(ⅰ)、(ⅱ)、(ⅲ)、(ⅵ)，那末，此整值函数必等于定义1.2中所定义的Brouwer度．由此可知，虽然具体引入Brouwer度的方法很多(正如§1开头所述)，但所得结果都是一样的．同样，若三变元 f, Ω, p 的整值函数 $\deg(f, \Omega, p)$(这里 Ω 取实Banach空间 E 中一切有界开集，f 取一切全连续场：$f = I - F$，$F: \bar{\Omega} \to E$ 全连续，p 取满足 $p \in E \setminus f(\partial\Omega)$ 的一切点)具有定理2.1中的性质(ⅰ)、(ⅱ)、(ⅲ)、(ⅵ)，那末，此整值函数必等于定义2.1中定义的Leray－Schauder度．

§3 不动点定理

本节利用Leray－Schauder度来建立一些不动点定理．其一般原则如下：若全连续场 $f = I - F: \bar{\Omega} \to E$ 满足 $\deg(f, \Omega, \theta) \neq 0$，则由可解性知，存在 $x^* \in \Omega$，使 $f(x^*) = \theta$，即 $x^* = F(x^*)$，亦即 x^* 是 F 的不动点．

定理3.1(Rothe) 设 Ω 是 E 中有界凸开集，$A: \bar{\Omega} \to E$ 全连续，并且 $A(\partial\Omega) \subset \bar{\Omega}$，则 A 在 $\bar{\Omega}$ 内必有不动点．

证 可设 $Ax \neq x(\forall x \in \partial\Omega)$(否则,定理已获证). 取 $x_0 \in \Omega$,令

$$h_t(x) = t(x - Ax) + (1-t)(x - x_0) = x - H(t, x),$$

其中 $H(t, x) = tAx + (1-t)x_0$. 显然 $H:[0,1] \times \overline{\Omega} \to E$ 全连续. 下证 $\theta \overline{\in} h_t(\partial\Omega)$, $\forall 0 \leqslant t \leqslant 1$. 事实上,若存在 $0 \leqslant t_1 \leqslant 1$, $x_1 \in \partial\Omega$,使 $h_{t_1}(x_1) = \theta$,即

$$x_1 = t_1 Ax + (1 - t_1)x_0, \tag{3·1}$$

则 $t_1 \neq 0$(因 $x_1 \neq x_0$), $t_1 \neq 1$(因 $Ax_1 \neq x_1$),故 $0 < t_1 < 1$. 因 Ω 是开集,故存在 $r > 0$,使球 $T(x_0, r) = \{x \mid \|x - x_0\| < r\} \subset \Omega$. 由假定知 $Ax_1 \in \overline{\Omega}$,从而存在 $z_0 \in \Omega$,使

$$\|z_0 - Ax_1\| < \frac{(1-t_1)r}{t_1}. \tag{3·2}$$

易知球 $T(t_1 z_0 + (1-t_1)x_0, (1-t_1)r) \subset \Omega$,(因若 $x \in T(t_1 z_0 + (1-t_1)x_0, (1-t_1)r)$,则 $x = t_1 z_0 + (1-t_1)x_0 + (1-t_1)z$, $\|z\| < r$,于是 $x = t_1 z_0 + (1-t_1)(x_0 + z)$. 由于 $z_0 \in \Omega$, $x_0 + z \in \Omega$, Ω 是凸集,故 $x \in \Omega$),而由(3·1)式知

$$\begin{aligned} x_1 &= t_1 Ax_1 + (1-t_1)x_0 \\ &= t_1 z_0 + (1-t_1)x_0 + t_1(Ax_1 - z_0), \end{aligned} \tag{3·3}$$

根据(3·2)式,有 $\|t_1(Ax_1 - z_0)\| < (1-t_1)r$,故由(3·3)式知 $x_1 \in T(t_1 z_0 + (1-t_1)x_0, (1-t_1)r) \subset \Omega$,此与 $x_1 \in \partial\Omega$ 矛盾. 于是,有 $\theta \overline{\in} h_t(\partial\Omega)$, $\forall 0 \leqslant t \leqslant 1$. 由此,根据同伦不变性,知

$$\begin{aligned} &\operatorname{ind}(I - A, \Omega, \theta) = \deg(h_1, \Omega, \theta) = \deg(h_0, \Omega, \theta) \\ &= \deg(I - x_0, \Omega, \theta) = \deg(I, \Omega, x_0) = 1 \neq 0, \end{aligned}$$

故 A 在 Ω 内具有不动点. 证完.

定理 3.2(Schauder) 设 D 是 E 中有界凸闭集(D 不一定

有内点)，$A:D\to D$ 全连续，则 A 在 D 中必具有不动点．

证 取球 $T=\{x\mid \|x\|<R\}(R>0)$，使 $D\subset T$．由全连续算子的延拓定理(第一章定理 2.7)，可将 A 延拓为映 $\overline{T}$ 入 $\overline{co}A(D)\subset D$ 的全连续算子，于是 $A(\partial T)\subset D\subset\overline{T}$，从而，根据定理 3.1 知 A 在 $\overline{T}$ 中具有不动点 x^*．由于 $A(\overline{T})\subset D$，故必有 $x^*\in D$．证完．

系 1 设 D 是 E 中凸紧集，$A:D\to D$ 连续，则 A 在 D 中必具有不动点．

系 2 设 D 是 E 中凸闭集，$A:D\to D$ 连续，并且 $A(D)$ 是相对紧集，则 A 在 D 中必具有不动点．

证 令 $D_1=\overline{co}A(D)$，则 D_1 是凸紧集，且 $D_1\subset D$．显然 $A|_{D_1}:D_1\to D_1$ 连续，故由系 1 知 $A|_{D_1}$ 在 D_1 中具有不动点．证完．

注 1 当 E 是局部凸线性拓扑空间时，系 1 的结论也成立，这就是 Schauder－Тихонов 不动点定理(参看〔40〕)．

例 3.1 考察 Урысон 积分方程

$$\varphi(x)=\int_G k(x,y,\varphi(y))\mathrm{d}y, \tag{3·4}$$

其中 G 是 R^N 中某有界闭集．设 $k(x,y,u)$ 在 $x\in G$，$y\in G$，$-\infty<u<+\infty$ 上连续，且满足不等式

$$|k(x,y,u)|\leqslant a+b|u|,\quad \forall x,y\in G,\quad -\infty<u<+\infty,$$

其中 $a>0$，$b>0$，$b\,\mathrm{mes}G<1$．下面证明：方程(3·4)必具有连续解．

证 显然，积分算子

$$A\varphi(x)=\int_G k(x,y,\varphi(y))\mathrm{d}y$$

映 $C(G)$入 $C(G)$全连续．令 $R=\frac{a\,\mathrm{mes}G}{1-b\,\mathrm{mes}G}$，并令 D 表$C(G)$中闭球$\{\varphi \mid \|\varphi\|_C\leqslant R\}$．于是，当 $x\in D$ 时

$$|A\varphi(x)|\leqslant\int_G |k(x,y,\varphi(y))|\,\mathrm{d}y\leqslant a\,\mathrm{mes}G+b\,\mathrm{mes}G\|\varphi\|_C,$$

从而

$$\|A\varphi\|_C\leqslant a\,\mathrm{mes}G+b\,\mathrm{mes}G\|\varphi\|_C\leqslant a\,\mathrm{mes}G+bR\,\mathrm{mes}G=R.$$

由此可知 $A(D)\subset D$．于是，根据 Schauder 不动点定理（定理3.2）知 A 在D 中必具有不动点．证完．

定理 3.3（Leray－Schauder） 设 $A:E\rightarrow E$ 全连续．如果集$\{\|x\| \mid x\in E, x=\lambda Ax, 0<\lambda<1\}$是有界的，则 A 在E 中的闭球T 中必有不动点，这里

$$T=\{x \mid x\in E, \|x\|\leqslant R\},$$
$$R=\sup\{\|x\| \mid x=\lambda Ax,\ 0<\lambda<1\}.$$

证 令 $T_k=\left\{x \mid x\in E, \|x\|<R+\frac{1}{k}\right\}$．如果 A 在∂T_k 上没有不动点，可令 $h_t(z)=x-tAx$．于是 $\theta\overline{\in} h_t(\partial T_k)$，$\forall\, 0\leqslant t\leqslant 1$．故根据同伦不变性知

$$\begin{aligned}\deg(I-A,T_k,\theta)&=\deg(h_1,T_k,\theta)=\deg(h_0,T_k,0)\\&=\deg(I,T_k,\theta)=1\neq 0,\end{aligned}$$

因此，A 在 T_k 中具有不动点．故根据上述可知，在任何情况下，A 在$\overline{T}_k$ 中都必有不动点x_k，即 $x_k=Ax_k(k=1,2,3,\cdots)$，$x_k\in\overline{T}_k$．根据 A 的全连续性知，存在子列 x_{k_i}，使 $Ax_{k_i}\rightarrow x^*\in E$，于是 $x_{k_i}=Ax_{k_i}\rightarrow x^*$．由$\|x_k\|\leqslant R+\frac{1}{k}$，得$\|x^*\|\leqslant R$．根据 A 的连续性，得 $x^*=Ax^*$．证完．

注2 定理3.3广泛应用于常微分方程和偏微分方程的一

些问题中．

例 3.2 考察常微分方程的初值问题：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=f(t,x), & t\in[a,b];\\ x(a)=x_0.\end{cases}\tag{3·5}$$

证明：若 $f:[a,b]\times R^n\to R^n$ 连续，并且满足

$$\|f(t,x)\|\leqslant M(1+\|x\|),\quad \forall\, t\in[a,b],\quad x\in R^n,\tag{3·6}$$

其中 M 是某正数，那末问题(3·5)必具有属于 $C^1[a,b]$的解 $x(t)$，满足

$$\|x(t)\|\leqslant[\|x_0\|+M(b-a)]e^{M(b-a)},\quad \forall\, t\in[a,b].$$

证 显然，问题(3·5)属于 $C^1[a,b]$的解等价于积分方程

$$x(t)=x_0+\int_a^t f(s,x(s))\mathrm{d}s$$

的连续解，亦即算子

$$Ax(t)=x_0+\int_a^t f(s,x(s))\mathrm{d}s$$

在连续函数空间 $C_n[a,b]=\{x(t)\mid x(\cdot):[a,b]\to R^n \text{ 连续}\}$中的不动点（注意，$C_n[a,b]$是 Banach 空间，其中范数 $\|x\|=\max\limits_{a\leqslant t\leqslant b}\|x(t)\|$）. 易知，$A:C_n[a,b]\to C_n[a,b]$全连续．我们证明：

$$x(t)\in C_n[a,b],\quad x(t)=\lambda Ax(t),$$
$$0<\lambda<1\Rightarrow\|x\|\leqslant M_0,\tag{3·7}$$

其中 $M_0=[\|x_0\|+M(b-a)]e^{M(b-a)}$. 设 $x(t)\in C_n[a,b]$满足 $x(t)=\lambda Ax(t)$，$0<\lambda<1$. 于是由(3·6)式

$$\|x(t)\|\leqslant\|Ax(t)\|$$
$$\leqslant\|x_0\|+\int_a^t\|f(s,x(s))\|\mathrm{d}s$$

$$\leqslant \|x_0\| + M\int_a^t (1+\|x(s)\|)\mathrm{d}s$$

$$\leqslant \|x_0\| + M(b-a) + M\int_a^t \|x(s)\|\mathrm{d}s. \qquad (3\cdot 8)$$

令 $\varphi(t)=\|x_0\|+M(b-a)+M\int_a^t\|x(s)\|\mathrm{d}s$,则由(3·8)式知 $\|x(t)\|\leqslant\varphi(t)$. 又显然 $\varphi'(t)=M\|x(t)\|\leqslant M\varphi(t)$,故

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\varphi(t)e^{-Mt}]\leqslant 0,\quad a\leqslant t\leqslant b.$$

由此可知,$\varphi(t)e^{-Mt}$是$[a,b]$上的减函数,从而

$$\varphi(t)e^{-Mt}\leqslant\varphi(a)e^{-Ma},\quad a\leqslant t\leqslant b,$$

于是

$$\|x(t)\|\leqslant\varphi(t)\leqslant\varphi(a)e^{M(b-a)}$$
$$=[\|x_0\|+M(b-a)]e^{M(b-a)}=M_0,$$

故

$$\|x\|=\max_{a\leqslant t\leqslant b}\|x(t)\|\leqslant M_0,$$

即(3·7)式成立 . 于是,根据定理 3.3 即获证 . 证完 .

例 3.3 设 Ω 是 xy 平面上某有界凸区域,且其边界$\partial\Omega\in C^{2+\alpha}$,$0<\alpha<1$,并且$\partial\Omega$ 可用参数式 $x=x(s)$, $y=y(s)$表示,这里 $x(s)$, $y(s)$具有连续二阶导数,又设$\partial\Omega$ 在其上每一点均具有正的曲率 . 考察拟线性椭圆型偏微分方程

$$A(x,y,z,z_x,z_y)z_{xx}+B(x,y,z,z_x,z_y)z_{xy}$$
$$+C(x,y,z,z_x,z_y)z_{yy}=0,\quad (x,y)\in\Omega, \qquad (3\cdot 9)$$

其中函数 $A(x,y,z,p,q)$, $B(x,y,z,p,q)$, $C(x,y,z,p,q,)$对于$(x,y)\in\Omega$, $z\in R^1$, $p\in R^1$, $q\in R^1$ 具有各二阶偏导数,而且这些二阶偏导数都是 α - Hölder 连续的(关于 α - Hölder 连续概念及空间 $C^{m+\alpha}$的概念,参见〔10〕,〔78〕),并且假

定方程(3·9)在 Ω 上是一致椭圆型的,即存在常数 $\mu_0>0$,使

$A(x,y,z,p,q)\xi^2+B(x,y,z,p,q)\xi\eta+C(x,y,z,p,q)\eta^2\geqslant\mu_0(\xi^2+\eta^2)$对一切$(x,y)\in\Omega$, $z\in R^1$, $p\in R^1$, $q\in R^1$, $(\xi,\eta)\in R^2$ 均成立．边界条件为

$$z=\varphi,\quad (x,y)\in\partial\Omega, \tag{3·10}$$

这里 $\varphi\in C^{3+\alpha}(\partial\Omega)$ 是一给定的函数．证明:Dirichlet 问题(3·9)~(3·10)必至少具有一解 $z(x,y)\in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$.

证 取 $0<\beta<\alpha$. 对于任意给定的 $z(x,y)\in C^{2+\beta}(\bar{\Omega})$,考察半线性方程

$$\begin{aligned}A(x,y,z,z_x,z_y)w_{xx}&+B(x,y,z,z_x,z_y)w_{xy}\\&+C(x,y,z,z_x,z_y)w_{yy}=0,\quad (x,y)\in\Omega,\end{aligned} \tag{3·11}$$

以及边界条件

$$w=\varphi,\quad (x,y)\in\partial\Omega, \tag{3·12}$$

显然,(3·11)式中的系数 A,B,C 均属于$C^\alpha(\bar{\Omega})$,故由椭圆型方程理论(见[94])知,问题(3·11)~(3·12)具有惟一解 $w(x,y)\in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})\subset C^{2+\beta}(\bar{\Omega})$, 且易知算子 $Az=w(A:C^{2+\beta}(\bar{\Omega})\to C^{2+\alpha}(\bar{\Omega}))$是有界的,从而将 A 视为映 $E=C^{2+\beta}(\bar{\Omega})$入 $C^{2+\beta}(\bar{\Omega})$的算子时是紧的;又可以证明(参看[10])$A$ 是连续的,从而 $A:E\to E$ 是全连续算子．显然,Dirichlet 问题(3·9)~(3·10)属于 $C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$的解等价于算子 A 在$E=C^{2+\beta}(\bar{\Omega})$中的不动点．现设 $z(x,y)\in C^{2+\beta}(\bar{\Omega})$,使 $z=\lambda Az$, $0<\lambda<1$. 于是,由 A 的定义知$z(x,y)\in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$,且满足方程(3·9)及边界条件$z|_{\partial\Omega}=\lambda\varphi$. 于是,由先验估计(参看[10],获得先验估计是最难的)知,$\|z\|_{2+\alpha}\leqslant M=\text{const}$($M$ 与 λ 无关),$\|z\|_{2+\alpha}$表实 Banach 空间 $C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$中的范数．由此可知,集$\{z\mid z\in E,\ z=\lambda Az,\ 0<\lambda$

$<1\}$在空间 $C^{2+\alpha}(\Omega)$中有界,当然在空间 $E=C^{2+\beta}(\bar{\Omega})$中更是有界的．根据定理 3.3 知, A 在 E 中必有不动点．证完．

注意,以上考虑的是 R^2 中的情形．可以证明,对于 R^N 中的一致椭圆型偏微分方程,类似的结论成立．

定理 3.4(Altman, 见〔41〕) 设 Ω 是 E 中有界开集, $\theta\in\Omega$, 设 $A:\bar{\Omega}\to E$ 全连续,满足

$$\|Ax-x\|^2\geqslant\|Ax\|^2-\|x\|^2,\quad x\in\partial\Omega, \tag{3·13}$$

那末 A 在 $\bar{\Omega}$ 中必具有不动点．

证 令 $h_t(x)=x-tAx$, 可假定 A 在 $\partial\Omega$ 上没有不动点(否则,定理已获证)．我们证明 $\theta\overline{\in}h_t(\partial\Omega)$, $\forall\leqslant t\leqslant 1$. 事实上,若存在 $0\leqslant t_0\leqslant 1$, $x_0\in\partial\Omega$, 使 $x_0=t_0Ax_0$, 则 $t_0\neq 0$, $t_0\neq 1$, 于是 $0<t_0<1$, 有

$$\|Ax_0-x_0\|^2=\left(\frac{1}{t_0}-1\right)^2\|x_0\|^2,$$

$$\|Ax_0\|^2-\|x_0\|^2=\left(\frac{1}{t_0^2}-1\right)\|x_0\|^2.$$

由(3·13)式知

$$\left(\frac{1}{t_0}-1\right)^2\|x_0\|^2\geqslant\left(\frac{1}{t_0^2}-1\right)\|x_0\|^2,$$

从而 $\left(\frac{1}{t_0}-1\right)^2\geqslant\frac{1}{t_0^2}-1$, 故 $t_0\geqslant 1$, 此与 $0<t_0<1$ 矛盾．因此 $\theta\overline{\in}h_t(\partial\Omega)$, $\forall\,0\leqslant t\leqslant 1$. 根据同伦不变性知

$$\begin{aligned}\deg(I-A,\Omega,\theta)&=\deg(h_1,\Omega,\theta)\\&=\deg(h_0,\Omega,\theta)=\deg(I,\Omega,\theta)=1\neq 0,\end{aligned}$$

从而 A 在 Ω 内必具有不动点．证完．

系 1 设 Ω 是 E 中有界开集, $\theta\in\Omega$, 设 $A:\bar{\Omega}\to E$ 全连续,满足

$$\|Ax\| \leqslant \|x\|, \quad \forall x \in \partial\Omega,$$

则 A 在 $\bar{\Omega}$ 中必具有不动点．

证 在所设条件下易知(3·13)必满足．证完．

注 3 此系的结论也可直接从定理2.4的系 2 直接推出．

系 2 设 Ω 是实 Hilbert 空间 H 中有界开集，$\theta \in \Omega$，设 A：$\bar{\Omega} \to$ 全连续，满足

$$(Ax, x) \leqslant \|x\|^2, \quad \forall x \in \partial\Omega,$$

则 A 在 $\bar{\Omega}$ 中必具有不动点．

证 当 $x \in \partial\Omega$ 时，由所设条件知

$$\begin{aligned}\|Ax - x\|^2 &= (Ax - x, Ax - x) \\ &= \|Ax\|^2 - 2(Ax, x) + \|x\|^2 \\ &\geqslant \|Ax\|^2 - 2\|x\|^2 + \|x\|^2 \\ &= \|Ax\|^2 - \|x\|^2,\end{aligned}$$

故条件(3·13)式满足．证完．

定理 3.5 设 $T_r = \{x \mid x \in E, \|x\| < r\} (r > 0)$，$A: \bar{T}_r \to E$ 全连续，满足 $A(-x) = -Ax$，$\forall x \in \partial T_r$，则 A 在 $\bar{T}_r$ 中必具有不动点．

证 直接从定理 2.7 推出．证完．

引理 3.1(见[42]) 设 Ω 是无穷维实 Banach 空间 E 中有界开集，$A: \bar{\Omega} \to E$ 全连续，并且满足条件：

(ⅰ) $\inf\limits_{x \in \partial\Omega} \|Ax\| > 0$；

(ⅱ) $Ax = \mu x, \ x \in \partial\Omega \Rightarrow \mu \overline{\in} (0, 1]$.

则必有

$$\deg(I - A, \Omega, \theta) = 0. \tag{3·14}$$

证 先证

$$\inf_{x \in \partial\Omega,\ 0 \leqslant \mu \leqslant 1} \| \mu x - Ax \| = \alpha > 0. \tag{3·15}$$

事实上，若(3·15)式不成立，则存在 $x_n \in \partial\Omega$、$\mu_n \in [0, 1]$，使 $\| \mu_n x_n - Ax_n \| \to 0 (n \to \infty)$．由 A 的全连续性及 $\{\mu_n\}$ 的有界性，可取 $\{n\}$ 的子列 $\{n_k\}$，使 $\mu_{n_k} \to \mu_0 (0 \leqslant \mu_0 \leqslant 1)$，$Ax_{n_k} \to y_0$．显然 $\mu_0 > 0$(因若 $\mu_0 = 0$，则 $\| Ax_{n_k} \| \to 0$，此与条件(i)矛盾)．于是 $x_{n_k} \to \frac{1}{\mu_0} y_0 = x_0 \in \partial\Omega$，从而 $\mu_0 x_0 = Ax_0$，$0 < \mu_0 \leqslant 1$，此与条件(ii)矛盾．故(3·15)式成立．

取 E 的有限维子空间 E_0 及连续有界算子 $A_1 : \bar{\Omega} \to E_0$，使

$$\sup_{x \in \bar{\Omega}} \| Ax - A_1 x \| < \alpha. \tag{3·16}$$

设 E_0 是 s 维空间，$\{y_1, \cdots, y_s\}$ 是 E_0 的一组基．因为 E 是无穷维的，故存在 $y_{s+1} \in E \setminus E_0$，且 $\| y_{s+1} \| = 1$．用 E_1 表由 $y_1, \cdots, y_s, y_{s+1}$ 张成的子空间，则 $E_1 \supset E_0$，E_1 是 $s+1$ 维的．显然，可视 $A_1 : \bar{\Omega} \to E_1$．于是根据 Leray－Schauder 度的定义，有

$$\deg(I - A, \Omega, \theta) = \deg(I - A_1, \Omega_1, \theta) \tag{3·17}$$

其中 $\Omega_1 = E_1 \cap \Omega$．由(3·15)式与(3·16)式知：当 $x \in \partial\Omega_1$(注意 $\partial\Omega_1 \subset \partial\Omega$)，$0 \leqslant \mu \leqslant 1$ 时有

$$\| \mu x - A_1 x \| \geqslant \| \mu x - Ax \| - \| Ax - A_1 x \| > \alpha - \alpha = 0,$$

故在 $\bar{\Omega}_1$ 上的场 $I - A_1$ 与场 $-A_1$ 在 $\partial\Omega_1$ 上同伦，因此有

$$\deg(I - A_1, \Omega_1, \theta) = \deg(-A_1, \Omega_1, \theta). \tag{3·18}$$

由于 $A_1 : \bar{\Omega}_1 \to E_0$，$E_0$ 是 E_1 的低维子空间，故由 Brouwer 度的降维性质(定理 1.4, 4°)知

$$\deg(-A_1, \Omega_1, \theta) = 0. \tag{3·19}$$

由(3·17)、(3·18)、(3·19)诸式即得(3·14)式．证完．

系(见〔43〕) 设 Ω 是无穷维实 Banach 空间 E 中有界开

集，$\theta \overline{\in} \partial\Omega$，若 $A:\bar{\Omega}\to E$ 全连续，并满足条件

$$\|Ax\| \geqslant \|x\|, \quad Ax \neq x, \quad \forall\, x \in \partial\Omega, \tag{3·20}$$

那末，(3·14)式成立．

证 只需验证引理 3.1 中的条件(ⅰ)与(ⅱ)均满足．首先，由(3·20)式及 $\theta \overline{\in} \partial\Omega$ 知

$$\inf_{x\in\partial\Omega}\|Ax\| \geqslant \inf_{x\in\partial\Omega}\|x\| > 0,$$

故条件(ⅰ)满足．下证条件(ⅱ)满足．用反证法，若它不满足，即存在 $x_0 \in \partial\Omega$，$0 < \mu_0 \leqslant 1$，使 $Ax_0 = \mu_0 x_0$．则 $\mu_0 \neq 1$，$x_0 \neq \theta$，$\|Ax_0\| = \mu_0\|x_0\| < \|x_0\|$，此与(3·20)式矛盾，故条件(ⅱ)满足．证完．

注 4 陈文嵊〔44〕、〔4〕将此引理及系的结果推广到了映象 $f(x) = I(x) - F(x)$ 的情形，其中 $I(x)$ 是有界连续映象，并且可以是从一个空间作用于另一个空间．

定理 3.6(区域拉伸与压缩不动点定理，见〔43〕) 设 Ω_1 与 Ω_2 是无穷维实 Banach 空间 E 中两个有界开集，并且 $\theta \in \Omega_1$，$\bar{\Omega}_1 \subset \Omega_2$．假定 $A:\bar{\Omega}_2 \setminus \Omega_1 \to E$ 全连续．如果满足条件

(H_1)：$x \in \partial\Omega_1 \Rightarrow \|Ax\| \leqslant \|x\|$，$x \in \partial\Omega_2 \Rightarrow \|Ax\| \geqslant \|x\|$(即区域拉伸)；或

(H_2)：$x \in \partial\Omega_1 \Rightarrow \|Ax\| \geqslant \|x\|$，$x \in \partial\Omega_2 \Rightarrow \|Ax\| \leqslant \|x\|$(即区域压缩)．

那末 A 在 $\bar{\Omega}_2 \setminus \Omega_1$ 中至少具有一个不动点．

证 由延拓定理，可将 A 延拓成映 $\bar{\Omega}_2 \to E$ 的全连续算子．先设条件(H_1)满足，若 A 在$\partial\Omega_1$ 或$\partial\Omega_2$ 上有不动点，则定理已获证．故可设 $Ax \neq x$，$\forall\, x \in \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2$．于是，由引理 3.1 的系知

$$\deg(I-A,\Omega_2,\theta)=0. \tag{3·21}$$

根据定理 2.4 的系 2 知

$$\deg(I-A,\Omega_1,\theta)=1. \tag{3·22}$$

由(3·21)式与(3·22)式，利用 Leray－Schauder 度的可加性得

$$\deg(I-A,\Omega_2\setminus\bar{\Omega}_1\theta)=\deg(I-A,\Omega_2,\theta)$$

$$-\deg(I-A,\Omega_1,\theta)=0-1=-1\neq 0,$$

由此可知，A 在$\Omega_2\setminus\bar{\Omega}_1$ 中具有不动点．

同理，在条件(H_2)满足的情形下，如果 A 在$\partial\Omega_1\cup\partial\Omega_2$ 上没有不动点，则有

$$\deg(I-A,\Omega_2\setminus\bar{\Omega}_1,\theta)=1-0=1\neq 0,$$

从而 A 在$\Omega_2\setminus\bar{\Omega}_1$ 中具有不动点．证完．

注 5 定理3.6对于有限维空间 E 的情形是不成立的．例如，设 $E=R^2$(二维欧氏空间)，$\Omega_1=\{(x,y)\mid x^2+y^2<r_1^2\}$，$\Omega_2=\{(x,y)\mid x^2+y^2<r_2^2\}(0<r_1<r_2)$．用复数表 R^2 中的点：$z=x+iy=re^{i\theta}$．令 $Az=z_1$，$z_1=re^{i(\theta+\frac{\pi}{4})}$．显然，$A:R^2\to R^2$ 连续有界(从而全连续)；在$\partial\Omega_1$ 上恒有$\|Az\|=r_1=\|z\|$，在$\partial\Omega_2$ 上恒有$\|Az\|=r_2=\|z\|$，但显然 A 在 $\bar{\Omega}_2\setminus\Omega_1$ 中没有不动点．

例 3.4 考察多项式型 Hammerstein 非线性积分方程的固有值，即设

$$A\varphi(x)=\int_G k(x,y)f(y,\varphi(y))\mathrm{d}y, \tag{3·23}$$

其中 G 表R^N 中有界闭集，$f(x,u)=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i(x)u^i$．证明下面的结果(见〔23〕)：设(ⅰ)非负连续核 $k(x,y)$满足$\int_G k(x,y)\mathrm{d}x>0(\forall y\in G)$；(ⅱ)$n$ 为偶数，$a_n(x)$有界可测且 $\inf\limits_{x\in G}a_n(x)$

>0, 又 $a_i(x)\in L^{\frac{n}{n-i}}(G)(i=1,2,\cdots,n-1)$. 则对任何实数 λ, 只要 $\lambda\neq 0, \lambda\neq\lambda_m(m=1,2,\cdots)$, 就都是 A 的固有值, 这里 $\{\lambda_m\}$ 表线性积分算子(映 $C(G)$ 入 $C(G)$)

$$K_1\varphi(x)=\int_G k(x,y)a_1(y)\varphi(y)\mathrm{d}y \qquad (3\cdot 24)$$

的全系固有值; 详细地说, 就是对于任何实数 $\lambda, \lambda\neq 0, \lambda\neq\lambda_m$ $(m=1,2,\cdots)$, 必有 $\varphi_\lambda(x)\in C(G)$, $\varphi_\lambda(x)\not\equiv 0$ 存在, 使 $A\varphi_\lambda=\lambda\varphi_\lambda$.

证 我们有 $A=K\mathbf{f}$, 其中 K 表以 $k(x,y)$ 为核的线性积分算子, $\mathbf{f}$ 表 Немыцкий 算子:

$$\mathbf{f}\varphi(x)=f(x,\varphi(x))=\sum_{i=1}^{n}a_i(x)[\varphi(x)]^i.$$

当 $\varphi\in L^n(G)$ 时, 有

$$\|\mathbf{f}\varphi\|_L=\left\|\sum_{i=1}^{n}a_i\varphi^i\right\|_L\leqslant\sum_{i=1}^{n}\|a_i\|_{L^{\frac{n}{n-i}}}\cdot\|\varphi\|_{L^n}^i \qquad (3\cdot 25)$$

其中 $\|a_n\|_{L^{\frac{n}{n-n}}}=\|a_n\|_{L^\infty}=\operatorname*{vraisup}_{x\in G}|a_n(x)|$. 故 $\mathbf{f}$ 映 $L^n(G)$ 入 $L(G)$, 从而连续、有界(见第一章定理 1.1 与定理 1.2). 因此 A 映 L^n 入 $C(G)$ 全连续, 当然更是映 $L^n(G)$ 入 $L^n(G)$ 全连续. 由于

$$\|A\varphi-K_1\varphi\|_{L^n}=\left\|\sum_{i=2}^{n}Ka_i\varphi^i\right\|_{L^n}$$

$$\leqslant M(\mathrm{mes}G)^{\frac{1}{n}}\sum_{i=2}^{n}\|a_i\|_{L^{\frac{n}{n-i}}}\cdot\|\varphi\|_{L^n}^i,$$

其中 $M=\max_{(x,y)\in G\times G}k(x,y)$. 故 A 在 θ 的 Fréchet 导算子 $A'(\theta)=K_1$. 由假定, λ 非 K_1(映 $C(G)$ 入 $C(G)$)的固有值, 由于 K_1: $L^n(G)\to C(G)$, 故把 K_1 视为映 $L^n(G)$ 入 $L^n(G)$ 的算子时, λ

也非 K_1 的固有值，从而根据 Leray – Schauder 定理(即定理 2.6)知，θ 是 $\frac{1}{\lambda}A$ 的孤立不动点，且其指数的绝对值

$$\left|\operatorname{ind}\left(I-\frac{1}{\lambda}A,\theta\right)\right|=\left|\operatorname{ind}\left(I-\frac{1}{\lambda}K_1,\theta\right)\right|=1. \qquad (3\cdot 26)$$

另一方面，注意 n 是偶数，并利用[45]143 页定理 192，有

$$\left(\int_G\left|\int_G k(x,y)a_n(y)[\varphi(y)]^n dy\right|^n dx\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$\geqslant(\mathrm{mes}G)^{\frac{1}{n}-1}\int_G \mathrm{d}x\int_G k(x,y)a_n(y)[\varphi(y)]^n \mathrm{d}y$$

$$=(\mathrm{mes}G)^{\frac{1}{n}-1}\int_G a_n(y)[\varphi(y)]^n \mathrm{d}y\int_G k(x,y)\mathrm{d}y$$

$$\geqslant\tau\beta(\mathrm{mes}G)^{\frac{1}{n}-1}\|\varphi\|_{L^n}^n,$$

其中 $\tau=\inf\limits_{x\in G}a_n(x)$，$\beta=\min\limits_{y\in G}\int_G k(x,y)\mathrm{d}x$. 于是

$$\|A\varphi\|_{L^n}\geqslant\tau\beta(\mathrm{mes}G)^{\frac{1}{n}-1}\|\varphi\|_{L^n}^n$$

$$-M(\mathrm{mes}G)^{\frac{1}{n}}\sum_{i=1}^{n-1}\|a_i\|_{L^{\frac{n}{n-i}}}\cdot\|\varphi\|_{L^n}^i,$$

由此可知，可取 $R>0$ 充分大，使对球 $T_R=\{\varphi\mid\|\varphi\|_{L^n}<R\}$，有

$$\left\|\frac{1}{\lambda}A\varphi\right\|_{L^n}>\|\varphi\|_{L^n},\quad \forall\varphi\in\partial T_R.$$

因此，根据引理 3.1 的系，知

$$\deg\left(I-\frac{1}{\lambda}A,T_R,\theta\right)=0. \qquad (3\cdot 27)$$

由(3·27)式与(3·26)式即知，存在 $\varphi_\lambda\in L^n(G)$，$\varphi_\lambda\neq\theta$，使 $\varphi_\lambda=\frac{1}{\lambda}A\varphi_\lambda$. 由于 A 映 $L^n(G)$ 入 $C(G)$，故 $\varphi_\lambda\in C(G)$. 证完.

注 6 从以上的讨论可以看出，如果在一定的条件下能计算出 $\deg(I-A,\Omega,\theta)$ 的数值(例如引理 3.1 及其系)，则常能得

出新的不动点定理(例如定理 3.6). 因此, Leray - Schauder 度的计算问题是一个十分重要的、值得研究的问题.

§4 固有值、固有元与歧点

设 E 是实 Banach 空间. $D\subset E$, $\theta\in D$, $A:D\to E$, $A\theta=\theta$. 若 $x_0\in D$ 满足 $x_0\neq\theta$, $Ax_0=\lambda x_0$, λ 是某实数, 则称 λ 是 A 的**固有值**, x_0 是 A 的属于 λ 的**固有元**. 众所周知, 线性全连续算子的固有值至多可数个, 而属于同一固有值的固有元(加上零元素)构成 E 的子空间, 对于非线性全连续算子, 一般来说, 它的固有值构成一些区间(例如, 例 3.3 所述的情况), 而属于同一固有值的固有元一般不构成子空间(有时一个固有值只对应一个固有元).

定理 4.1 设 E 是无穷维的, Ω 是 E 中有界开集, $\theta\in\Omega$, $A:\bar{\Omega}\to E$ 全连续, $A\theta=\theta$, 并且

$$\inf_{x\in\partial\Omega}\|Ax\|>0. \tag{4·1}$$

则 A 具有正固有值与负固有值, 各对应有属于 $\partial\Omega$ 的固有元.

证 取

$$a>\frac{\sup\limits_{x\in\partial\Omega}\|x\|}{\inf\limits_{x\in\partial\Omega}\|Ax\|}.$$

则 $\|aAx\|>\|x\|$, $\forall\, x\in\partial\Omega$. 于是, 根据引理 3.1 的系知

$$\deg(I-aA,\Omega,\theta)=0. \tag{4·2}$$

但显然

$$\deg(I,\Omega,\theta)=1. \tag{4·3}$$

因此, 若令 $h_t(x)=x-taAx$, 则由(4·2)式与(4·3)式, 利用同

伦不变性知：必存在 $0<t_0<1$ 及 $x_0\in\partial\Omega$，使得 $h_{t_0}(x_0)=\theta$，即 $Ax_0=\lambda_0 x_0,\ \lambda_0=\dfrac{1}{t_0 a}>0$.

同理，由 $\|-aAx\|>\|x\|,\ \forall\, x\in\partial\Omega$，仿上面的推导可知：存在 $x_1\in\partial\Omega$，使 $Ax_1=\lambda_1 x_1,\ \lambda_1<0$. 证完.

注 1 注意，定理 4.1 对于有限维空间 E 是不成立的. 例如，考察 §3 注 5 中的算子 $A:R^2\to R^2$，这里 $Az=z_1,\ z=re^{i\theta}$，$z_1=re^{i(\theta+\frac{\pi}{4})}$. 显然，对任何满足 $\theta\in\Omega\subset R^2$ 的有界开集 Ω，均有 $\inf\limits_{z\in\partial\Omega}\|Az\|=\inf\limits_{z\in\partial\Omega}\|z\|>0$，但 A 无任何固有值.

另外，对于线性全连续算子 $A:E\to E$（E 无穷维），必有

$$\inf_{x\in\partial\Omega}\|Ax\|=0, \tag{4·4}$$

其中 Ω 是满足 $\theta\in\Omega\subset E$ 的任一有界开集. 事实上，若 $\alpha=\inf\limits_{x\in\partial\Omega}\|Ax\|>0$. 对任何 $z\in E,\ \|z\|=1$，可取 $\lambda>0$，使 $\lambda z\in\partial\Omega$. 于是

$$\|Az\|=\left\|\frac{1}{\lambda}A(\lambda z)\right\|=\frac{\|A(\lambda z)\|}{\|\lambda z\|}\geqslant\frac{\alpha}{M},$$

其中 $M=\sup\limits_{x\in\partial\Omega}\|x\|$. 由此可知

$$\inf_{\|z\|=1}\|Az\|\geqslant\frac{\alpha}{M}>0. \tag{4·5}$$

由于 E 无穷维，故其单位球面不紧，从而存在 $\{z_n\}\subset E,\ \|z_n\|=1\ (i=1,2,\cdots)$，使

$$\|z_n-z_m\|\geqslant\varepsilon_0\quad(n\neq m),$$

其中 ε_0 是某正数. 于是，注意到(4·5)式，知

$$\|Az_n-Az_m\|=\|A(z_n-z_m)\|$$
$$=\left\|A\left(\frac{z_n-z_m}{\|z_n-z_m\|}\right)\right\|\cdot\|z_n-z_m\|$$

$$\geqslant \frac{\alpha \varepsilon_0}{M} \quad (n \neq m),$$

故 $\{Az_n\}$ 没有收敛子列，此与 A 的全连续性矛盾．

由此可知，在无穷维空间 E 中，只有非线性算子 A，才可能满足条件(4·1)．

定理 4.2(见〔42〕) 设 E 是无穷维的，$A: E \to E$ 全连续，$A\theta = \theta$，A 在 θ 处 Fréchet 可微，并且

$$\lim_{\|x\| \to +\infty} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = +\infty, \tag{4·6}$$

那末，(ⅰ)任何 $\mu \neq 0$，$\mu \neq \mu_n (n = 1, 2, \cdots)$都是 A 的固有值，即存在 $x_\mu \in E$，$x_\mu \neq \theta$，使 $Ax_\mu = \mu x_\mu$，这里 $\{\mu_n\}$ 表 $A'(\theta)$ 的全系固有值；

(ⅱ). $\lim\limits_{\mu \to \infty} \|x_\mu\| \to +\infty$.

证 设 μ 给定($\mu \neq 0$，$\mu \neq \mu_n$，$n = 1, 2, \cdots$)．根据定理 2.6，可取 $r > 0$ 充分小，使

$$\deg\left(I - \frac{1}{\mu}A, T_r, \theta\right) = \pm 1, \tag{4·7}$$

其中 $T_r = \{x \mid \|x\| < r\}$．另一方面，由(4·6)式，可取 $R > r$，使 $\left\|\frac{1}{\mu}Ax\right\| > \|x\|$，$\forall x \in \partial T_R$，这里 $T_R = \{x \mid \|x\| < R\}$．于是，根据引理 3.1 的系知

$$\deg\left(I - \frac{1}{\mu}A, T_R, \theta\right) = 0. \tag{4·8}$$

由(4·8)式与(4·7)式，得

$$\begin{aligned} &\deg\left(I - \frac{1}{\mu}A, T_R \setminus \bar{T}_r, \theta\right) \\ &= \deg\left(I - \frac{1}{\mu}A, T_R, \theta\right) - \deg\left(I - \frac{1}{\mu}A, T_r, \theta\right) \end{aligned}$$

$$=0-(\pm 1)=\mp 1\neq 0,$$

从而，存在 $x_\mu \in T_R \setminus \overline{T}_r$，使 $x_\mu = \frac{1}{\mu} A x_\mu$．于是结论(ⅰ)获得．下证结论(ⅱ)．用反证法．若(ⅱ)不成立，则存在 $c>0$ 及 $\mu_n{}' \to \infty$，使 $\|x_{\mu_n{}'}\| \leqslant c (n=1,2,\cdots)$．不妨设 $\|x_{\mu_n{}'}\| \to \tau (0 \leqslant \tau \leqslant c)$（否则，取某子序列即可）．

若 $\tau>0$，则当 n 充分大$(n>N)$时，有 $\|x_{\mu_n{}'}\| > \frac{\tau}{2}$，从而

$$|\mu_u{}'| = \frac{\|A x_{\mu_n{}'}\|}{\|x_{\mu_n{}'}\|} \leqslant \frac{2M}{\tau}, \quad n>N,$$

其中 $M = \sup\limits_{\|x\| \leqslant c} \|Ax\|$，此与 $\mu_u{}' \to \infty$ 矛盾．

若 $\tau=0$，则 $x_{\mu_n{}'} \to \theta$，从而

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\|A x_{\mu_n{}'} - A'(\theta) x_{\mu_n{}'}\|}{\|x_{\mu_n{}'}\|} = 0.$$

注意到

$$\begin{aligned}
|\mu_n{}'| &= \frac{\|A x_{\mu_n{}'}\|}{\|x_{\mu_n{}'}\|} \\
&\leqslant \frac{\|A x_{\mu_n{}'} - A'(\theta) x_{\mu_n{}'}\| + \|A'(\theta) x_{\mu_n{}'}\|}{\|x_{\mu_n{}'}\|} \\
&= \frac{\|A x_{\mu_n{}'} - A'(\theta) x_{\mu_n{}'}\|}{\|x_{\mu_n{}'}\|} + \|A'(\theta) y_n\|,
\end{aligned}$$

其中 $y_n = \frac{x_{\mu_n{}'}}{\|x_{\mu_n{}'}\|}$，$\|y_n\| = 1$，$\|A'(\theta) y_n\| \leqslant \|A'(\theta)\| \|y_n\| = \|A'(\theta)\|$，即知当 n 充分大时，有 $|\mu_n{}'| < 1 + \|A'(\theta)\|$，此也与 $\mu_n{}' \to \infty$ 矛盾，(ⅱ)式成立．证完．

系 设 E 无穷维，$A: E \to E$ 全连续，满足

$$\lim_{\|x\|\to 0}\frac{\|Ax\|}{\|x\|}=0,\qquad \lim_{\|x\|\to+\infty}\frac{\|Ax\|}{\|x\|}=+\infty,\tag{4·9}$$

则任何 $\mu\neq 0$ 都是 A 的固有值，即存在 $x_\mu\in E$, $x_\mu\neq\theta$，使 $Ax_\mu=\mu x_\mu$；并且 $\lim\limits_{\mu\to\infty}\|x_\mu\|=+\infty$.

证 由(4·9)中第一式及 A 的连续性知，$A\theta=\theta$，且 $A'(\theta)=\theta$(零算子)，故 $A'(\theta)$没有非零固有值．证完．

注 2 此系是〔46〕与〔47〕中结果的改进．

定理 4.3(见〔42〕) 设 E 是无穷维的，$A:E\to E$ 全连续，$A\theta=\theta$, A 在无穷远点∞处 Fréchet 可微，并且

$$\lim_{\|x\|\to 0}\frac{\|Ax\|}{\|x\|}=+\infty,\tag{4·10}$$

那末(ⅰ)任何 $\mu\neq 0$, $\mu\neq\mu_n$ $(n=1,2,\cdots)$都是 A 的固有值，即存在 $x_\mu\in E$, $x_\mu\neq\theta$，使 $Ax_\mu=\mu x_\mu$，这里 $\{\mu_n\}$表算子 $A'(\infty)$的全系固有值；

(ⅱ) $\lim\limits_{\mu\to\infty}x_\mu=\theta$.

证 设 μ 给定($\mu\neq 0$, $\mu\neq\mu_n$, $n=1,2,\cdots$)．仿定理 2.6 之证明(或见〔9〕定理 21.2)可知：可取充分大的 $R>0$，使

$$\deg(I-\frac{1}{\mu}A,\,T_R,\,\theta)=\pm 1,\tag{4·11}$$

其中 $T_R=\{x\mid\|x\|<R\}$．另一方面，由(4·10)式，可取 $0<r<R$，使 $\left\|\frac{1}{\mu}Ax\right\|>\|x\|$, $\forall\, x\in\partial T_r$，这里 $T_r=\{x\mid\|x\|<r\}$．于是，根据引理 3.1 的系知

$$\deg(I-\frac{1}{\mu}A,\,T_r,\,\theta)=0.\tag{4·12}$$

由(4·11)式与(4·12)式知，存在 $x_\mu\in E$, $r<\|x_\mu\|<R$，使 $x_\mu=\frac{1}{\mu}Ax_\mu$，故结论(ⅰ)获证．

下证结论(ⅱ)．用反证法．若(ⅱ)不成立，则存在 $\varepsilon_0>0$ 及 $\mu_n'\to\infty$ 序列，使 $\|x_{\mu_n'}\|\geqslant\varepsilon_0(n=1,2,\cdots)$．不妨设 $\|x_{\mu_n'}\|\to\tau$ $(\varepsilon_0\leqslant\tau\leqslant+\infty)$(否则，取某子列即可)．

若 $\tau<+\infty$，则当 n 充分大($n>N$)时，有 $\frac{\tau}{2}<\|x_{\mu_n'}\|<2\tau$，从而

$$|\mu_n'|=\frac{\|Ax_{\mu_n'}\|}{\|x_{\mu_n'}\|}\leqslant\frac{2M}{\tau},\quad\forall n>N,$$

其中 $M=\sup\limits_{\|x\|\leqslant 2\tau}\|Ax\|$，此与 $\mu_n'\to\infty$ 矛盾．

若 $\tau=+\infty$，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\|Ax_{\mu_n'}-A'(\infty)x_{\mu_n'}\|}{\|x_{\mu_n'}\|}=0,$$

注意到

$$|\mu_n'|=\frac{\|Ax_{\mu_n'}\|}{\|x_{\mu_n'}\|}\leqslant\frac{\|Ax_{\mu_n'}-A'(\infty)x_{\mu_n'}\|}{\|x_{\mu_n'}\|}+\|A'(\infty)y_n\|$$

其中 $y_n=\frac{x_{\mu_n'}}{\|x_{\mu_n'}\|}$，$\|y_n\|=1$，$\|A'(\infty)y_n\|\leqslant\|A'(\infty)\|\cdot\|y_n\|=\|A'(\infty)\|$，即知当 n 充分大时，有 $|\mu_n'|<1+\|A'(\infty)\|$，此与 $\mu_n'\to\infty$ 矛盾；故(ⅱ)成立．证完．

系 设 E 无穷维，$A:E\to E$ 全连续，$A\theta=\theta$，并且满足

$$\lim_{\|x\|\to 0}\frac{\|Ax\|}{\|x\|}=+\infty,\qquad\lim_{\|x\|\to+\infty}\frac{\|Ax\|}{\|x\|}=0;$$

那末，任何 $\mu\neq 0$ 都是 A 的固有值，即存在 $x_\mu\in E$，$x_\mu\neq\theta$，使 $Ax_\mu=\mu x_\mu$；并且 $\lim\limits_{\mu\to\infty}x_\mu=\theta$.

证 由假定知 $A'(\infty)=\theta$(零算子)，故 $A'(\infty)$ 没有非零固有值．证完．

例 4.1 考察非线性积分方程

$$\mu\varphi(x)=\int_G k(x,y)|\varphi(y)|^p\mathrm{d}y, \tag{4·13}$$

其中 $p>1$，$k(x,y)$在 $G\times G$ 上非负、连续且 $\int_G k(x,y)\mathrm{d}x>0$ $(\forall y\in G)$，G 表 R^N 中某有界闭集．证明：对于任何 $\mu\neq 0$，方程(4·13)都具有不恒为零的连续解 $\varphi_\mu(x)$；并且

$$\lim_{\mu\to\infty}\|\varphi_\mu\|_C=+\infty \tag{4·14}$$

$$\lim_{\mu\to 0}\|\varphi_\mu\|_C=0. \tag{4·15}$$

证 考察算子

$$A\varphi(x)=\int_G k(x,y)|\varphi(y)|^p\mathrm{d}y.$$

则 $A=K\mathbf{f}$，K 是以 $k(x,y)$ 为核的线性积分算子，$\mathbf{f}$ 是 Немыцкий 算子，$\mathbf{f}\varphi(x)=f(x,\varphi(x))$，$f(x,u)=|u|^p$．由第一章定理 1.1、1.2 及 1.3 知 $\mathbf{f}$ 是映 $L^p(G)$入 $L(G)$的连续有界算子，从而 $A=Kf$ 是映 $L^p(G)$入 $C(G)$的全连续算子，当然可视为映 $L^p(G)$入 $L^p(G)$的全连续算子．我们有

$$|A\varphi(x)|\leqslant M\|\varphi\|_{L^p}^p$$

其中 $M=\max\limits_{(x,y)\in G\times G}k(x,y)$．从而 $\|A\varphi\|_{L^p}\leqslant M(\mathrm{mes}G)^{\frac{1}{p}}\|\varphi\|_{L^p}^p$，$\forall\varphi\in L^p(G)$．由此可知(注意 $p>1$)，

$$\lim_{\|\varphi\|_{L^p}\to 0}\frac{\|A\varphi\|_{L^p}}{\|\varphi\|_{L^p}}=0. \tag{4·16}$$

另一方面，利用〔45〕143 页定理 192，得

$$\|A\varphi\|_{L^p}=\left(\int_G\left|\int_G k(x,y)|\varphi(y)|^p\mathrm{d}y\right|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\geqslant(\mathrm{mes}G)^{\frac{1}{p}-1}\int_G\mathrm{d}x\int_G k(x,y)|\varphi(y)|^p\mathrm{d}y$$

$$= (\text{mes}G)^{\frac{1}{p}-1}\int_G |\varphi(y)|^p \mathrm{d}y \int_G k(x,y)\mathrm{d}x$$

$$\geqslant \beta(\text{mes}G)^{\frac{1}{p}-1}\|\varphi\|_{L^p}^p, \quad \forall\, \varphi \in L^p(G), \tag{4·17}$$

其中 $\beta = \min\limits_{y\in G}\int_G k(x,y)\mathrm{d}x > 0$，故

$$\lim_{\|\varphi\|_{L^p}\to+\infty} \frac{\|A\varphi\|_{L^p}}{\|\varphi\|_{L^p}} = +\infty. \tag{4·18}$$

由(4·16)式与(4·18)式，利用定理 4.2 的系知：对任何 $\mu \neq 0$，都存在 $\varphi_\mu \in L^p(G)$，$\varphi_\mu \neq \theta$，使 $A\varphi_\mu = \mu\varphi_\mu$；并且

$$\lim_{\mu\to\infty} \|\varphi_\mu\|_{L^p} = +\infty. \tag{4·19}$$

由于 A 映 $L^p(G)$ 入 $C(G)$，故 $\varphi_\mu \in C(G)$．又由(4·19)式，并注意到

$$\|\varphi_\mu\|_{L^p} \leqslant \|\varphi_\mu\|_C \cdot (\text{mes}G)^{\frac{1}{p}},$$

即得(4·14)式．另外，由(4·17)式知

$$|\mu| \cdot \|\varphi_\mu\|_{L^p} = \|A\varphi_\mu\|_{L^p} \geqslant \beta(\text{mes}G)^{\frac{1}{p}-1}\|\varphi_\mu\|_{L^p}^p$$

从而

$$\|\varphi_\mu\|_{L^p} \leqslant \beta^{-\frac{1}{p-1}}(\text{mes}G)^{\frac{1}{p}}|\mu|^{\frac{1}{p-1}}.$$

又

$$|\mu\varphi_\mu(x)| = \left|\int_G k(x,y)|\varphi_\mu(y)|^p \mathrm{d}y\right| \leqslant M\|\varphi_\mu\|_{L^p}^p,$$

故得

$$\|\varphi_\mu\|_C \leqslant \frac{M}{|\mu|}\|\varphi_\mu\|_{L^p}^p \leqslant M\beta^{-\frac{p}{p-1}}(\text{mes}G)|\mu|^{\frac{1}{p-1}} \quad (\mu \neq 0),$$

由此可知(4·15)式成立．证完

注 3　此例中的结果是〔46〕中结果的改进，关于 Hammerstein 积分算子的固有值与固有元的讨论，还见〔56〕、〔57〕．

下面介绍歧点概念．

设 E 是实 Banach 空间，Ω 是 E 中开集，$\theta\in\Omega$．$A:\Omega\to E$，$A\theta=\theta$．考察方程

$$Ax=\lambda x \tag{4·20}$$

$\lambda\in R^1$，$x\in\Omega$．

定义4.1 设 $\lambda_0\in R^1$．如果对于任何给定的 $\varepsilon>0$，都有满足方程(4·20)的 x,λ 存在，使得

$$|\lambda-\lambda_0|<\varepsilon,\ \ 0<\|x\|<\varepsilon, \tag{4·21}$$

则称 λ_0 是算子 A 的**歧点**．

注 4 显然，λ_0 是 A 的歧点的充分必要条件是：存在序列 λ_n，$x_n(n=1,2,\cdots)$，使 $Ax_n=\lambda_n x_n(n=1,2,\cdots)$，并且 $\lambda_n\to\lambda_0$，$x_n\neq\theta$，$x_n\to\theta$．

注 5 歧点及其理论具有广泛的应用．从应用问题提出的许多形如(4·20)的方程，当 λ 很小时，只有零解 θ，这表示处于平衡状态；当 λ 增大到某一数值 λ_0 时，方程(4·20)开始出现非零解，表示平衡状态的消失，此 λ_0 即 A 的歧点．所以，在应用问题中，歧点常代表“临界负荷”、“临界温度”、“临界速度”等临界值(参看〔48〕～〔54〕)．

另外，也可考虑更一般的方程

$$F(x,\lambda)=\theta, \tag{4·22}$$

其中 $F:\Omega\times R^1\to E$，$F(\theta,\lambda)\equiv\theta$．如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$，都有方程(4·22)的解(x,λ)存在，使(4·21)式成立，则称 λ_0 是**方程(4·22)的歧点**．但应用问题中大多是(4·20)形式的方程，故下面我们限于讨论方程(4·20)的情形．

定理 4.4(歧点的必要条件) 设 $A:\Omega\to E$ 全连续，$\theta\in\Omega$，$A\theta=\theta$，A 在 θ 处 Fréchet 可微．那末，如果 $\lambda_0\neq 0$ 是 A 的歧

点，则 λ_0 必是 $A'(\theta)$的固有值．

证 用反证法．假定 λ_0 不是 $A'(\theta)$的固有值，由于 $A'(\theta): E\to E$ 是线性全连续算子，故存在 $\alpha>0$，使

$$\|A'(\theta)x-\lambda_0 x\|\geqslant\alpha\|x\|,\quad \forall x\in E. \tag{4·23}$$

由 $A'(\theta)$的定义及 $A\theta=\theta$，可取 $r>0$，使

$$\|Ax-A'(\theta)x\|\leqslant\frac{\alpha}{3}\|x\|,\quad \forall \|x\|<r. \tag{4·24}$$

于是，由(4·23)式与(4·24)式知：当 $|\lambda-\lambda_0|<\frac{\alpha}{3}$，$0<\|x\|<r$ 时，恒有

$$\|Ax-\lambda x\|\geqslant\|A'(\theta)x-\lambda_0 x\|$$

$$-\|Ax-A'(\theta)x\|-|\lambda_0-\lambda|\cdot\|x\|\geqslant\frac{\alpha}{3}\|x\|>0,$$

由此可知，λ_0 不可能是 A 的歧点．证完．

定理 4.5(Leray－Schauder) 设 $A:\Omega\to E$ 全连续，$\theta\in\Omega$，$A\theta=\theta$，并且 A 在 θ 处 Fréchet 可微．那末，如果 $\lambda_0\neq 0$ 是 $A'(\theta)$的奇代数重数固有值，则 λ_0 必是 A 的歧点．

证 不妨设 $\lambda_0>0$($\lambda_0<0$ 的情形类似)．任给 $\varepsilon>0$．由于 $A'(\theta)$是线性全连续算子，故其非零固有值是孤立的，因此可取 $0<\tau<\varepsilon(\tau<\lambda_0)$，使 A 在$[\lambda_0-\tau,\lambda_0+\tau]$中除 λ_0 外无其他固有值．于是，根据定理 2.6 知，θ 必是算子$\frac{1}{\lambda_0+\tau}A$ 与$\frac{1}{\lambda_0-\tau}A$ 的孤立不动点，并且其指数

$$\text{ind}\left(I-\frac{1}{\lambda_0+\tau}A,\theta\right)=(-1)^{\beta_1}, \tag{4·25}$$

$$\text{ind}\left(I-\frac{1}{\lambda_0-\tau}A,\theta\right)=(-1)^{\beta_1+\beta_0}, \tag{4·26}$$

其中 β_1 表 $A'(\theta)$的大于 λ_0 的固有值的代数重数之和，β_0 表 A'

(θ)的固有值 λ_0 的代数重数．由假定，β_0 是奇数，因此 $(-1)^{\beta_1} \neq (-1)^{\beta_1+\beta_0}$．于是，由(4·25)式与(4·26)式知

$$\operatorname{ind}(I-\frac{1}{\lambda_0+\tau}A,\theta)\neq\operatorname{ind}(I-\frac{1}{\lambda_0-\tau}A,\theta). \qquad (4\cdot 27)$$

于是，可取 $0<r<\varepsilon$，使

$$\deg(I-\frac{1}{\lambda_0+\tau}A,T_r,\theta,)\neq\deg(I-\frac{1}{\lambda_0-\tau}A,T_r,\theta), \qquad (4\cdot 28)$$

其中 $T_r=\{x\mid \|x\|<r\}$．令

$$h_t(x)=x-\frac{1}{\lambda_0+(2t-1)\tau}Ax,$$

则 $h_0=I-\frac{1}{\lambda_0-\tau}A$, $h_1=I-\frac{1}{\lambda_0+\tau}A$．于是，由(4·28)式知存在 $0\leqslant t_1\leqslant 1$, $x_1\in\partial T_r$，使 $h_{t_1}(x_1)=\theta$，即 $Ax_1=\lambda_1x_1$, $\|x_1\|=r$, $\lambda_1=\lambda_0+(2t_1-1)\tau$；因此，$0<\|x_1\|=r<\varepsilon$, $|\lambda_1-\lambda_0|\leqslant\tau<\varepsilon$．故 λ_0 是 A 的歧点．证完．

注 6 在定理4.5的条件下，必至少是下列三种情况之一：

(ⅰ) λ_0 是 A 的固有值，且对满足 $\theta\subset\Omega^*\subset\overline{\Omega}^*\subset\Omega$ 的任何有界开集 Ω^*，都有 $x^*\in\partial\Omega^*$ 存在，使 $Ax^*=\lambda_0x^*$；

(ⅱ) 存在 $\eta>0$，使开区间 $(\lambda_0,\lambda_0+\eta)$ 中所有的数都是 A 的固有值；

(ⅲ) 存在 $\eta^*>0$，使开区间 $(\lambda_0-\eta^*,\lambda_0)$ 中所有的数都是 A 的固有值．

证 设不是(ⅰ)的情况，则存在有界开集 Ω_1, $\theta\in\Omega_1\subset\overline{\Omega}_1\subset\Omega$，使 $Ax\neq\lambda_0x$, $\forall x\in\partial\Omega_1$．于是，由引理 2.1(ⅱ)知，$\inf\limits_{x\in\partial\Omega_1}\|Ax-\lambda_0x\|>0$．由此易知，存在 $\tau_1>0$，使 $\inf\limits_{x\in\partial\Omega_1,\ |\lambda-\lambda_0|\leqslant\tau_1}\|Ax-\lambda x\|>0$．根据同伦不变性知，对于所有满足 $|\lambda-\lambda_0|\leqslant$

τ_1 的 λ, $\deg\left(I-\frac{1}{\lambda}A, \Omega_1, \theta\right)$取同一数值, 设为 m_0.

另一方面, 由定理 4.5 的证明过程知, 对于所有充分小的 $\tau>0$, (4·25)式与(4·26)式都成立. 由$(-1)^{\beta_0}\neq(-1)^{\beta_1+\beta_0}$, 故下列两式

$$(-1)^{\beta_1}\neq m_0, \tag{4·29}$$

$$(-1)^{\beta_1+\beta_0}\neq m_0 \tag{4·30}$$

中至少有一式成立. 若(4·29)式成立, 则可取 $\eta>0(\eta<\tau_1)$, 使

$$\operatorname{ind}\left(I-\frac{1}{\lambda}A, \theta\right)\neq\deg\left(I-\frac{1}{\lambda}A, \Omega_1, \theta\right), \quad \forall \lambda_0<\lambda<\lambda_0+\eta.$$

由此可知, 存在 $x_\lambda\in\Omega_1$, $x_\lambda\neq\theta$, 使 $\left(I-\frac{1}{\lambda}A\right)x_\lambda=\theta$, 即 $Ax_\lambda=\lambda x_\lambda$ $(\forall \lambda_0<\lambda<\lambda_0+\eta)$; 这就是(ⅱ)的情况.

同理, 若(4·30)式成立, 则可证存在 $\eta^*>0$, 使对任何 $\lambda_0-\eta^*<\lambda<\lambda_0$, 都有 $x_\lambda^*\in\Omega_1$, $x_\lambda^*\neq\theta$ 存在, 使 $Ax_\lambda^*=\lambda x_\lambda^*$, 此即(ⅲ)的情况. 证完.

注 7 若 $A: E\to E$ 是线性全连续算子, 则由定理 4.4 知: 如果 $\lambda_0\neq0$ 是 A 的歧点, 则 λ_0 必是 A 的固有值(因为 $A'(\theta)=A$); 反之, 如果 $\lambda_0\neq0$ 是 A 的固有值, 由于其属于 λ_0 的固有元加上零元素构成 E 的有限维子空间, 故 λ_0 显然是 A 的歧点. 因此, 对于线性全连续算子而言, 歧点与固有值是一致的.

例 4.2 设 $E=R^2$, $A: R^2\to R^2$ 定义如下:

$$Ax=\begin{pmatrix}\beta_1x_1+r_1x_1(x_1^2+x_2^2)\\ \beta_2x_2+r_2x_2(x_1^2+x_2^2)\end{pmatrix}, \quad x=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix},$$

其中 $\beta_2>\beta_1>0$, $r_1>r_2>0$ 都是常数. 易知

$$A'(\theta)=\begin{pmatrix}\beta_1x_1\\ \beta_2x_2\end{pmatrix}.$$

显然 $A'(\theta)$，只有两个固有值 $\lambda_1=\beta_1, \lambda_2=\beta_2$，而且都是单重数固有值(属于 λ_1 的全部固有元为 $\begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}$，$c\neq 0$；属于 λ_2 的全部固有元为 $\begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix}$，$c\neq 0$)，于是根据定理 4.4 和定理 4.5 知，$A$ 恰有两个歧点 $\lambda_1=\beta_1, \lambda_2=\beta_2$.

这也可直接验证如下：这时，方程(4·20)为

$$\begin{cases} \beta_1 x_1 + r_1 x_1(x_1^2+x_2^2) = \lambda x_1, \\ \beta_2 x_2 + r_2 x_2(x_1^2+x_2^2) = \lambda x_2. \end{cases} \tag{4·31}$$

若令 $x_2=0, x_1\neq 0$，则解方程(4·31)得知，只当 $\lambda>\beta_1$ 时，方程(4·31)才有解，并且解为

$$x_1 = \pm\sqrt{\frac{\lambda-\beta_1}{r_1}}, \quad x_2=0.$$

于是显然 β_1 是 A 的歧点($\lambda\to\beta_1+0$ 时，$x_1\to 0$)，这是注 6 中(ⅱ)的情况.

若在(4·31)中令 $x_1=0, x_2\neq 0$，则易知，只有当 $\lambda>\beta_2$ 时方程(4·31)才有解，并且解为

$$x_1=0, \quad x_2=\pm\sqrt{\frac{\lambda-\beta_2}{r_2}}.$$

故 β_2 是 A 的歧点，这也是注 6 中(ⅱ)的情况. 易知 A 无其他歧点. 因为若 λ_0 是 A 的任一歧点，则存在 $x^{(n)}=\begin{pmatrix} x_1^{(n)} \\ x_2^{(n)} \end{pmatrix}\neq\theta$，$x^{(n)}\to\theta$ 及 $\lambda^{(n)}\to\lambda_0$，使(4·31)式满足

$$\begin{cases} \beta_1 x_1^{(n)} + r_1 x_1^{(n)}[(x_1^{(n)})^2+(x_2^{(n)})^2] = \lambda^{(n)} x_1^{(n)}, \\ \beta_2 x_2^{(n)} + r_2 x_2^{(n)}[(x_1^{(n)})^2+(x_2^{(n)})^2] = \lambda^{(n)} x_2^{(n)}, \end{cases}$$

$$n=1,2,\cdots.$$

由于 $x^{(n)} \neq \theta (n=1,2,\cdots)$，故 $\{x_1^{(n)}\}$，$\{x_2^{(n)}\}$ 中至少有一个含有无穷多项不为零，例如，设第一个含有子列 $x_1^{(n_i)} \neq 0 (i=1,2,\cdots)$．于是，由上式中第一式得

$$r_1 \| x^{(n_i)} \|^2 = \lambda^{(n_i)} - \beta_1 \quad (i=1,2,\cdots),$$

令 $i \to \infty$，得 $\lambda_0 - \beta_1 = 0$，即 $\lambda_0 = \beta_1$．同理，若 $\{x_2^{(n)}\}$ 中含有无穷多项不为零，则可得 $\lambda_0 = \beta_2$．总之，只有 β_1、β_2 才是歧点．

例 4.3 设一水平轴处于无弯曲状态，其一端固定．今在其另一端加一水平方向的力 P．显然，当 P 很小时，轴仍无弯曲，但当 P 增大到某一数值 P_0 时，轴开始弯曲，试求此临界力 P_0（图 2-4·1）．

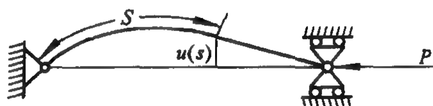


图 2-4·1

设轴的长度是 1．由力学知道，弯曲 $u(s)$ 满足下面的常微分方程边值问题

$$\frac{d^2 u}{ds^2} \cdot \left[1 - \left(\frac{du}{ds}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} = -P\rho(s)u,$$

$$u(0) = u(1) = 0 \tag{4·32}$$

其中 $\rho(s)$ 表轴的硬度．在(4·32)中令 $x(s) = -\dfrac{d^2 u}{ds^2}$，则

$$u(s) = \int_0^1 k(s,t)x(t)dt, \tag{4·33}$$

其中

$$k(s,t) = \begin{cases} s(1-t), & s \leqslant t; \\ t(1-s), & s > t \end{cases}$$

是对应的 Green 函数，$x(s)$ 当然是连续函数 $(0 \leqslant s \leqslant 1)$．由

(4·33)式知

$$u(s)=(1-s)\int_0^s tx(t)\mathrm{d}t+s\int_s^1(1-t)x(t)\mathrm{d}t, \qquad (4·34)$$

从而

$$\begin{aligned}u'(s)=&-\int_0^s tx(t)\mathrm{d}t+(1-s)sx(s)+\int_s^1(1-t)x(t)\mathrm{d}t\\&-s(1-s)x(s)=\int_0^s(-t)x(t)\mathrm{d}t\\&+\int_s^1(1-t)x(t)\mathrm{d}t=\int_0^1 k_s'(s,t)x(t)\mathrm{d}t,\\&(0\leqslant s\leqslant 1),\end{aligned} \qquad (4·35)$$

其中

$$k_s'(s,t)=\begin{cases}1-t, & s<t;\\ -t, & s>t.\end{cases}$$

于是,寻求边值问题(4·32)属于 $C^2[0,1]$的非零解,转化为寻求下面的非线性积分方程

$$x(s)=P\rho(s)\int_0^1 k(s,t)x(t)\mathrm{d}t\cdot\sqrt{1-\left[\int_0^1 k_s'(s,t)x(t)\mathrm{d}t\right]^2} \qquad (4·36)$$

属于 $C[0,1]$的非零解(这里,硬度 $\rho(s)$当然认为是正的,连续的). 取 $E=C[0,1]$,令

$$Ax(s)=\rho(s)\int_0^1 k(s,t)x(t)\mathrm{d}t\cdot\sqrt{1-\left[\int_0^1 k_s'(s,t)x(t)\mathrm{d}t\right]^2},$$

$$Bx(s)=\rho(s)\int_0^1 k(s,t)x(t)\mathrm{d}t,$$

$$B_1x(s)=\int_0^1 k_s'(s,t)x(t)\mathrm{d}t.$$

易知,$B:C[0,1]\to C[0,1]$全连续,$B_1:C[0,1]\to C[0,1]$全连续(注意到(4·35)式),并且

$$|B_1x(s)|\leqslant\|x\|\left(\int_0^s t\mathrm{d}t+\int_s^1(1-t)\mathrm{d}t\right)$$
$$\leqslant\frac{1}{2}\|x\|,$$

从而$\|B_1x\|\leqslant\frac{1}{2}\|x\|$, $\forall x(s)\in C[0,1]$, 即$\|B_1\|\leqslant\frac{1}{2}$. 用 T_2 表 $C[0,1]$中的球$\{x(s)\mid\|x\|<2\}$, 则由上述知 $A:\overline{T}_2\to C[0,1]$全连续, $A\theta=\theta$. 于是, 方程(4·36)具有(4·20)的形式, 其中 $\lambda=\frac{1}{P}$.

易知当 P 很小时, 例如当 $0<P<\|B\|^{-1}$时, 积分方程(4·36)没有非零解. 事实上, 若存在 $x(s)\in\overline{T}_2$, $x(s)\neq 0$, 使(4·36)式满足, 则

$$0<\|x\|\leqslant P\|Bx\|\leqslant P\|B\|\cdot\|x\|<\|x\|,$$

得出了矛盾. 这表示, 当力 P 很小时, 轴不会产生弯曲.

我们有

$$Ax(s)=Bx(s)\cdot\sqrt{1-[B_1x(s)]^2}.$$

注意到当$0\leqslant v\leqslant 1$时, 有$1-v\leqslant\sqrt{1-v}$, 从而$0\leqslant 1-\sqrt{1-v}\leqslant v$, 得(当 $x(s)\in\overline{T}_2$ 时)

$$|Ax(s)-Bx(s)|=|Bx(s)|\cdot\left(1-\sqrt{1-[B_1x(s)]^2}\right)$$
$$\leqslant|Bx(s)|\cdot[B_1x(s)]^2\leqslant\|B\|\cdot\|B_1\|^2\cdot\|x\|^3,$$

故

$$\|Ax-Bx\|\leqslant\|B\|\cdot\|B_1\|^2\cdot\|x\|^3.$$

由此可知 A 在θ 处 Fréchet 可微, 并且 $A'\theta=B$. 于是, 由定理4.4 及定理 4.5 知, A 的(非零)歧点必是 B 的固有值, 而 B 的(非零)奇代数重数固有值必是 A 的歧点.

考察方程 $x=\mu Bx$, 即线性积分方程

$$x(s)=\mu\rho(s)\int_0^1 k(s,t)x(t)\mathrm{d}t, \tag{4·37}$$

它等价于线性边值问题$\left(u(s)=\int_0^1 k(s,t)x(t)\mathrm{d}t\right)$

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}s^2}+\mu\rho(s)u(s)=0,\quad u(0)=u(1)=0. \tag{4·38}$$

由常微分方程知,问题(4·38)的特征值(即使问题(4·38)具有非零解 $u(s)$的 μ 值)都是正的,而且都是单重数的,因此,其最小特征值 μ_0 即是所求的临界力 P_0: $P_0=\mu_0$(μ_0^{-1} 是算子 A 的最大歧点).

特别地,若 $\rho(s)\equiv 1$,则熟知问题(4·38)的全系特征值 $\mu_n=n^2\pi^2(n=1,2,\cdots)$(都是单重数的),这时临界力 $P_0=\pi^2$.

注 8 $A'(\theta)$的偶代数重数固有值可能不是 A 的歧点. 请看下面的例.

例 4.4 设 $E=R^2$, $A:R^2\to R^2$ 定义如下

$$Ax\begin{pmatrix}x_1+x_2^3\\ x_2-x_1^3\end{pmatrix},\quad x=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}.$$

则 $A\theta=\theta$. 易知 $A'(\theta)x=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=x$, 即 $A'(\theta)=I$. 于是 $\lambda_0=1$ 是 $A'(\theta)$的固有值,而且代数重数为 2. 但 $\lambda_0=1$ 不是 A 的歧点,因为 A 实际上没有任何固有值,这可证如下:若有 λ 与 x,使 $Ax=\lambda x$,则

$$x_1+x_2^3=\lambda x_1,\quad x_2-x_1^3=\lambda x_2.$$

以 x_2 与 x_1 分别乘两式,然后相减,得 $x_2^4+x_1^4=0$, 即 $x=\theta$.

但有下面的定理(证明从略,参看〔6〕):

定理 4.6(Красноселъский, 见〔6〕) 设 H 是实 Hilbert 空

间，Ω 是 H 中开集，$\theta \to \Omega$. 设 $A:\Omega \to H$ 全连续，并且 A 是某弱连续泛函 $F:\Omega \to R^1$ 的梯度：$Ax = \mathrm{grad}F(x)$, $\forall x \in \Omega$, 并且设 F 在 Ω 是一致(Fréchet)可微的．又设 A 在 θ 处 Fréchet 可微，$A'(\theta)$是全连续自共轭算子．那末，如果 $\lambda_0 \neq 0$ 是 $A'(\theta)$的固有值，则 λ_0 必是 A 的歧点．

注 9 还可以引入渐近歧点的概念．这时需设 A 的定义域 Ω 含 E 中某球的整个外部．设 $\lambda_0 \in R^1$. 如果对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 都有满足方程(4·20)的 x、λ 存在；使得 $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$, $\|x\| > \frac{1}{\varepsilon}$, 则称 λ_0 是 A 的**渐近歧点**．

可证，前面所述对歧点的结论对渐近歧点也类似地成立(以 $A'(\infty)$代替 $A'(\theta)$)．例如，若 A 全连续且在∞处 Fréchet 可微，则 A 的渐近歧点$\lambda_0 \neq 0$ 必是 $A'(\infty)$的固有值；$A'(\infty)$的奇代数重数固有值 $\lambda_0 \neq 0$ 必是 A 的渐近歧点等．

§5 严格集压缩场和凝聚场的拓扑度

本节将假定 F 是严格集压缩映象或凝聚映象，这是比全连续映象更广泛的一类算子，这样的 $f = I - F$ 称为严格集压缩场和凝聚场．我们要建立这两种场的拓扑度概念以及相应的一些不动点定理，它们是全连续场的 Leray－Schauder 度以及 Schauder 不动点定理等的推广．为此，首先要介绍非紧性测度的概念．

定义 5.1 设 E 是实 Banach 空间．S 是 E 中有界集．令

$$\alpha(S) = \inf\{\delta > 0 \mid S\text{可表为有限个集的并}: S = \bigcup_{i=1}^{m} S_i,\ \text{使每个 } S_i \text{ 的直径 } d(S_i) \text{ 都} \leqslant \delta\}. \qquad (5\cdot 1)$$

显然，$0 \leqslant \alpha(S) < +\infty$．$\alpha(S)$叫做 S 的**非紧性测度**．

注 1 非紧性测度的概念是 Kuratowski 引入的(见〔58〕)．

引理 5.1 非紧性测度具有下列性质(S, T 表 E 中有界集，a 是实数)：

(i) $\alpha(S) = 0 \Leftrightarrow S$ 是相对紧集；

(ii) $S \subset T \Rightarrow \alpha(S) \leqslant \alpha(T)$；

(iii) $\alpha(\bar{S}) = \alpha(S)$；

(iv) $\alpha(S \cup T) = \max\{\alpha(S), \alpha(T)\}$；

(v) $\alpha(aS) = |a|\alpha(S)$，其中 $aS = \{x \mid x = az, z \in S\}$；

(vi) $\alpha(S + T) \leqslant \alpha(S) + \alpha(T)$，其中 $S + T = \{x \mid x = y + z, y \in S, z \in T\}$；

(vii) $\alpha(\overline{\mathrm{co}}S) = \alpha(S)$．

证 (i)，(ii)是显然的．

(iii)由 $S \subset \bar{S}$ 及(ii)知，有 $\alpha(S) \leqslant \alpha(\bar{S})$；另一方面，对于任给的 $\varepsilon > 0$，存在分解 $S = \bigcup_{i=1}^{m} S_i$，使 $d(S_i) < \alpha(S) + \varepsilon$，$i = 1, 2, \cdots, m$，由于 $d(\bar{S}_i) = d(S_i) < \alpha(S) + \varepsilon$，而 $\bar{S} = \bigcup_{i=1}^{m} \bar{S}_i$，故 $\alpha(\bar{S}) \leqslant \alpha(S) + \varepsilon$．再根据 ε 的任意性，即得 $\alpha(\bar{S}) \leqslant \alpha(S)$．

(iv)令 $\eta = \max\{\alpha(S), \alpha(T)\}$．由(ii)知 $\eta \leqslant \alpha(S \cup T)$；另一方面，$\forall \varepsilon > 0$，存在分解 $S = \bigcup_{i=1}^{m} S_i$ 及 $T = \bigcup_{j=1}^{n} T_j$，使 $d(S_i) < \alpha(S) + \varepsilon \leqslant \eta + \varepsilon$，$d(T_j) < \alpha(T) + \varepsilon \leqslant \eta + \varepsilon$，$i = 1, 2, \cdots, m$；$j = 1, 2, \cdots, n$．由 $S \cup T = (\bigcup_{i=1}^{m} S_i) \cup (\bigcup_{j=1}^{n} T_j)$ 即知 $\alpha(S \cup T) \leqslant \eta + \varepsilon$，再根据 ε 的任意性，即得 $\alpha(S \cup T) \leqslant \eta$．

(v) $a = 0$ 时，$\alpha(aS) = |a|\alpha(S)$ 显然成立．下设 $a \neq 0$．$\forall \varepsilon > 0$，$\exists S = \bigcup_{i=1}^{m} S_i$，$d(S_i) < \alpha(S) + \varepsilon$，$i = 1, 2, \cdots, m$．显然

有 $aS=\bigcup_{i=1}^{m}(aS_i)$, $d(aS_i)=|a|d(S_i)<|a|\alpha(S)+|a|\varepsilon$, 故 $\alpha(aS)\leqslant|a|\alpha(S)+|a|\varepsilon$, 再根据 ε 的任意性, 得 $\alpha(aS)\leqslant|a|\alpha(S)$; 另一方面, 利用此结果, 又有 $\alpha(S)=\alpha(a^{-1}\cdot aS)\leqslant|a^{-1}|\alpha(aS)=|a|^{-1}\alpha(aS)$, 从而 $\alpha(aS)\geqslant|a|\alpha(S)$.

(ⅵ) $\forall\varepsilon>0$, $\exists S=\bigcup_{i=1}^{m}S_i$ 及 $T=\bigcup_{j=1}^{n}T_j$, 使 $d(S_i)<\alpha(S)+\varepsilon$, $d(T_j)<\alpha(T)+\varepsilon$. 令 $V_{ij}=\{x\mid x=y+z,\ y\in S_i,\ z\in T_j\}$, 显然 $S+T=\bigcup_{i,j}V_{ij}$, $d(V_{ij})\leqslant d(S_i)+d(T_j)<\alpha(S)+\alpha(T)+2\varepsilon$ 故有 $\alpha(S+T)\leqslant\alpha(S)+\alpha(T)+2\varepsilon$, 再由 ε 的任意性得 $\alpha(S+T)\leqslant\alpha(S)+\alpha(T)$.

(ⅶ)先证一个下面要用的结论: 对 E 中任何有界集 T, 必有 $d(\mathrm{co}T)=d(T)$. 事实上, 只需证 $d(\mathrm{co}T)\leqslant d(T)$. 若 $d(\mathrm{co}T)>d(T)$, 则存在 $x_0, y_0\in\mathrm{co}T$, 使 $\|x_0-y_0\|>d(T)$. 令 $S_0=\{x\mid\|x-x_0\|\leqslant d(T)\}$, 于是 $y_0\overline{\in}S_0$, 由此可知 $T\not\subset S_0$ (因若 $T\subset S_0$, 则 $\mathrm{co}T\subset S_0$), 即存在 $z_0\in T\setminus S_0$. 令 $S^*=\{x\mid\|x-z_0\|\leqslant d(T)\}$, 显然 $T\subset S^*$, 从而 $\mathrm{co}T\subset S^*$. 但因 $\|z_0-x_0\|>d(T)$, 故 $x_0\overline{\in}S^*$, 而 $x_0\in\mathrm{co}T$, 此与 $\mathrm{co}T\subset S^*$ 矛盾.

现在证明(ⅶ). 由于 $\overline{\mathrm{co}}S=\overline{\mathrm{co}S}$, 故由(ⅲ), 只需证明 $\alpha(\mathrm{co}S)=\alpha(S)$, 这又只需证明 $\alpha(\mathrm{co}S)\leqslant\alpha(S)$.

任取 $\alpha_1>\alpha(S)$. 于是存在分解 $S=\bigcup_{i=1}^{m}S_i$, $d(S_i)<\alpha_1(i=1,2,\cdots,m)$. 取 $0<\alpha_2<\alpha_1$, 使 $d(S_i)<\alpha_2(i=1,2,\cdots,m)$. 由上述结论知

$$d(\mathrm{co}S_i)=d(S_i)<\alpha_2\quad(i=1,2,\cdots,m).\tag{5·2}$$

令

$$D=\left\{\lambda \middle| \lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_m),\ \sum_{i=1}^{m}\lambda_i=1,\lambda_i\geqslant 0(i=1,2,\cdots,m)\right\}.$$

则 D 是 R^m 中有界闭集．对 $\lambda\in D$,定义 E 的子集 $X(\lambda)$ 如下:

$$X(\lambda)=\left\{x \middle| x=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i x_i,\quad x_i\in \mathrm{co}S_i,\quad i=1,2,\cdots,m\right\}.$$

对 $X(\lambda)$ 中任二元素 $x=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i x_i$ 与 $y=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i y_i$ (x_i, $y_i\in \mathrm{co}S_i$),由(5·2)式知

$$\|x-y\|\leqslant\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\|x_i-y_i\|\leqslant\sum_{i=1}^{m}\lambda_i d(\mathrm{co}S_i)$$
$$<\alpha_2\sum_{i=1}^{m}\lambda_i=\alpha_2,$$

由此可知

$$d(X(\lambda))\leqslant\alpha_2,\quad \forall\lambda\in D. \tag{5·3}$$

令 $X(D)=\bigcup_{\lambda\in D}X(\lambda)$. 我们证明

$$X(D)=\mathrm{co}S. \tag{5·4}$$

显然 $S\subset X(D)\subset\mathrm{co}S$,因此要证(5·4)式,只需证明 $X(D)$ 是凸集即可．设 $x\in X(D)$, $y\in X(D)$, 则 $x=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i x_i$, $y=\sum_{i=1}^{m}\mu_i y_i$,其中 $\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_m)\in D$, $\mu=(\mu_1,\cdots,\mu_m)\in D$, x_i, $y_i\in\mathrm{co}S_i$. 考察点 $z=hx+(1-h)y$, $0<h<1$. 易知有 $z=\sum_{i=1}^{m}v_i z_i$,其中

$$v_i=h\lambda_i+(1-h)\mu_i,$$

$$z_i=\frac{h\lambda_i}{h\lambda_i+(1-h)\mu_i}x_i+\frac{(1-h)\mu_i}{h\lambda_i+(1-h)\mu_i}y_i.$$

显然 $v=(v_1,\cdots,v_m)\in D$, $z_i\in\mathrm{co}S_i$, 故 $z\in X(D)$. 因此 X

(D)是凸集．(5·4)式成立．

令 $\eta=\frac{1}{3}(\alpha_1-\alpha_2)>0$. 对 $\lambda\in D$, 用 $X_\eta(\lambda)$表 $X(\lambda)$的 η-邻域, 即 $X_\eta(\lambda)=\{x\mid \inf_{z\in X(\lambda)}\|x-z\|<\eta\}$. 由于 S 有界, 从而 $\mathrm{co}S$ 有界．于是, 易知存在 $\delta>0$, 使 $X(\mu)\subset X_\eta(\lambda)$对一切 $\lambda\in D$, $\mu\in D$, $\|\mu-\lambda\|<\delta$ 均成立．由于 D 是R^m 中紧集, 故存在分解 $D=\bigcup_{j=1}^{n}D_j$, $d(D_j)<\delta(j=1,2,\cdots,n)$. 任取 $\lambda_j\in D_j$, 有

$$X(\lambda)\subset X_\eta(\lambda_j),\quad \forall\lambda\in D_j,\quad j=1,2,\cdots,n. \tag{5·5}$$

令 $X(D_j)=\bigcup_{\lambda\in D_j}X(\lambda)$. 由(5·4)式知 $\mathrm{co}S=\bigcup_{j=1}^{n}X(D_j)$. 又由(5·5)式及(5·3)式知

$$d(X(D_j))\leqslant d(X_\eta(\lambda_j))\leqslant d(X(\lambda_j))+2\eta$$
$$\leqslant\alpha_2+2\eta=\alpha_1-\eta<\alpha_1\quad(j=1,2,\cdots,n),$$

由此知 $\alpha(\mathrm{co}S)\leqslant\alpha_1$; 再根据 $\alpha_1(>\alpha(S))$的任意性, 即知 $\alpha(\mathrm{co}S)\leqslant\alpha(S)$. 证完．

例 5.1 设实 Banach 空间 E 是无穷维的, B_1 与 S_1 分别表 E 的单位球和单位球面, 即

$$B_1=\{x\mid\|x\|<1\},\quad S_1=\{x\mid\|x\|=1\}.$$

下面证明

$$\alpha(B_1)=\alpha(S_1)=2. \tag{5·6}$$

证 由于 $\bar{B}_1=\overline{\mathrm{co}}S_1$, 故根据引理 5.1(ⅲ)与(ⅶ)知 $\alpha(B_1)=\alpha(\bar{B}_1)=\alpha(\overline{\mathrm{co}}S_1)=\alpha(S_1)$. 下证 $\alpha(S_1)=2$. 显然 $d(S_1)=2$, 故 $\alpha(S_1)\leqslant 2$. 若 $\alpha(S_1)<2$, 则存在分解 $S_1=\bigcup_{i=1}^{m}T_i$, 使 $d(T_i)<2$, $i=1,2,\cdots,m$. 可设 T_i 均为闭集(否则, 以 $\bar{T}_i$ 代替 T_i 即可). 由于 E 是无穷维的, 故存在 E 的 $m+1$ 维子空间 $E^{(m+1)}$. 令 $B_1^{(m+1)}=$

$E^{(m+1)} \cap B_1$, $S_1^{(m+1)} = E^{(m+1)} \cap S_1$, $T_i^{(m+1)} = E^{(m+1)} \cap T_i$, 则 $T_i^{(m+1)}$ 是 $E^{(m+1)}$ 中闭集, 并且 $S_1^{(m+1)} = \bigcup_{i=1}^{m} T_i^{(m+1)}$. 令 $f_i(x) = d(x, T_i^{(m+1)}) = \min_{z \in T_i^{(m+1)}} \|x - z\|$, 则 $f_i(x)$ 是 $\overline{B}_1^{(m+1)}$ 上的连续函数 $(i=1,2,\cdots,m)$. 令

$$f(x)=(f_1(x),\cdots,f_m(x),0),\quad g(x)=f(x)-f(-x),$$

则 $g: \overline{B}_1^{(m+1)} \to E^{(m+1)}$ 连续而且是奇映象. 如果 $\theta \overline{\in} g(S_1^{(m+1)})$, 则由定理 1.7(Borsuk 定理)知 $\deg_{m+1}(g, B_1^{(m+1)}, \theta)$ 是奇数; 但另一方面, g 显然是降维的, 故由定理 1.4 之 4°知 $\deg_{m+1}(g, B_1^{(m+1)}, \theta) = 0$, 由此是出矛盾. 故必有 $\theta \in g(S_1^{(m+1)})$, 即存在 $x_0 \in S_1^{(m+1)}$, 使 $g(x_0) = \theta$, $f(x_0) = f(-x_0)$. 由于 $S_1^{(m+1)} = \bigcup_{i=1}^{m} T_i^{(m+1)}$, 故 x_0 属于某 $T_{i_0}^{(m+1)}$, 从而 $f_{i_0}(x_0) = 0$, 因而又有 $f_{i_0}(-x_0) = 0$, 但 $T_{i_0}^{(m+1)}$ 是闭集, 故 $-x_0 \in T_{i_0}^{(m+1)}$. 于是

$$2 = \|x_0 - (-x_0)\| \leqslant d(T_{i_0}^{(m+1)}) \leqslant d(T_{i_0})$$

此与 $d(T_i) < 2(i=1,2,\cdots,m)$ 矛盾. 证完.

引理 5.2 设 $\{S_n\}$ 是 E 中一串有界闭集, $S_1 \supset S_2 \supset S_3 \supset \cdots$, 并且 $S_n \neq \varnothing (n=1,2,\cdots)$. 如果 $\alpha_n = \alpha(S_n) \to 0 (n \to \infty$ 时), 那末, 集 $S = \bigcap_{n=1}^{\infty} S_n$ 必是 E 中非空的紧集.

证 显然只需证明如下事实: $\forall x_n \in S_n (n=1,2,\cdots)$, 都必存在收敛子列 $\{x_{n_i}\} \subset \{x_n\}$, 使 $x_{n_i} \to x_0 \in S$. (事实上, 由于 $x_0 \in S$, 故 $S \neq \varnothing$; 又 $\forall \{z_n\} \subset S$, 显然 $z_n \in S_n$, $n=1,2,\cdots$, 故由所述事实知 $\exists$ 子列 $z_{n_i} \to z_0 \in S$, 从而 S 是紧集).

S_n 具有分解 $S_n = \bigcup_{i=1}^{i_n} S_i^{(n)}$, $d(S_i^{(n)}) < \alpha(S_n) + \frac{1}{n} (i=1,2,$

$\cdots, i_n)$. 因 $\{x_n\} \subset S_1$，故必有 $\{x_n\}$ 的子序列 $\{x_n^{(1)}\}$ 完全含于某个 $S_i^{(1)}$ 之中，从而 $d(\{x_n^{(1)}\}) < \alpha(S_1) + 1$；由于 $\{x_2^{(1)}, x_3^{(1)}, \cdots\} \subset S_2$，故必有 $\{x_n^{(1)}\}(n>1)$ 的子序列 $\{x_n^{(2)}\}$ 完全含于某个 $S_i^{(2)}$ 之中，从而 $d(\{x_n^{(2)}\}) < \alpha(S_2) + \frac{1}{2}$；同样，由于 $\{x_2^{(2)}, x_3^{(2)}, \cdots\} \subset S_3$，故必有 $\{x_n^{(2)}\}(n>1)$ 的子序列 $\{x_n^{(3)}\}$ 完全含于某个 $S_i^{(3)}$ 之中，从而 $d(\{x_n^{(3)}\}) < \alpha(S_3) + \frac{1}{3}$；这样继续下去，所得的对角线序列 $\{x_n^{(n)}\}$ 必收敛．事实上，当 $m>n$ 时有

$$\|x_m^{(m)} - x_n^{(n)}\| < \alpha(S_n) + \frac{1}{n},$$

由此，注意到 $\alpha(S_n) \to 0 (n \to \infty)$，即知 $\{x_n^{(n)}\}$ 是 E 中基本列，从而 $x_n^{(n)} \to x_0 \in E$．由于当 $m \geq n$ 时，$x_m^{(m)} \in S_n$，而 S_n 是闭集，故 $x_0 \in S_n (n=1,2,\cdots)$，从而 $x_0 \in S$．证完．

定义 5.2 设 E_1, E_2 是实 Banach 空间，$D \subset E_1$，设 $A: D \to E_2$ 连续、有界．

（ⅰ）如果存在常数 $k \geq 0$，使对任何有界集 $S \subset D$，都满足

$$\alpha(A(S)) \leq k\alpha(S), \tag{5·7}$$

则称 A 是 D 上的 **k－集压缩映象**；特别 $k<1$ 时的 k－集压缩映象称为**严格集压缩映象**．

（ⅱ）如果对任何非相对紧的有界集 $S \subset D$，都满足

$$\alpha(A(S)) < \alpha(S), \tag{5·8}$$

则称 A 是 D 上的**凝聚映象**．

注 2 显然，A 全连续 $\Leftrightarrow A$ 是 0－集压缩的；A 严格集压缩 $\Rightarrow A$ 是凝聚映象，但反之不成立．可以举出不是严格集压缩的凝聚映象的例子来（见[59]）．于是，严格集压缩映象和凝聚映

象是全连续映象的推广．

另外，对于凝聚映象 $A:D\to E_2$，如果 D 是闭集，则有 $\alpha(A(S))=0$，$\forall S\subset D$，$\alpha(S)=0$．事实上，$\forall y_n=Ax_n\in A(S)$，因 S 相对紧，且 D 闭，故存在 $\{x_n\}$ 的子列 $x_{n_k}\to x_0\in D$．根据 A 的连续性知，$y_{n_k}=Ax_{n_k}\to Ax_0\in E_2$，故 $A(S)$ 相对紧．这时有：

$$\alpha(A(S))\leqslant\alpha(S),\quad \forall S \text{ 有界},\quad S\subset D.$$

引理 5.3 （ⅰ）若 $A:D\to E_2$ 是 k_1-集压缩映象，$B:D\to E_2$ 是 k_2-集压缩映象，则 $A+B:D\to E_2$ 是 k_1+k_2-集压缩映象；

（ⅱ）若 $A:D\to E_2$ 是 Lipschitz 映象，Lipschitz 常数为 L，即满足

$$\|Ax-Ay\|\leqslant L\|x-y\|,\quad \forall x,y\in D,\tag{5·9}$$

那末，A 在 D 上是 L-集压缩映象；

（ⅲ）若 $A:D\to E_2$ 是 k_1-集压缩映象，$A(D)\subset G\subset E_2$，$B:G\to E_3$ 是 k_2-集压缩映象，则 $BA:D\to E_3$ 是 k_2k_1-集压缩映象．

证 （ⅰ）对任何有界集 $S\subset D$，由引理 5.1（ⅵ）我们有

$$(A+B)(S)\subset A(S)+B(S),$$

$$\begin{aligned}&\alpha((A+B)(S))\\ \leqslant&\alpha(A(S)+B(S))\leqslant\alpha(A(S))+\alpha(B(S))\\ \leqslant&k_1\alpha(S)+k_2\alpha(S)=(k_1+k_2)\alpha(S).\end{aligned}$$

（ⅱ）首先，由(5·9)式知 A 连续有界．设 S 是 D 中任何有界集．任给 $\varepsilon>0$，于是，存在分法 $S=\bigcup\limits_{i=1}^{m}S_i$，$d(S_i)<\alpha(S)+\varepsilon$ $(i=1,2,\cdots,m)$．显然 $A(S)=\bigcup\limits_{i=1}^{m}A(S_i)$．由(5·9)式易知

$d(A(S_i))\leqslant Ld(S_i)<L\alpha(S)+L\varepsilon(i=1,2,\cdots,m)$，由此可知 $\alpha(A(S))\leqslant L\alpha(S)+L\varepsilon$，再根据 ε 的任意性，即得 $\alpha(A(S))\leqslant L\alpha(S)$.

(ⅲ)对任何有界集 $S\subset D$，有

$$\alpha(BA(S))\leqslant k_2\alpha(A(S))\leqslant k_2k_1\alpha(S).$$

证完.

系 设 $A:D\to E_2$ 全连续，$B:D\to E_2$ 是压缩映象(即 Lipschitz 常数 $L<1$ 的 Lipschitz 映象)，那末，$A+B:D\to E_2$ 是严格集压缩映象；简单地说，就是：全连续映象与压缩映象之和是严格集压缩映象.

证 由结论(ⅰ)、(ⅱ)，并注意到全连续映象是 0－集压缩映象，即获证.

下面建立严格集压缩场的拓扑度与凝聚场的拓扑度，并建立几个有关的不动点定理(参看[60]、[59]、[61]、[34]).

设 Ω 是实 Banach 空间 E 中有界开集，$A:\bar{\Omega}\to E$，$f=I-A$. 如果 A 是 $\bar{\Omega}$ 上的严格集压缩映象，则称 f 是**严格集压缩场**，如果 A 是 $\bar{\Omega}$ 上的凝聚映象，则称 f 是**凝聚场**.

引理 5.4 设 $f=I-A:\bar{\Omega}\to E$ 是凝聚场，则

(ⅰ) f 是固有映象，即任何紧集 $D\subset E$ 的原象 $f^{-1}(D)$ 都是紧集；

(ⅱ) f 是闭映射，即任何闭集 $S\subset\bar{\Omega}$ 的象 $f(S)$ 都是闭集.

证 (ⅰ)令 $D_1=f^{-1}(D)(D_1\subset\bar{\Omega})$，则 $D_1\subset A(D_1)+D$，从而 $\alpha(D_1)\leqslant\alpha(A(D_1))+\alpha(D)=\alpha(A(D_1))$，由此可知 $\alpha(D_1)=0$(因若 $\alpha(D_1)>0$，则由于 A 是凝聚映象，有 $\alpha(A(D_1))<\alpha(D_1)$)，从而 D_1 是相对紧集. 再证 D_1 是闭集. 设 $x_n\in D_1$，$x_n\to x_0\in\bar{\Omega}$. 令 $y_n=f(x_n)$，则 $y_n\in D$. 由 D 的紧性，

存在子列 $y_{n_i}\to y_0\in D$. 又由 f 的连续性知, $y_{n_i}=f(x_{n_i})\to f(x_0)$, 故 $y_0=f(x_0)$, $x_0\in f^{-1}(D)=D_1$. 因此 D_1 是闭集. 从而 D_1 是紧集.

(ⅱ)设 $y_n\in f(S)$, $y_n\to y_0\in E$, 要证 $y_0\in f(S)$. 设 $y_n=f(x_n)$, $x_n\in S(n=1,2,\cdots)$. 令 $S_1=\{y_0,y_1,\cdots\}$. 显然 S_1 是 E 中紧集. 由(ⅰ)知 $f^{-1}(S_1)$是 E 中紧集. 由于 $x_n\in f^{-1}(S_1)$, $n=1,2,3,\cdots$. 故存在子列 $x_{n_k}\to x_0\in E$. 由于 S 是闭集, 故 $x_0\in S$, 再根据 f 的连续性知 $y_{n_k}=f(x_{n_k})\to f(x_0)$, 从而 $y_0=f(x_0)$, $y_0\in f(S)$, 证完.

注 3 引理5.4显然是引理 2.1 的推广. 另外, 从引理 5.4 推出: 严格集压缩场一定是固有映象和闭映象.

下面先给出严格集压缩场 f 的的拓扑度定义. 令 $\sum_k(\bar{\Omega})=\{f\mid f=I-A, A:\bar{\Omega}\to E$ 是k-集压缩映象$\}$.

定义 5.3 设 Ω 是E 中有界开集, $A:\bar{\Omega}\to E$ 是k-集压缩映象, $k<1$, $f=I-A$.

(1)设 $\theta\overline{\in}f(\partial\Omega)$. 令 $D_1=\overline{\mathrm{co}}A(\bar{\Omega})$, 并归纳地定义

$$D_n=\overline{\mathrm{co}}A(D_{n-1}\cap\bar{\Omega}),\quad n=2,3,\cdots.\tag{5·10}$$

(ⅰ)如果对于某个 $n=n_0$, $D_{n_0}\cap\bar{\Omega}=\varnothing$, 则当 $n>n_0$ 时 D_n 都没有意义, 这时规定拓扑度

$$\deg(f,\Omega,\theta)=0.\tag{5·11}$$

(ⅱ)现设 $D_n\cap\bar{\Omega}\neq\varnothing(n=1,2,3,\cdots,)$. 于是, $D_n\cap\bar{\Omega}$ 是一串非空有界闭集. 令 $D=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}D_n$, 则 D 与D_n 都是有界凸闭集, 且 $D_n\neq\varnothing$. 显然 $D_1\supset D_2$. 若 $D_{k-1}\supset D_k$, 则

$$D_k=\overline{\mathrm{co}}A(D_{k-1}\cap\bar{\Omega})\supset\overline{\mathrm{co}}A(D_k\cap\bar{\Omega})=D_{k+1};$$

于是, 根据归纳法知, $D_{n-1}\supset D_n(n=2,3,\cdots,)$. 由引理 5.1

(ⅶ)，并注意到 A 是 k - 集压缩映象，知

$$\alpha(D_n)=\alpha(A(D_{n-1}\cap\bar{\Omega}))\leqslant k\alpha(D_{n-1}\cap\Omega)\leqslant k\alpha(D_{n-1}),$$

从而 $\alpha(D_n)\leqslant k^n\alpha(\bar{\Omega})$. 注意到 $k<1$，即知 $\alpha(D_n)\rightarrow 0$. 于是，根据引理 5.2 知 $D=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}D_n\neq\varnothing$，且 D 是 E 中紧集．同样，由 $D_{n-1}\cap\bar{\Omega}\supset D_n\cap\bar{\Omega}$, $\alpha(D_n\cap\bar{\Omega})\rightarrow 0$，应用引理 5.2 知 $D\cap\bar{\Omega}=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}(D_n\cap\bar{\Omega})$ 也是 E 中非空紧集．由于

$$A(D_n\cap\bar{\Omega})\subset\overline{\mathrm{co}}A(D_n\cap\bar{\Omega})=D_{n+1}\subset D_n$$

故

$$A(D\cap\bar{\Omega})\subset\bigcap_{n=1}^{\infty}A(D_n\cap\bar{\Omega})\subset\bigcap_{n=1}^{\infty}D_n=D.$$

由于 D 是紧集，故 A 作为映 $D\cap\bar{\Omega}$ 入 D 的算子是全连续的．于是，根据全连续算子的延拓定理(第一章定理 2.7)知，存在全连续算子，$A_1:\bar{\Omega}\rightarrow D$，当 $x\in D\cap\bar{\Omega}$ 时，恒有 $A_1x=Ax$. 令 $f_1=I-A_1$，易知 $\theta\overline{\in}f_1(\partial\Omega)$(若存在 $x_0\in\partial\Omega$，使 $f_1(x_0)=\theta$，则 $x_0=A_1x_0\in D$，从而 $A_1x_0=Ax_0$, $f(x_0)=f_1(x_0)=\theta$，此与 $\theta\overline{\in}f(\partial\Omega)$ 矛盾). 于是 Leray - Schauder 度 $\deg_{LS}(f_1,\Omega,\theta)$ 有意义．规定拓扑度

$$\deg(f,\Omega,\theta)=\deg_{LS}(f_1,\Omega,\theta).\qquad(5\cdot 12)$$

易知按(5.12)式定义的 $\deg(f,\Omega,\theta)$ 与 f_1 的选择无关．事实上，设 $A_2:\bar{\Omega}\rightarrow D$ 是 A 的另一全连续延拓(当 $x\in D\cap\bar{\Omega}$ 时，恒有 $A_2x=Ax$)，$f_2=I-A_2$. 令

$$H(t,x)=x-tA_1x-(1-t)A_2x,\quad\forall x\in\bar{\Omega},\ 0\leqslant t\leqslant 1.$$

今证 $H(t,x)\neq\theta$, $\forall 0\leqslant t\leqslant 1$, $x\in\partial\Omega$. 事实上，若存在 $0\leqslant t_0\leqslant 1$, $x_0\in\partial\Omega$，使 $H(t_0,x_0)=\theta$，即 $x_0=t_0A_1x_0+(1-t_0)Ax_0$. 注意到 $A_1x_0\in D$, $A_2x_0\in D$, D 为凸集，故 $t_0A_1x_0+(1-t_0)$

$A_2x_0\in D$,即 $x_0\in D$．所以 $x_0\in D\cap\bar{\Omega}$, $A_1x_0=A_2x_0=Ax_0$, $x_0=Ax_0$,此与 $\theta\overline{\in}f(\partial\Omega)$矛盾．于是根据 Leray－Schauder 度的同伦不变性知

$$\deg_{LS}(f_2,\Omega,\theta)=\deg_{LS}(f_1,\Omega,\theta).$$

由此可知,按(5·12)式定义的 $\deg(f,\Omega,\theta)$与 f_1 的选择无关．

(2)设 $p\in E\setminus f(\partial\Omega)$．由于 $f-p=I-A-p$ 仍为 $\bar{\Omega}$ 上的严格集压缩场(仍属于$\sum_k(\bar{\Omega})$),且当 $x\in\partial\Omega$ 时,$f(x)-p\neq\theta$,故按(1),拓扑度 $\deg(f-p,\Omega,\theta)$有意义．规定拓扑度

$$\deg(f,\Omega,p)=\deg(f-p,\Omega,\theta). \tag{5·13}$$

至此,严格集压缩场 f 在 Ω 上关于 p 的拓扑度 $\deg(f,\Omega,p)$的定义全部完成．

注 4 若 A 在 $\bar{\Omega}$ 上具有不动点 x^*,则一定是 $D_n\cap\bar{\Omega}\neq\varnothing$ $(n=1,2,\cdots)$所述的情况．事实上,这时 $x^*\in D_n\cap\bar{\Omega}(n=1,2,\cdots)$．由此可知,若 F 表 A 在 $\bar{\Omega}$ 上的不动点集,则 $F\subset D\cap\bar{\Omega}$.

定理 5.1 若 $A:\bar{\Omega}\to E$ 全连续,$f=I-A$, $p\in E\setminus f(\partial\Omega)$ 则把 A 视为 $\bar{\Omega}$ 上的 0－集压缩映象按定义 5.3 所定义的拓扑度 $\deg(f,\Omega,p)$与按定义 2.1 所定义的 Leray－Schauder 度 $\deg_{LS}(f,\Omega,p)$相等:

$$\deg(f,\Omega,p)=\deg_{LS}(f,\Omega,p). \tag{5·14}$$

证 由(5·13)式,只需就 $p=\theta$ 来证明(5·14)式．如果是定义 5.3(1)(ⅰ)所述的情况,这时(5·11)式成立($p=\theta$)．根据注 4 所述,A 在 $\bar{\Omega}$ 上必定没有不动点,因此 Leray－Schauder 度 $\deg_{LS}(f,\Omega,\theta)=0$,故(5·14)式成立．如果是定义 5.3(1)(ⅱ)所述的情况．设全连续算子 $A_1:\bar{\Omega}\to D$ 是定义 5.3(1)(ⅱ)中所述的延拓算子(当 $x\in D\cap\Omega_2$ 时,$A_1x=Ax$)．令

$$H(t,x)=x-tA_1x-(1-t)Ax,\quad \forall\, x\in\bar{\Omega},\quad 0\leqslant t\leqslant 1.$$

今证 $H(t,x)\neq\theta$, $\forall\, x\in\partial\Omega, 0\leqslant t\leqslant 1$. 事实上,若存在 $x_0\in\partial\Omega, 0\leqslant t_0\leqslant 1$,使 $H(t_0,x_0)=\theta$,即

$$x_0=t_0A_1x_0+(1-t_0)Ax_0.$$

由 $Ax_0\in D_1$, $A_1x_0\in D\subset D_1$ 及 D_1 的凸性,知 $x_0\in D_1$;于是 $Ax_0\in D_2$,再由 $A_1x_0\in D\subset D_2$ 及 D_2 的凸性,并注意到上式,又知 $x_0\in D_2$;这样继续下去,可知 $x_0\in D_n$ ($n=1,2,\cdots$),从而 $x_0\in D$,故 $A_1x_0=Ax_0$, $x_0=t_0Ax_0+(1-t_0)Ax_0=Ax_0$,此与 $\theta\in f(\partial\Omega)$的假定矛盾. 于是,根据 Leray - Schauder 度的同伦不变性,知

$$\deg_{LS}(f,\Omega,\theta)=\deg_{LS}(f_1,\Omega,\theta),$$

由此,再注意到(5.12)式,即知(5·14)式成立. 证完.

引理 5.5 设 $f=I-A\in\sum_k(\bar{\Omega})$, $k<1$, $\theta\overline{\in} f(\partial\Omega)$,且是定义 5.3 中(1)(ⅱ)所述的情况,设 E 中紧凸集 $S\supset D$,且 $A(S\cap\bar{\Omega})\subset S$. 又设 $B:\bar{\Omega}\to S$ 连续(从而全连续),且当 $x\in S\cap\bar{\Omega}$ 时,$Bx=Ax$. 令 $g=I-B$. 则

$$\deg(f,\Omega,\theta)=\deg_{LS}(g,\Omega,\theta).\qquad(5\cdot15)$$

证 设 A_1, f_1 如定义 5.3(1)(ⅱ)中所述. 令

$$H(t,x)=x-tA_1x-(1-t)Bx,\quad \forall\, x\in\bar{\Omega},\quad 0\leqslant t\leqslant 1.$$

今证 $H(t,x)\neq\theta$, $\forall\, x\in\partial\Omega, 0\leqslant t\leqslant 1$. 事实上,若存在 $x_0\in\partial\Omega, 0\leqslant t\leqslant 1$,使 $H(t_0,x_0)=\theta$,注意到 S 是凸集且 $S\supset D$,有 $x_0=t_0A_1x_0+(1-t_0)Bx_0\in S$,从而 $Bx_0=Ax_0$, $x_0=t_0A_1x_0+(1-t_0)Ax_0$. 由于 $Ax_0\in D_1$, $A_1x_0\in D\subset D_1$,故有 $x_0=t_0A_1x_0+(1-t_0)Ax_0\in D_1$;因此又有 $Ax_0\in D_2$, $A_1x_0\in D\subset D_2$,从而 $x_0=t_0A_1x_0+(1-t_0)Ax_0\in D_2$. 这样继续下去,得知

$x_0 \in D_n$ ($n = 1, 2, \cdots$). 从而 $x_0 \in D$. 于是 $A_1 x_0 = A x_0$, $x_0 = t_0 A x_0 + (1 - t_0) A x_0 = A x_0$, 此与 $\theta \overline{\in} f(\partial \Omega)$ 矛盾 . 根据 Leray - Schauder 度的同伦不变性, 得

$$\deg_{LS}(g, \Omega, \theta) = \deg_{LS}(f_1, \Omega, \theta). \qquad (5\cdot16)$$

由(5·16)式与(5·12)式, 即得(5.15)式 . 证完 .

定理 5.2 严格集压缩场的拓扑度具有下列性质:

(i)正规性: $\deg(I, \Omega, p) = 1, \quad \forall p \in \Omega$;

(ii)可加性: 设 Ω_1, Ω_2 是 Ω 的两个互不相交的开子集, $p \overline{\in} f(\bar{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2))$ 那末,

$$\deg(f, \Omega, p) = \deg(f, \Omega_1, p) + \deg(f, \Omega_2, p);$$

(iii)同伦不变性: 设 $H: [0, 1] \times \bar{\Omega} \to E$ 连续, 并且对每一个固定的 $t \in [0, 1]$, $H(t, \cdot): \bar{\Omega} \to E$ 是 k - 集压缩映象, $k < 1$ (k 与 t 无关), 而且 $H(t, x)$ 对于 t 在任何点 $t_0 \in [0, 1]$ 的连续性关于 $x \in \bar{\Omega}$ 是一致的 . 令 $h_t(x) = x - H(t, x)$. 若 $p \overline{\in} h_t(\partial \Omega)$, $\forall 0 \leqslant t \leqslant 1$, 则 $\deg(h_t, \Omega, p)$ 保持常数($\forall 0 \leqslant t \leqslant 1$).

(iv)可解性(Kronecker 存在定理): 若 $\deg(f, \Omega, p) \neq 0$, 则方程 $f(x) = p$ 在 Ω 内必有解;

(v)切除性: 设 Ω_0 是 Ω 的开子集, 且 $p \overline{\in} f(\bar{\Omega} \setminus \Omega_0)$, 则

$$\deg(f, \Omega, p) = \deg(f, \Omega_0, p);$$

(vi)若 $p \overline{\in} f(\partial \Omega)$, 则

$$\deg(f, \Omega, p) = \deg(f - p, \Omega, \theta)$$

证 (i)由定理 5.1 和 5.2(i)直接推出 .(vi)由定义5.3 中(5·13)式即知 .(v)由(ii)与(iv)直接推出(参看定理 1.3 (ν)的证明). 由(vi), 只需就 $p = \theta$ 的情形证明(ii)、(iii)、(iv)即可 .

2
A
B
A
B
A

(ⅱ)设 $\theta\overline{\in} f(\bar{\Omega}\setminus(\Omega_1\cup\Omega_2))$. 分下列几种情况讨论．

1° 设对 Ω_1 与 Ω_2 都是定义 5.3(1)(ⅱ)的情况．这时，对于 Ω 显然也是定义 5·3(1)(ⅱ)所述的情况．有

$$\begin{cases} D^{(1)}\cap\bar{\Omega}_1\neq\varnothing,\ D^{(2)}\cap\bar{\Omega}_2\neq\varnothing,\ D\cap\bar{\Omega}\neq\varnothing, \\ \quad D^{(1)}\subset D,\ D^{(2)}\subset D, \\ A(D^{(1)}\cap\bar{\Omega}_1)\subset D^{(1)},\ A(D^{(2)}\cap\bar{\Omega}_2)\subset D^{(2)}, \\ \quad A(D\cap\bar{\Omega})\subset D, \end{cases} \tag{5·17}$$

其中 $D^{(1)}$ 与 $D^{(2)}$ 分别表对于 Ω_1 与 Ω_2 按定义 5.3(1)(ⅱ)所作出的 D. 令 $A_1:\bar{\Omega}\to D$ 表定义 5.3(1)(ⅱ)对 D 作出的全连续算子(当 $x\in D\cap\bar{\Omega}$ 时，恒有 $A_1x=Ax$)，$f_1=I-A_1$. 根据定义(5·12)式，有

$$\deg(f,\Omega,\theta)=\deg_{LS}(f_1,\Omega,\theta), \tag{5·18}$$

根据引理 5·5，有

$$\deg(f,\Omega_1,\theta)=\deg_{LS}(f_1,\Omega_1,\theta), \tag{5·19}$$

$$\deg(f,\Omega_2,\theta)=\deg_{LS}(f_2,\Omega_2,\theta). \tag{5·20}$$

根据 Leray－Schauder 度的可加性，知

$$\deg_{LS}(f_1,\Omega,\theta)=\deg_{LS}(f_1,\Omega_1,\theta)+\deg_{LS}(f_1,\Omega_2,\theta). \tag{5·21}$$

由(5·18)～(5·21)诸式，得

$$\deg(f,\Omega,\theta)=\deg(f,\Omega_1,\theta)+\deg(f,\Omega_2,\theta). \tag{5·22}$$

2° 设对 Ω_1 与 Ω_2 两者之中有一个(设为 Ω_1)是定义 5.3(1)(ⅱ)的情况，而另一个(设为 Ω_2)是定义 5.3(1)(ⅰ)的情况．这时，对于 Ω 显然是定义 5.3(1)(ⅱ)的情况．又由(5·11)式，有

$$\deg(f,\Omega_2,\theta)=0. \tag{5·23}$$

根据引理 5.5 知(5·19)式成立，其中 $f_1=I-A_1$ 如 1°中所述．

又,根据定义知(5·18)式成立．下证

$$\deg_{LS}(f_1, \Omega_2, \theta) = 0. \tag{5·24}$$

事实上,若 $\deg_{LS}(f_1, \Omega_2, \theta) \neq 0$,则存在 $x_0 \in \Omega_2$,使 $f_1(x_0) = \theta$,即 $x_0 = Ax_0 \in D$,故 $A_1 x_0 = Ax_0$, $x_0 = Ax_0$. 于是,由注 4 知,对于 Ω_2 必定是 5.3(1)(ⅱ)所述的情况,此与假定矛盾．故(5·24)式成立．由 Leray - Schauder 度的可加性(5·21)式成立．于是,由(5·21)式、(5·24)式、(5·23)式、(5·18)式及(5·19)式即知(5·22)式成立．

3° 设对于 Ω_1 与 Ω_2 都是定义 5.3(1)(ⅰ)所述的情况．这时,根据定义,有

$$\deg(f, \Omega_1, \theta) = \deg(f, \Omega_2, \theta) = 0.$$

于是,要证(5·22)式成立,只需证明

$$\deg(f, \Omega, \theta) = 0. \tag{5·25}$$

由注 4 知 A 在 Ω_1 与 Ω_2 上均无不动点,从而 $\theta \overline{\in} f(\Omega_1 \cup \Omega_2)$. 于是

$$\theta \overline{\in} f(\overline{\Omega}). \tag{5·26}$$

若对于 Ω 是定义 5.3(1)(ⅰ)所述的情况,则根据定义知(5·25)式成立．故下设对于 Ω 是定义 5.3(1)(ⅱ)所述的情况．于是(5·18)式成立,其中 $f_1 = I - A_1$ 如 1°所述．我们证明

$$\theta \overline{\in} f_1(\overline{\Omega}). \tag{5·27}$$

事实上,若 $\theta \in f_1(\overline{\Omega})$,即存在 $x_0 \in \overline{\Omega}$,使 $f_1(x_0) = \theta$,即 $x_0 = A_1 x_0 \in D$,从而 $A_1 x_0 = Ax_0$, $x_0 = Ax_0$,此与(5·26)式矛盾．故(5·27)式成立．由(5·27)式,利用 Leray - Schauder 度的 Kronecker 存在定理知 $\deg_{LS}(f_1, \Omega, \theta) = 0$,由此再根据(5·18)式即得(5·25)式．(ⅱ)获证．

(ⅳ)在上面(ⅱ)的证明过程中,实际上已经证明了(ⅳ)(对 $p=\theta$),因为我们已证从(5·26)式可推出(5·25)式.

(ⅲ)先证 $H([0,1]\times\bar{\Omega})$是 E 中有界集. 事实上,若不然,则存在 $t_n\in[0,1]$, $x_n\in\bar{\Omega}$,使

$$\|H(t_n,x_n)\|\to+\infty \tag{5·28}$$

不失一般,可设 $t_n\to t_0\in[0,1]$(否则,取某子列即可). 我们有

$$\|H(t_n,x_n)\|\leqslant\|H(t_n,x_n)-H(t_0,x_n)\|+\|H(t_0,x_n)\|, \tag{5·29}$$

由 $H(t_0,\cdot)$是 k - 集压缩知$\|H(t_0,x_n)\|$有界,再由 $H(t,x)$对于 t 在 t_0 的连续性关于 $x\in\bar{\Omega}$ 是一致的,知$\|H(t_n,x_n)-H(t_0,x_n)\|$有界,从而根据(5·29)式知$\|H(t_n,x_n)\|$有界,此与(5·28)式矛盾. 因此 $H([0,1]\times\bar{\Omega})$有界. 令 $D_1^*=\overline{\text{co}}H([0,1]\times\bar{\Omega})$,

$$D_n^*=\overline{\text{co}}H([0,1]\times(D_{n-1}^*\cap\bar{\Omega})),\ (n=2,3,\cdots) \tag{5·30}$$

对任何固定的 $t\in[0,1]$,令 $D_1(t)=\overline{\text{co}}H(t,\bar{\Omega})$,

$$D_n(t)=\overline{\text{co}}H(t,D_{n-1}(t)\cap\bar{\Omega}),\ (n=2,3,\cdots) \tag{5·31}$$

显然

$$D_n(t)\subset D_n^*,\quad \forall\, 0\leqslant t\leqslant 1,\quad n=1,2,3,\cdots. \tag{5·32}$$

如果对某 $n=n_0$, $D_{n_0}^*\cap\bar{\Omega}=\varnothing$,则由(5·32)知, $D_{n_0}(t)\cap\bar{\Omega}=\varnothing$, $\forall\, 0\leqslant t\leqslant 1$. 于是,根据定义 5.3 知

$$\deg(h_t,\Omega,\theta)=0,\quad \forall\, 0\leqslant t\leqslant 1,$$

同伦不变性即获证. 故下设 $D_n^*\cap\bar{\Omega}\neq\varnothing(n=1,2,3,\cdots)$. 于是 $D_n^*\neq\varnothing(n=1,2,3,\cdots)$. 显然 $D_1^*\supset D_2^*$. 若 $D_{k-1}^*\supset D_k^*$,则

$$D_k^*=\overline{\text{co}}H([0,1]\times(D_{k-1}^*\cap\bar{\Omega}))\supset\overline{\text{co}}H([0,1]\times(D_k^*\cap\bar{\Omega}))=D_{k+1}^*,$$

根据数学归纳法知

$$D_{n-1}^* \supset D_n^* \quad (n=2,3,\cdots). \tag{5·33}$$

任给 $\varepsilon>0$. 对任何 $t_0\in[0,1]$, 由于 $H(t_0,\cdot):\bar{\Omega}\to E$ 是 k-集压缩的, $\alpha(H(t_0,D_{n-1}^*\cap\bar{\Omega}))\leqslant k\alpha(D_{n-1}^*\cap\bar{\Omega})\leqslant k\alpha(D_{n-1}^*)$, 故存在分法 $H(t_0,D_{n-1}^*\cap\bar{\Omega})=\bigcup_{i=1}^{m}S_i$, $d(S_i)<k\alpha(D_{n-1}^*)+\varepsilon$, $i=1,2,\cdots,m$. 由假定, 存在 $\delta_0>0$, 使当 $|t-t_0|<\delta_0$ 时, 恒有 $\|H(t,x)-H(t_0,x)\|<\varepsilon$ 对一切 $x\in\bar{\Omega}$ 成立. 令 $S_i^\varepsilon=\{x\mid d(x,S_i)<\varepsilon\}$, $I(t_0,\delta_0)=(t_0-\delta_0,t_0+\delta_0)\cap[0,1]$. 于是

$$H(I(t_0,\delta_0)\times(D_{n-1}^*\cap\bar{\Omega}))\subset\bigcup_{i=1}^{m}S_i^\varepsilon,$$

$$d(S_i^\varepsilon)\leqslant d(S_i)+2\varepsilon<k\alpha(D_{n-1}^*)+3\varepsilon,$$

由此可知

$$\alpha(H(I(t_0,\delta_0)\times(D_{n-1}^*\cap\bar{\Omega})))\leqslant k\alpha(D_{n-1}^*)+3\varepsilon. \tag{5·34}$$

根据有限覆盖定理, 存在 $t_i\in[0,1]$ $(i=1,2,\cdots,s)$, 使 $[0,1]=\bigcup_{i=1}^{s}I(t_i,\delta_i)$ 且

$$\alpha(H(I(t_i,\delta_i)\times(D_{n-1}^*\cap\bar{\Omega})))\leqslant k\alpha(D_{n-1}^*)+3\varepsilon,$$
$$i=1,2,\cdots,s.$$

于是, 根据引理 5.1(vii)与(iv)得

$$\begin{aligned}\alpha(D_n^*)&=\alpha(H([0,1])\times(D_{n-1}^*\cap\bar{\Omega}))\\&=\alpha\Big(\bigcup_{i=1}^{s}H(I(t_i,\delta_i)\times(D_{n-1}^*\cap\bar{\Omega}))\Big)\\&=\max_i\alpha(H(I(t_i,\delta_i)\times(D_{n-1}^*\times\bar{\Omega})))\\&\leqslant k\alpha(D_{n-1}^*)+3\varepsilon.\end{aligned}$$

再由 ε 的任意性, 得

$$\alpha(D_n^*)\leqslant k\alpha(D_{n-1}^*),\quad n=2,3,\cdots,$$

从而 $\alpha(D_n^*)\leqslant k^{n-1}\alpha(D_1^*)$. 故 $\alpha(D_n^*)\to 0$. 根据引理 5.2 知 $D^*=\bigcap_{n=1}^{\infty}D_n^*$ 是E 中的非空紧集，而且显然是凸集(因为每个 D_n^* 都是凸集). 同样，由引理 5.2 知 $D^*\cap\bar{\Omega}$ 也是 E 中非空紧集. 由于

$$H([0,1]\times(D_n^*\cap\bar{\Omega}))\subset\overline{\mathrm{co}}H([0,1]\times(D_n^*\cap\bar{\Omega}))$$
$$=D_{n+1}^*\subset D_n^*,$$

故

$$H([0,1]\times(D^*\cap\bar{\Omega}))\subset\bigcap_{n=1}^{\infty}H([0,1]$$
$$\times(D_n^*\cap\bar{\Omega}))\subset\bigcap_{n=1}^{\infty}D_n^*=D^*. \tag{5·35}$$

根据第一章定理 2.7 知，存在全连续算子 $G:[0,1]\times\bar{\Omega}\to D^*$，使当$(t,x)\in[0,1]\times(D^*\cap\bar{\Omega})$时，恒有 $G(t,x)=H(t,x)$. 令

$$g_t(x)=x-G(t,x).$$

我们证明

$$\deg(h_t,\Omega,\theta)=\deg_{LS}(g_t,\Omega,\theta),\quad\forall\,0\leqslant t\leqslant 1. \tag{5·36}$$

事实上，对任何固定的 $t\in[0,1]$，分两种情况讨论：

1° 对严格集压缩算子场 h_t，假定是定义 5.3(1)(ⅰ)所述的情况. 于是

$$\deg(h_t,\Omega,\theta)=0. \tag{5·37}$$

由注 4 知，这时 $H(t,\cdot)$在 $\bar{\Omega}$ 上没有不动点，从而 $G(t,\cdot)$在 $\bar{\Omega}$ 上也没有不动点(因为，如果存在 $x_0\in\bar{\Omega}$，使 $G(t,x_0)=x_0$，则 $x_0\in D^*$，从而 $G(t,x_0)=H(t,x_0)$，$H(t,x_0)=x_0$，即 x_0 是 $H(t,\cdot)$的不动点，矛盾). 于是，根据 Leray - Schauder 度的 Kronecker 存在定理知

$$\deg_{LS}(g_t, \Omega, \theta) = 0. \tag{5·38}$$

由(5·37)式与(5·38)式即知这时(5·36)式成立．

2° 对 h_t，假定是定义 5.3(1)(ⅱ)所述的情况．注意到(5·33)式与(5·35)式，利用引理 5.5，得知

$$\deg(h_t, \Omega, \theta) = \deg_{LS}(g_t, \Omega, \theta),$$

故(5·36)式成立．下证

$$\theta \overline{\in} g_t(\partial\Omega), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1. \tag{5·39}$$

事实上，若存在 $0 \leqslant t_0 \leqslant 1$，$x_0 \in \partial\Omega$，使 $g_{t_0}(x_0) = \theta$，则有 $x_0 = G(t_0, x_0) \in D^*$，故 $G(t_0, x_0) = H(t_0, x_0)$，$x_0 = H(t_0, x_0)$，此与假定 $\theta \overline{\in} h_t(\partial\Omega)$，$0 \leqslant t \leqslant 1$ 矛盾．故(5·39)式成立．由(5·39)式，利用 Leray - Schauder 度的同伦不变性，得知

$$\deg_{LS}(g_t, \Omega, \theta) = \text{const}, \quad \forall\, 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

于是，由(5·36)式，即得知

$$\deg(h_t, \Omega, \theta) = \text{const}, \quad \forall\, 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

证完．

注 5 在应用上，常取同伦不变性中的 $H(t, x)$ 为如下的形式：

$$H(t, x) = tAx + (1 - t)Bx, \tag{5·40}$$

其中 $A: \overline{\Omega} \to E$ 与 $B: \overline{\Omega} \to E$ 都是 k - 集压缩映象($k < 1$)．显然 $H: [0,1] \times \overline{\Omega} \to E$ 连续．对于固定的 $t \in [0,1]$ 及 $S \subset \overline{\Omega}$，有

$$H(t, S) \subset tA(S) + (1 - t)B(S),$$

从而

$$\begin{aligned}\alpha(H(t, S)) &\leqslant k\alpha(A(S)) + (1 - t)\alpha(B(S)) \\ &\leqslant tk\alpha(S) + (1 - t)k\alpha(S) = k\alpha(S),\end{aligned}$$

因此，$H(t, \cdot): \overline{\Omega} \to$ 是 k - 集压缩映象．又显然

$$\|H(t,x)-H(t_0,x)\|\leqslant M|t-t_0|,$$

其中 $M=\sup\limits_{x\in\bar{\Omega}}\|Ax\|+\sup\limits_{x\in\bar{\Omega}}\|Bx\|$. 故 $H(t,x)$ 对 t 在 t_0 的连续关于 $x\in\bar{\Omega}$ 是一致的.

定理 5.3 严格集压缩场的的拓扑度具有下列性质:

1° 边界值性质: $\deg(f,\Omega,p)$ 只与 f 上 $\partial\Omega$ 的值有关, 即: 若 f,g 都是 $\bar{\Omega}$ 上的严格集压缩场, $p\in E\setminus f(\partial\Omega)$, 并且当 $x\in\partial\Omega$ 时, 恒有 $f(x)=g(x)$, 则必有

$$\deg(f,\Omega,p)=\deg(g,\Omega,p);$$

2° 连通区性质: 当 p 在 $E\setminus f(\partial\Omega)$ 的连通区中变动时, $\deg(f,\Omega,p)$ 保持不变, 即: 若 p_1,p_2 属于 $E\setminus f(\partial\Omega)$ 的同一连通区, 那末 $\deg(f,\Omega,p_1)=\deg(f,\Omega,p_2)$;

3° 缺方向性质: 若存在 $y_0\in E, y_0\neq\theta$, 使

$$x\in\partial\Omega,\quad \tau\geqslant 0\Rightarrow f(x)\neq p+\tau y_0,$$

那末必有 $\deg(f,\Omega,p)=0$.

证 和定理 1.4 中的 1°、2°、3° 的证明完全类似(注意到上面的注 5 以及引理 5.4(ⅱ)). 从略.

注 6 可以证明(参看[34]), 严格集压缩场的拓扑度是惟一的, 即: 若三变元 f,Ω,p 的整值函数 $\deg(f,\Omega,p)$(这里, Ω 取实 Banach 空间 E 中一切有界开集, f 取 $\sum_k(\bar{\Omega})$ 中一切元素, $k<1$ 是固定的, p 取 $p\in E\setminus f(\partial\Omega)$ 的一切点)具有定理 5.2 中的性质(ⅰ)、(ⅱ)、(ⅲ)、(ⅵ), 那末, 此整值函数必等于定义 5.3 中定义的拓扑度.

下面, 利用严格集压缩场的拓扑度来给出凝聚场的拓扑度. 令 $\Gamma(\bar{\Omega})=\{f\mid f=I-A, A:\bar{\Omega}\to E$ 是凝聚映象$\}$.

定义 5.4 设 Ω 是 E 中有界开集, $f=I-A, A:\bar{\Omega}\to E$ 是凝聚映象, $p\in E\setminus f(\partial\Omega)$. 根据引理 5.4(ⅱ)知 $f(\partial\Omega)$ 是 E 中

闭集,从而 $\tau = d(p, f(\partial\Omega)) = \inf\limits_{x\in\partial\Omega}\|f(x)-p\|>0$. 任取严格集压缩映象 $B:\bar{\Omega}\to E$ 使

$$\|Ax-Bx\|<\frac{\tau}{3},\quad \forall\, x\in\bar{\Omega}. \tag{5·41}$$

这种 B 是存在的,例如,取 $B=kA$,其中 k 小于 1 而充分接近 1 即可. 令 $g=I-B$. 由于当 $x\in\partial\Omega$ 时

$$\begin{aligned}\|g(x)-p\| &\geqslant \|f(x)-p\|-\|Ax-Bx\| \\ &> \tau-\frac{\tau}{3}=\frac{2\tau}{3},\end{aligned} \tag{5·42}$$

故按定义 5.3, $\deg(g,\Omega,p)$有意义,定义凝聚场 f 的拓扑度 $\deg(f,\Omega,p)$为:

$$\deg(f,\Omega,p)=\deg(g,\Omega,p). \tag{5·43}$$

注 7 要使定义(5·43)式是合理的,必须证明按(5·43)式定义的 $\deg(f,\Omega,p)$与映象 B 的选取无关,即若 $g_1=I-B_1$, $B_1:\bar{\Omega}\to E$ 严格集压缩,且满足

$$\|Ax-B_1x\|<\frac{\tau}{3},\quad \forall\, x\in\bar{\Omega}, \tag{5·44}$$

那末必有

$$\deg(g,\Omega,p)=\deg(g_1,\Omega,p). \tag{5·45}$$

今证(5·45)式如下:设 B 是 k-集压缩($k<1$), B_1 是 k_1-集压缩($k_1<1$),则显然 B 与 B_1 都可视为 k_2-集压缩映象,这里 $k_2=\max\{k,k_1\}<1$. 令

$$H(t,x)=tBx+(1-t)B_1x,\quad h_t(x)=x-H(t,x).$$

由(5·41)式与(5·44)式知,当 $x\in\partial\Omega$, $0\leqslant t\leqslant 1$ 时,有

$$\begin{aligned}&\|h_t(x)-p\| \\ &\geqslant \|f(x)-p\|-t\|Ax-Bx\|-(1-t)\|Ax-B_1x\|\end{aligned}$$

$$>\tau-\frac{t\tau}{3}-\frac{(1-t)\tau}{3}=\frac{2\tau}{3};$$

于是，根据严格集压缩场拓扑度的同伦不变性(注意到前面的注5)，即得(5·45)式．

注8 当 $f=I-A$ 本身就是严格集压缩场时，显然可取定义5.4中的 B 为 A，从而 $f=g$；由此可知，此时按定义5.4定义的拓扑度和按定义5.3定义的拓扑度是一致的．所以，凝聚场的拓扑度是严格集压缩场的拓扑度的推广．

定理5.4 凝聚场的拓扑度具下列性质：

1° 正规性：$\deg(I,\Omega,p)=1,\ \forall x\in\Omega$；

2° 可加性：设 Ω_1,Ω_2 是 Ω 的两个互不相交的开子集，且 $p\overline{\in}f(\overline{\Omega}\setminus(\Omega_1\cup\Omega_2))$，那末

$$\deg(f,\Omega,p)=\deg(f,\Omega_1,p)+\deg(f,\Omega_2,p);$$

3° 同伦不变性：设 $H:[0,1]\times\overline{\Omega}\to E$ 连续，并且对每一个固定的 $t\in[0,1]$，$H(t,\cdot):\overline{\Omega}\to E$ 是凝聚映象，而且 $H(t,x)$ 对于 t 在任何点 $t_0\in[0,1]$ 的连续性关于 $x\in\overline{\Omega}$ 是一致的．令 $h_t(x)=x-H(t,x)$．若 $p\overline{\in}h_t(\partial\Omega)$，$\forall 0\leqslant t\leqslant 1$，则 $\deg(h_t,\Omega,p)$ 保持常数($\forall 0\leqslant t\leqslant 1$)；

4° 可解性(Kronecker存在定理)：若 $\deg(f,\Omega,p)\neq 0$，则方程 $f(x)=p$ 在 Ω 内必有解；

5° 切除性：设 Ω_0 是 Ω 的开子集，且 $p\overline{\in}f(\overline{\Omega}\setminus\Omega_0)$，则有

$$\deg(f,\Omega,p)=\deg(f,\Omega_0,p);$$

6° 若 $p\overline{\in}f(\partial\Omega)$，则

$$\deg(f,\Omega,p)=\deg(f-p,\Omega,\theta).$$

证 1° 显然成立．

2° 由于 $\overline{\Omega}\setminus(\Omega_1\cup\Omega_2)$ 是闭集，故由引理5.4知 $f(\overline{\Omega}\setminus(\Omega_1$

$\cup\Omega_2$))是闭集,从而

$$\tau_0=\inf_{x\in\bar{\Omega}\setminus(\Omega_1\cup\Omega_2)}\|f(x)-p\|>0.$$

取严格集压缩映象 $B:\bar{\Omega}\to E$,使

$$\|Ax-Bx\|<\frac{\tau_0}{3},\quad\forall x\in\bar{\Omega}.$$

于是,根据定义 5.4 知($g=I-B$)

$$\deg(f,\Omega,p)=\deg(g,\Omega,p)\tag{5·46}$$

$$\deg(f,\Omega_1,p)=\deg(g,\Omega_1,p)\tag{5·47}$$

$$\deg(f,\Omega_2,p)=\deg(g,\Omega_2,p)\tag{5·48}$$

但是当 $x\in\bar{\Omega}\setminus(\Omega_1\cup\Omega_2)$时,有

$$\|g(x)-p\|\geqslant\|f(x)-p\|-\|Ax-Bx\|$$

$$>\tau_0-\frac{\tau_0}{3}=\frac{2\tau_0}{3}$$

故 $p\overline{\in}g(\bar{\Omega}\setminus(\Omega_1\cup\Omega_2))$. 于是,根据定理 5.2(ⅱ)知

$$\deg(g,\Omega,p)=\deg(g,\Omega_1,p)+\deg(g,\Omega_2,p).\tag{5·49}$$

由(5·46)~(5·49)诸式,即得

$$\deg(f,\Omega,p)=\deg(f,\Omega_1,p)+\deg(f,\Omega_2,p)$$

3° 先证 $\forall t_0\in[0,1]$,存在 $\delta>0$,使当 $|t-t_0|<\delta$ 时,恒有

$$\deg(h_t,\Omega,p)=\deg(h_{t_0},\Omega,p)\tag{5·50}$$

由假定 $\tau_0=d(p,h_{t_0}(\partial\Omega))=\inf_{x\in\partial\Omega}\|h_{t_0}(x)-p\|>0$. 又由假定,存在 $\delta>0$,使

$$\|H(t,x)-H(t_0,x)\|<\frac{\tau_0}{5},$$

$$\forall|t-t_0|<\delta,\quad x\in\bar{\Omega}.\tag{5·51}$$

下证此 δ 即符合要求. 事实上,取 k 满足

$$1-\frac{\tau_0}{15M_0}<k<1,\ \text{其中}\ M_0=\sup_{x\in\Omega}\|H(t_0,x)\|. \tag{5·52}$$

令 $Bx=kH(t_0,x)$. 由 $B:\bar{\Omega}\to E$ 是严格集压缩映象(实际上是 k－集压缩映象), 且满足: 当 $x\in\bar{\Omega}$ 时, 有

$$\|H(t_0,x)-Bx\|=(1-k)\|H(t_0,x)\|$$

$$\leqslant(1-k)M_0<\frac{\tau_0}{15}, \tag{5·53}$$

故根据定义 5.4 知

$$\deg(h_{t_0},\Omega,p)=\deg(I-B,\Omega,p). \tag{5·54}$$

现任给 t, 满足 $|t-t_0|<\delta$, 由于当 $x\in\partial\Omega$ 时(注意到(5·51)式), 有

$$\|h_t(x)-p\|\geqslant\|h_{t_0}(x)-p\|-\|H(t_0,x)-H(t,x)\|$$

$$>\tau_0-\frac{\tau_0}{5}=\frac{4\tau_0}{5}$$

故

$$d(p,h_t(\partial\Omega))=\inf_{x\in\bar{\Omega}}\|h_t(x)-p\|\geqslant\frac{4\tau_0}{5}. \tag{5·55}$$

由(5·51)式与(5·53)式知, 当 $x\in\bar{\Omega}$ 时, 有

$$\|H(t,x)-Bx\|$$

$$\leqslant\|H(t,x)-H(t_0,x)\|+\|H(t_0,x)-Bx\|$$

$$<\frac{\tau_0}{5}+\frac{\tau_0}{15}=\frac{4\tau_0}{15}=\frac{1}{3}\left(\frac{4\tau_0}{5}\right) \tag{5·56}$$

于是, 由(5·55)式与(5·56)式, 根据定义 5.4 知

$$\deg(h_t,\Omega,p)=\deg(I-B,\Omega,p),\quad \forall\,|t-t_0|<\delta. \tag{5·57}$$

由(5·54)式与(5·57)式, 即得(5·50)式.

再利用有限覆盖定理, 即知

$$\deg(h_t,\Omega,p)=\text{const},\quad 0\leqslant t\leqslant 1.$$

4° 用反证法．假定 $f(x)=p$ 在 Ω 内无解，从而 $p\overline{\in}(\bar{\Omega})$（$p\overline{\in}f(\partial\Omega)$ 是已经假定了的）．由引理 5.4 知 $\tau^*=d(p,f(\bar{\Omega}))=\inf\limits_{x\in\Omega}\|f(x)-p\|>0$，取严格集压缩映象 $B:\bar{\Omega}\to E$，使

$$\|Ax-Bx\|<\frac{\tau^*}{3},\quad \forall x\in\bar{\Omega}. \tag{5·58}$$

$(f=I-A)$．根据定义 5.4 知 $(g=I-B)$

$$\deg(f,\Omega,p)=\deg(g,\Omega,p). \tag{5·59}$$

由(5·58)式知 $x\in\bar{\Omega}$ 当时，有

$$\|g(x)-p\|\geqslant\|f(x)-p\|-\|Ax-Bx\|>\frac{2\tau^*}{3},$$

故 $p\overline{\in}g(\bar{\Omega})$．于是，根据定理 5.2(ⅳ)知 $\deg(g,\Omega,p)=0$，从而，注意到(5·59)式，即知 $\deg(f,\Omega,p)=0$．(4°)获证．

5° 从 2°与 4°直接推出(参看定理 1.3(ⅴ)的证明)．(6°)是显然的．证完．

注 9 在应用上，常取同伦不变性中的 $H(t,x)$ 为(5·40)式的形式，其中 $A:\bar{\Omega}\to E$ 与 $B:\bar{\Omega}\to E$ 都是凝聚映象．仿前面注 5 中所述，可证：对固定的 $t\in[0,1]$，$H(t,\cdot):\bar{\Omega}\to E$ 都是凝聚映象，并且 $H(t,x)$ 对 t 在任何点 $t_0\in[0,1]$ 的连续性关于 $x\in\bar{\Omega}$ 都是一致的．

定理 5.5 凝聚场的拓扑度具有下列性质：

1° 边界值性质：$\deg(f,\Omega,p)$ 只与 f 在 $\partial\Omega$ 上的值有关，即：若 f,g 都是 $\bar{\Omega}$ 上的凝聚场，$p\in E\setminus f(\partial\Omega)$，并且当 $x\in\partial\Omega$ 时，恒有 $f(x)=g(x)$，则必有

$$\deg(f,\Omega,p)=\deg(g,\Omega,p).$$

2° 连通区性质：当 p 在 $E\setminus f(\partial\Omega)$ 的连通区中变动时，$\deg(f,\Omega,p)$ 保持不变，即：若 p_1,p_2 属于 $E\setminus f(\partial\Omega)$ 的同一连通

区，那末

$$\deg(f, \Omega, p_1) = \deg(f, \Omega, p_2);$$

3° 缺方向性质：若存在 $y_0 \in E$, $y_0 \neq \theta$, 使

$$x \in \partial\Omega, \quad \tau \geqslant 0 \Rightarrow f(x) \neq p + \tau y_0,$$

那末必有 $\deg(f, \Omega, p) = 0$.

证 和定理 1.4 中的 1°、2°、3°的证明完全类似（注意到注 9 及引理 5.4(ⅱ)）. 从略.

注 10 可以证明（参看〔34〕），凝聚场的拓扑度是惟一的，即：若三变元 f, Ω, p 的整值函数 $\deg(f, \Omega, p)$（这里，Ω 取 E 中一切有界开集，f 取 $\Gamma(\overline{\Omega})$ 中一切元素，p 取满足 $p \in E \setminus f(\partial\Omega)$ 的一切点）具有定理 5.4 中的性质 1°、2°、3°、6°，那末，此整值函数必等于定义 5.4 中定义的拓扑度.

下面建立一些不动点定理.

定理 5.6 设 Ω 是 E 中有界凸开集，$A: \overline{\Omega} \to E$ 是凝聚映象，且 $A(\partial\Omega) \subset \overline{\Omega}$，则 A 在 $\overline{\Omega}$ 内必有不动点.

证 和定理 3.1 的证明类似，从略.

系 设 Ω 是 E 中有界凸开集，$A: \overline{\Omega} \to E$ 是严格集压缩映象，且 $A(\partial\Omega) \subset \overline{\Omega}$，则 A 在 $\overline{\Omega}$ 内必有不动点.

定理 5.7（Sadovskii, 〔62〕） 设 D 是 E 中有界凸闭集（D 不一定有内点），$A: D \to D$ 是凝聚映象，则 A 在 D 中必具有不动点.

证 任取 $x_0 \in D$. 令 $Z = \{S \mid x_0 \in S \subset D$, S 是凸闭集. $A(S) \subset S\}$. 显然 $Z \neq \varnothing$（因为 $D \in Z$）. 令 $S_0 = \bigcap_{S \in Z} S$, 显然 $x_0 \in S_0 \subset D$, S_0 也是凸闭集，且 $A(S_0) \subset S_0$. 由于 $\overline{\text{co}}\{A(S_0), x_0\} \subset S_0$，故

$$A(\overline{\mathrm{co}}\{A(S_0),x_0\})\subset A(S_0)\subset\overline{\mathrm{co}}\{A(S_0),x_0\},$$

因此．$\overline{\mathrm{co}}\{A(S_0),x_0\}\in Z$．由此可知$\overline{\mathrm{co}}\{A(S_0),x_0\}=S_0$．于是

$$\alpha(S_0)=\alpha(\overline{\mathrm{co}}\{A(S_0),x_0\})=\alpha(\{A(S_0),x_0\})$$
$$=\alpha(A(S_0)),$$

根据 A 的凝聚性，即知 $\alpha(S_0)=0$，从而 S_0 是凸紧集．由 Schuder 不动点定理(定理 3.2 系 1)，即知 A 在 S_0 中具有不动点．证完．

系 1(Darbo,〔63〕) 设 D 是 E 中有界凸闭集(D 不一定有内点)，$A:D\to D$ 是严格集压缩映象，则 A 在 D 中必有不动点．

系 2 设 D 是 E 中有界凸闭集(D 不一定有内点)，$A:D\to E$ 全连续，$B:D\to E$ 是压缩映象，且$(A+B)(D)\subset D$，则 $A+B$ 在 D 中必具有不动点．

证 由引理 5.3 的系，知 $A+B:D\to D$ 是严格集压缩映象，从而利用系 1 即得系 2．

注 11 系2形式的结论是首先在〔64〕中给出的．另外，上述 Sadovskii 定理显然是 Schauder 不动点定理的推广．

定理 5.8 设 $A:E\to E$ 是凝聚映象．如果集$\{x\mid x\in E, x=\lambda Ax, 0<\lambda<1\}$是有界的，则 A 在 E 中必有不动点．

证 证明类似于定理 3.3 之证，从略．

定理 5.9 设 Ω 是 E 中有界开集，$\theta\in\Omega$．设 $A:\overline{\Omega}\to E$ 是凝聚映象，满足

$$\|Ax-x\|^2\geqslant\|Ax\|^2-\|x\|^2,\quad\forall\, x\in\partial\Omega \qquad (5\cdot60)$$

那末 A 在 $\overline{\Omega}$ 中必具有不动点．

系 1 设 Ω 是 E 中有界开集，$\theta\in\Omega$．设 $A:\overline{\Omega}\to E$ 是凝聚映象，满足

$$\|Ax\| \leqslant \|x\|, \quad \forall x \in \partial\Omega \tag{5·61}$$

则 A 在 $\bar{\Omega}$ 中必具有不动点.

系2 设 Ω 是实 Hilbert 空间 H 中有界开集,$\theta \in \Omega$. 设 A: $\bar{\Omega} \to H$ 是凝聚映象,满足

$$(Ax, x) \leqslant \|x\|^2, \quad \forall x \in \partial\Omega, \tag{5·62}$$

则 A 在 $\bar{\Omega}$ 中必具有不动点.

证 证明类似于定理 3.4 及其系 1 与系 2 之证,从略.

例 5.2 考察非线性积分方程

$$H(t) = 1 + H(t)\int_0^1 \frac{t}{t+s}\psi(s)H(s)\mathrm{d}s \tag{5·63}$$

其中 $H(t)$是未知函数,$\psi(t)$是已知的函数,此方程来源于辐射传输理论(参见〔65〕~〔69〕). 我们证明下述结论:

设 $\psi(t)$在$[0,1]$非负、有界可测,且 $0 < \int_0^1 \psi(t)\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2}$. 那末,方程(5·63)必具有[0.1]上的连续解 $H(t) \geqslant 1$,并且迭代序列

$$\begin{aligned} &h_0(x) \equiv 1, \\ &h_n(t) = 1 + h_{n-1}(t)\int_0^1 \frac{t}{t+s}\psi(s)h_{n-1}(s)\mathrm{d}s, \\ &n = 1, 2, 3, \cdots \end{aligned} \tag{5·64}$$

在$[0,1]$上一致收敛于 $H(t)$.

证 考察线性积分算子

$$Kx(t) = \int_0^1 \frac{t}{t+s}\psi(s)x(s)\mathrm{d}s. \tag{5·65}$$

显然,$K: C_+[0,1] \to C_+[0,1]$,这里 $C_+[0,1] = \{x(t) \mid x(t) \in C[0,1], x(t) \geqslant 0\}$. 由于当 $0 < t_2 < t_1 \leqslant 1$ 时有($x(t) \in C[0,1]$)

$$
\begin{aligned}
&|Kx(t_1)-Kx(t_2)| \\
&\leqslant \|\psi\|_M \|x\|_C \int_0^1 \left|\frac{t_1}{t_1+s}-\frac{t_2}{t_2+s}\right| ds \\
&= \|\psi\|_M \|x\|_C \int_0^1 \left(\frac{t_1}{t_1+s}-\frac{t_2}{t_2+s}\right) ds \\
&= \|\psi\|_M \|x\|_C \left[t_1 \ln\left(1+\frac{1}{t_1}\right)-t_2 \ln\left(1+\frac{1}{t_2}\right)\right],
\end{aligned}
$$

再注意到

$$
\lim_{t\to+0} t\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)=\lim_{s\to+\infty}\frac{\ln(1+s)}{s}=0,
$$

即易知 K 把 $C[0,1]$ 中有界集变成一致有界且等度连续的函数族,故 K 是全连续的．令

$$
\rho = 1-\left(1-2\int_0^1 \psi(t)dt\right)^{\frac{1}{2}}.
$$

显然 $0<\rho\leqslant 1$. 下面证明

$$
\int_0^1 h_n(t)\psi(t)dt \leqslant \rho, \quad (n=0,1,2,\cdots). \tag{5·66}
$$

$n=0$ 时(5·66)式显然成立．设 $n=k$ 时(5·66)式成立,即 $\int_0^1 h_k(t)\psi(t)dt\leqslant\rho$,则注意到(5·64)式知

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 h_{k+1}(t)\psi(t)dt &= \int_0^1 \psi(t)dt \\
&+ \int_0^1\int_0^1 \frac{t}{t+s}\psi(t)h_k(t)\psi(s)h_k(s)dsdt,
\end{aligned} \tag{5·67}
$$

由于

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1\int_0^1 \frac{t}{t+s}\psi(t)h_k(t)\psi(s)h_k(s)dsdt \\
&= \int_0^1\int_0^1 \frac{s}{s+t}\psi(s)h_k(s)\psi(t)h_k(t)dtds
\end{aligned}
$$

故

$$\int_0^1 h_{k+1}(t)\psi(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 \psi(t)\mathrm{d}t$$

$$+ \int_0^1\int_0^1 \frac{s}{t+s}\psi(t)h_k(t)\psi(s)h_k(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t, \qquad (5\cdot 68)$$

将(5·67)式与(5·68)式相加得

$$2\int_0^1 h_{k+1}(t)\psi(t)\mathrm{d}t = 2\int_0^1 \psi(t)\mathrm{d}t + \left(\int_0^1 \psi(t)h_k(t)\mathrm{d}t\right)^2$$

$$\leqslant 2\int_0^1 \psi(t)\mathrm{d}t + \left\{1 - \left(1 - 2\int_0^1 \psi(t)\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}\right\}^2$$

$$= 2\left\{1 - \left(1 - 2\int_0^1 \psi(t)\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}\right\} = 2\rho.$$

故

$$\int_0^1 h_{k+1}(t)\psi(t)\mathrm{d}t \leqslant \rho;$$

于是,根据归纳法知(5·66)式成立．又由归纳法易知

$$1 \equiv h_0(t) \leqslant h_1(t) \leqslant h_2(t) \leqslant \cdots, \quad \forall\, 0 \leqslant t \leqslant 1, \qquad (5\cdot 69)$$

$$h_n(t) \leqslant h_n(t'), \quad \forall\, 0 \leqslant t < t' \leqslant 1. \qquad (5\cdot 70)$$

由(5·69)式及 $\psi(t) \geqslant 0$ 知对任何 $0 < \delta < 1$,有

$$\sup_n \int_0^1 h_n(t)\psi(t)\mathrm{d}t$$

$$= \sup_n \int_0^\delta h_n(t)\psi(t)\mathrm{d}t + \sup_n \int_\delta^1 h_n(t)\psi(t)\mathrm{d}t. \qquad (5\cdot 71)$$

今取 $1 > \delta > 0$,使 $\int_\delta^1 \psi(t)\mathrm{d}t > 0$,从而

$$\beta = \sup_n \int_\delta^1 h_n(t)\psi(t)\mathrm{d}t > 0.$$

注意到(5·66)式与(5·71)式,知

$$\sup_n \| Kh_n \|_C = \sup_n Kh_n(1) = \sup_n \int_0^1 \frac{1}{1+s}\psi(s)h_n(s)\mathrm{d}s$$

$$
\begin{aligned}
&= \sup_n \left(\int_0^{\delta} \frac{1}{1+s} \psi(s) h_n(s) \mathrm{d}s + \int_{\delta}^{1} \frac{1}{1+s} \psi(s) h_n(s) \mathrm{d}s \right) \\
&\leqslant \sup_n \left(\int_0^{\delta} \psi(s) h_n(s) \mathrm{d}s + \frac{1}{1+\delta} \beta \right) \\
&= \sup_n \int_0^1 \psi(s) h_n(s) \mathrm{d}s - \sup_n \int_{\delta}^{1} \psi(s) h_n(s) \mathrm{d}s + \frac{\beta}{1+\delta} \\
&\leqslant \rho - \beta + \frac{\beta}{1+\delta} = \rho - \frac{\beta\delta}{1+\delta} = \eta < \rho \leqslant 1.
\end{aligned} \tag{5·72}
$$

方程(5·63)可写成

$$
x = h_0 + xKx = Ax, \tag{5·73}
$$

其中 $A: C_+[0,1] \to C_+[0,1]$ 连续、有界(为方便计,用 $x(t)$ 代替(5·63)式中的 $H(t)$). 令 $S = \{h_0, h_1, h_2, \cdots\}$. 由(5·69)式与(5·72)式,有

$$
\| h_n \|_C \leqslant \| h_{n+1} \|_C = \| h_0 + h_n K h_n \|_C \leqslant 1 + \eta \| h_n \|_C,
$$

故 $\| h_n \|_C \leqslant \frac{1}{1-\eta}$,因此 S 有界. 注意到 $S = A(S) \cup \{h_0\}$,知

$$
\alpha(S) = \alpha(A(S)). \tag{5·74}
$$

下证

$$
\alpha(A(S)) \leqslant \eta\alpha(S). \tag{5·75}
$$

任给 $\varepsilon > 0$, 由于 $K(S)$ 相对紧,故存在分法 $K(S) = \bigcup_{i=1}^{n} D_j$, $d(D_j) < \varepsilon$ $(j = 1, 2, \cdots, n)$. 又存在分法 $S = \bigcup_{i=1}^{m} S_i$, $d(S_i) < \alpha(S) + \varepsilon$ $(i = 1, 2, \cdots, m)$. 显然 $A(S) \subset \bigcup_{ij} T_{ij}$,这里

$$
T_{ij} = \{ z \mid z = h_0 + xy, \quad x \in S_i, \quad y \in D_j \},
$$

$$
i = 1, 2, \cdots, m, \quad j = 1, 2, \cdots, n.
$$

对 $z = h_0 + xy$, $z' = h_0 + x'y'$, $x, x' \in S_i$, $y, y' \in D_j$, 注意到(5·72)式,有

$$
\| z - z' \|_C = \| xy - x'y' \|_C
$$

$$
\begin{aligned}
&= \|(x-x')y+x'(y-y')\|_C \\
&\leqslant \|x-x'\|_C\|y\|_C+\|x'\|_C\|y-y'\|_C \\
&\leqslant d(S_i)\eta+\frac{1}{1-\eta}d(D_j) \\
&< \eta(\alpha(S)+\varepsilon)+\frac{\varepsilon}{1-\eta},
\end{aligned}
$$

即

$$
d(T_{ij})\leqslant\eta\quad\alpha(S)+\eta\quad\varepsilon+\frac{\varepsilon}{1-\eta},\ i=1,2,\cdots,m,j=1,2,\cdots,n.
$$

故

$$
\alpha(A(S))\leqslant\eta\quad\alpha(S)+\left(\eta+\frac{1}{1-\eta}\right)\varepsilon.
$$

再根据 ε 的任意性,即得(5·75)式.由(5·74)与(5·75)两式,注意到 $\eta<1$ 知 $\alpha(S)=0$,即 S 是相对紧集,从而函数列 $\{h_n(t)\}$ 存在子序列在[0,1]上一致收敛于某连续函数 $H(t)$,再注意到(5·69)式,即知函数列 $\{h_n(t)\}$ 本身也必在[0,1]上一致收敛于 $H(t)$,并且 $H(t)\geqslant 1$.在(5·64)式两端令 $n\to\infty$ 取极限,即知 $H(t)$ 是方程(5·63)的解.证完.

注 12 对形如(5·73)的一般方程,其中 $K:E\to E$ 是线性全连续算子,E 是 Banach 代数,$h_0\in E$.仿上可证:对于 E 中有界集 D,$A:D\to E$ 是 k-集压缩算子,这里 $k=\sup\limits_{x\in D}\|Kx\|$.于是,根据定理 5.7 系 1 可得结论:若 D 是 E 中有界凸闭集,且 $A:D\to D$,$\sup\limits_{x\in D}\|Kx\|<1$,那末方程(5·73)必在 D 中有解(参见〔66〕).

例 5.3 考察 Banach 空间常微分方程的初值问题:

$$
\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=f(t,x),\quad x(0)=x_0,\tag{5·76}
$$

其中 $x_0\in E$,E 是实 Banach 空间.$f:[0,a]\times\overline{T}_r(x_0)\to E$,$a>$

$0. \overline{T}_r(x_0)=\{x \mid x\in E, \|x-x_0\|\leqslant r\}, r>0$. 利用非紧性测度，可以证明下述解的存在性定理：设 $f:[0,a]\times\overline{T}_r(x_0)\to E$ 一致连续且有界．又设存在常数 $L>0$，使

$$\alpha(f(t,S))\leqslant L\alpha(S),\quad \forall t\in[0,a],\quad S\subset\overline{T}_r(x_0),$$

那末，问题(5·76)在$[0,b]$上具有 C^1 解 $x=x(t)$，这里

$$b<\min\left\{a,\frac{r}{M}\right\}, M=\sup_{(t,x)\in[0,a]\times\overline{T}_r(x_0)}\|f(t,x)\|.$$

此存在定理的证明可参看〔70〕，从略．

§6 A－proper 映象的广义拓扑度

我们知道，全连续场 $f=I-A$ 的 Leray－Schauder 度的主要思想是有限维逼近，即用有限维算子来逼近全连续算子，从而利用逼近算子在有限维空间中的 Brouwer 度来定义全连续场的 Leray－Schauder 度．基于有限维逼近这一思想以及某些偏微分方程的需要，可以引入更广一类算子，即 A－proper 算子，并建立它的广义拓扑度概念(参看〔72〕、〔73〕、〔34〕)．

定义 6.1 实 Banach 空间 E 叫做是**投影完备的**，如果它满足下列条件：

(ⅰ)存在 E 的一串有限维子空间 $X_n(n=1,2,\cdots)$，并存在从 E 到 X_n 的投影算子 $Q_n(n=1,2,\cdots)$，即 $Q_n:E\to X_n$ 是线性有界算子，满足 $Q_n(E)=X_n$，且 $Q_n^2=Q_n$；

(ⅱ)对任何 $x\in E$，均有 $Q_nx\to x$(即 $\|Q_nx-x\|\to 0$)，当 $n\to\infty$ 时．

这时，$\Gamma=\{X_n,Q_n\}$ 称为 E 的一个**逼近格式**．

注 1 显然，任何具有可数基的实 Banach 空间(特别地，无

穷维的实可分 Hilbert 空间)都是投影完备的．

注 2 由共鸣定理知：存在常数 $M>0$，使

$$\|Q_n\|\leqslant M \quad (n=1,2,3,\cdots) \tag{6·1}$$

定义 6.2 设实 Banach 空间 E 是投影完备的，$\Gamma=\{X_n,Q_n\}$是E 的一个逼近格式，Ω 是E 中有界开集，映象 $f:\bar{\Omega}\to E$ 连续、有界．令 $\Omega_n=\Omega\cap X_n(n=1,2,\cdots)$．如果对于任何序列 $x_{n_k}\in\bar{\Omega}_{n_k}$(自然数序列 $n_1<n_2<\cdots$, $n_k\to+\infty$)，使得

$$\|Q_{n_k}f(x_{n_k})-Q_{n_k}(y)\|\to 0 \quad (k\to\infty). \tag{6·2}$$

(其中 $y\in E$)，都必有$\{x_{n_k}\}$的收敛子列$\{x_{n_{k_i}}\}$存在，使

$$x_{n_{k_i}}\to x\in\bar{\Omega},\quad f(x)=y, \tag{6·3}$$

则称 f **关于逼近格式 Γ 是 A－proper 的**；当 Γ 固定时，简称 f 是 **A－proper 的**．

以下总假定 Γ 是固定的．

注 3 在 A－proper 映象的定义中，也可以这样说：如果对于任何序列 $x_{n_k}\in\bar{\Omega}_{n_k}$(自然数序列 $n_1<n_2<\cdots$, $n_k\to+\infty$)，使得

$$\|Q_{n_k}f(x_{n_k})-y\|\to 0 \quad (k\to\infty), \tag{6·4}$$

(其中 $y\in E$)，都必有$\{x_{n_k}\}$的收敛子列$\{x_{n_{k_i}}\}$存在．

事实上，由于 $Q_{n_k}y\to y$，故(6·2)式与(6·4)式是等价的．另外，设 $x_{n_{k_i}}\to x$，显然 $x\in\bar{\Omega}$．由(6·1)式并注意到 f 的连续性，知

$$\|Q_{n_k}f(x_{n_k})-Q_{n_k}f(x)\|\leqslant M\|f(x_{n_k})-f(x)\|\to 0,$$

注意到(6·4)式，即得 $f(x)=y$，故(6·3)式成立．

定义 6.3 设实 Banach 空间 E 是投影完备的，Ω 是E 中有界开集，$f:\bar{\Omega}\to E$ 是 A－proper 映象，$p\in E\setminus f(\partial\Omega)$．用 Z 表

整数集，$Z^* = Z \cup \{-\infty, +\infty\}$. 我们定义**广义拓扑度** $\mathrm{Deg}(f, \Omega, p)$ 为：

$\mathrm{Deg}(f, \Omega, p) = \{\gamma \in Z^* \mid$ 存在 $\{n\}$ 的子列 $\{n_k\}$，使 $\deg(Q_{n_k}f, \Omega_{n_k}, Q_{n_k}(p)) \to \gamma\}$.

上式中的 $\deg(Q_nf, \Omega_n, Q_n(p))$ 是有限维空间 X_n 中的连续映象 $Q_nf: \bar{\Omega}_n \to X_n$ 的 Brouwer 度．易知，当 n 充分大时（$n > N$），必有 $Q_n(p) \overline{\in} Q_nf(\partial \Omega_n)$（若不然，则存在 $x_{n_k} \in \partial \Omega_{n_k} \subset \partial \Omega$，使 $Q_{n_k}f(x_{n_k}) = Q_{n_k}(p)$，从而，根据 f 的 A－proper 性知，存在 $\{x_{n_k}\}$ 的子列 $x_{n_{k_i}} \to x \in \partial \Omega$，$f(x) = p$，此与 $p \overline{\in} f(\partial \Omega)$ 矛盾），从而当 $n > N$ 时，$\deg(Q_nf, \Omega_n, Q_n(p))$ 有意义，所以，$\mathrm{Deg}(f, \Omega, p)$ 是 Z^* 的一个非空子集．

定理 6.1 设 E 是投影完备的．若 $f = I - F$ 是全连续场（即 $F: \bar{\Omega} \to E$ 全连续），则 f 必是 A－proper 映射，并且

$$\mathrm{Deg}(f, \Omega, p) = \{\deg_{LS}(f, \Omega, p)\}. \tag{6·5}$$

证 设(6·4)式满足，即

$$\left\| x_{n_k} - Q_{n_k}F(x_{n_k}) - y \right\| \to 0 \quad (k \to \infty). \tag{6·6}$$

由于 F 全连续，$x_{n_k} \in \bar{\Omega}_{n_k} \subset \bar{\Omega}$，故存在子列 $\{x_{n_{k_i}}\}$，使 $F(x_{n_{k_i}}) \to y_0 \in E$. 于是，注意到(6·6)式及(6·1)式，知

$$\begin{aligned} \left\| x_{n_{k_i}} - (y + y_0) \right\| &\leqslant \left\| x_{n_{k_i}} - Q_{n_{k_i}}F(x_{n_{k_i}}) - y \right\| \\ &\quad + \left\| Q_{n_{k_i}}(F(x_{n_{k_i}}) - y_0) \right\| + \left\| Q_{n_{k_i}}(y_0) - y_0 \right\| \\ &\leqslant \left\| x_{n_{k_i}} - Q_{n_{k_i}}F(x_{n_{k_i}}) - y \right\| + M \cdot \left\| F(x_{n_{k_i}}) - y_0 \right\| \\ &\quad + \left\| Q_{n_{k_i}}(y_0) - y_0 \right\| \to 0, \end{aligned}$$

故 $x_{n_{k_i}}$ 收敛于 $y + y_0$. 于是，f 是 A－proper 映象．

下证(6·5)式．令 $\tau = d(p, f(\partial \Omega)) > 0$. 今证必有 $N_1 > 0$

存在，使

$$\| Q_n F(x) - F(x) \| < \tau, \quad \forall x \in \bar{\Omega}, \quad n > N_1. \qquad (6\cdot7)$$

事实上，若此结论不成立，则存在$\{n\}$的子列$\{n_j\}$及$x_{n_j} \in \bar{\Omega}$，使

$$\| Q_{n_j} F(x_{n_j}) - F(x_{n_j}) \| \geqslant \tau \quad (j = 1, 2, \cdots), \qquad (6\cdot8)$$

由 F 的全连续性知$F(x_{n_j})$具有收敛子列，为简化记号，不妨设就是 $F(x_{n_j})$本身：$F(x_{n_j}) \to z_0$. 于是

$$\| Q_{n_j} F(x_{n_j}) - F(x_{n_j}) \| \leqslant M \| F(x_{n_j}) - y_0 \|$$
$$+ \| Q_{n_j} y_0 - y_0 \| + \| y_0 - F(x_{n_j}) \| \to 0,$$

此与(6·8)式矛盾．故(6·7)式成立．

用 $X^{(n+1)}$表 X_n 与 p 张成的有限维空间，又令 $\Omega^{(n+1)} = \Omega \cap X^{(n+1)}$. 于是，由(6·7)式，根据 Leray－Schauder 度的定义，知

$$\deg_{LS}(f, \Omega, p) = \deg(I - Q_n F, \Omega^{(n+1)}, p), \quad \forall n > N_1. \qquad (6\cdot9)$$

但另一方面，根据简化定理(第二章，定理 1.17)知，存在 $N_2 > 0$，使

$$\begin{aligned} &\deg(I - Q_n F, \Omega^{(n+1)}, Q_n(p)) \\ &= \deg(I - Q_n F, \Omega_n, Q_n(p)) \\ &= \deg(Q_n f, \Omega_n, Q_n(p)), \quad \forall n > N_2. \end{aligned} \qquad (6\cdot10)$$

又

$$\begin{aligned} &\deg(I - Q_n F, \Omega^{(n+1)}, Q_n(p)) \\ &= \deg(I - Q_n F + p - Q_n(p), \Omega^{(n+1)}, p), \\ &\qquad n > N_2. \end{aligned} \qquad (6\cdot11)$$

下证，必存在 $N_3 > 0$，使

$$(I - Q_n F)x + t(p - Q_n(p)) \neq p, \quad \forall n > N_3,$$
$$0 \leqslant t \leqslant 1, \quad x \in \partial\Omega^{(n+1)}. \qquad (6\cdot12)$$

事实上，若不然，存在 $\{n\}$ 的子列 $\{n_i\}$，$t_{n_i}\in[0,1]$，$x_{n_i}\in\partial\Omega^{(n_i+1)}\subset\partial\Omega$，使

$$(I-Q_{n_i}F)x_{n_i}+t_{n_i}(p-Q_{n_i}(p))=p \quad (i=1,2,\cdots) \tag{6·13}$$

不妨设 $F(x_{n_i})\to v_0$，(否则，取某子列即可)．由(6·13)式知

$$x_{n_i}=Q_{n_i}(F(x_{n_i})-v_0)+Q_{n_i}v_0-t_{n_i}(p-Q_{n_i}(p))$$
$$+p\to v_0+p=x_0\in\partial\Omega,$$

在(6·13)两端取极限，得 $(I-F)x_0=p$，此与 $p\overline{\in}f(\partial\Omega)$ 矛盾．因此(6·12)式成立．

由(6·12)式，根据 Brouwer 度的同伦不变性，知

$$\deg(I-Q_nF+p-Q_n(p),\Omega^{(n+1)},p)$$
$$=\deg(I-Q_nF,\Omega^{(n+1)},p),\quad \forall n>N_3. \tag{6·14}$$

令 $N=\max\{N_1,N_2,N_3\}$．于是，由(6·9)、(6·10)、(6·11)、(6·14)诸式，得

$$\deg_{LS}(f,\Omega,p)=\deg(Q_nf,Q_n,Q_n(p)),\quad \forall n>N. \tag{6·15}$$

由(6·15)式，根据 A－proper 映象广义拓扑度的定义，即知(6·5)式成立．证完．

注 4 定理6.1说明，A－proper 映象是全连续场的一种推广，其广义拓扑度是 Leray－Schauder 度的一种推广．

定理 6.2 A－proper 映射的广义拓扑度 $\mathrm{Deg}(f,\Omega,p)$ 具有下列性质：

(ⅰ)可解性：若 $\mathrm{Deg}(f,\Omega,p)\neq\{0\}$，则方程 $f(x)=p$ 在 Ω 内有解；

(ⅱ)同伦不变性：设 $H:[0,1]\times\bar{\Omega}\to F$ 连续，并且对每个固定的 $t\in[0,1]$，$H(t,\cdot):\bar{\Omega}\to E$ 是 A－proper 映象．又设 $H(t,x)$ 对于 t 在任何点 $t_0\in[0,1]$ 的连续性关于 $x\in\bar{\Omega}$ 是一致的，即

$$\lim_{t\to t_0}(\sup_{x\in\bar{\Omega}}\|H(t,x)-H(t_0,x)\|)=0. \qquad (6\cdot16)$$

此外,设 $p\overline{\in} h_t(\partial\Omega)$, $0\leqslant t\leqslant1$, 这里 $h_t(x)=H(t,x)$. 那末 $\mathrm{Deg}(h_t,\Omega,p)$, 不随 t 而变,即

$$\mathrm{Deg}(h_t,\Omega,p)=\mathrm{Deg}(h_0,\Omega,p),\quad \forall\, 0\leqslant t\leqslant1; \quad (6\cdot17)$$

(iii)切除性:设 Ω_0 是 Ω 的开子集,且 $p\overline{\in} f(\bar{\Omega}\setminus\Omega_0)$,则

$$\mathrm{Deg}(f,\Omega,p)=\mathrm{Deg}(f,\Omega_0,p); \qquad (6\cdot18)$$

(iv)广义可加性:设 $\Omega^{(1)},\Omega^{(2)}$是 Ω 的两个互不相交的开子集,且 $p\overline{\in} f(\bar{\Omega}\setminus(\Omega^{(1)}\cup\Omega^{(2)}))$,则

$$\mathrm{Deg}(f,\Omega,p)\subset\mathrm{Deg}(f,\Omega^{(1)},p)+\mathrm{Deg}(f,\Omega^{(2)},p); \quad (6\cdot19)$$

当 $\mathrm{Deg}(f,\Omega^{(1)},p)$, $\mathrm{Deg}(f,\Omega^{(2)},p)$中至少有一个是单元素集时,必有等号成立:

$$\mathrm{Deg}(f,\Omega,p)=\mathrm{Deg}(f,\Omega^{(1)},p)+\mathrm{Deg}(f,\Omega^{(2)},p). \qquad (6\cdot20)$$

证 (i)由于 $\mathrm{Deg}(f,\Omega,p)\neq\{0\}$,故必存在$\{n\}$的子列$\{n_k\}$,使

$$\deg(Q_{n_k}f,\Omega_{n_k},Q_{n_k}(p))\neq0 \quad (k=1,2,\cdots),$$

于是,存在 $x_{n_k}\in\Omega_{n_k}\subset\Omega$,使

$$Q_{n_k}f(x_{n_k})=Q_{n_k}(p) \quad (k=1,2,\cdots).$$

根据 f 的 A-proper 性知,$\{x_{n_k}\}$有收敛子列 $x_{n_{k_i}}\to x_0\in\bar{\Omega}$, $f(x_0)=p$,由于已假定了 $p\overline{\in} f(\partial\Omega)$,故 $x_0\in\Omega$.

(ii)任给 $t_0\in[0,1]$,下证必存在 $\delta_0>0$,使得对于任何 $0<|t-t_0|<\delta_0$,恒有 $N(t)>0$ 存在,使

$$Q_n(p)\overline{\in} Q_nh_s(\partial\Omega_n),\quad \forall\, s\in[t_0,t],\quad n>N(t). \quad (6\cdot21)$$

事实上,若不然,则存在 $t_{n_k}\to t_0$ ($t_{n_k}\neq t_0$), $s_{n_k}\in[t_0,t_{n_k}]$ ($\{n_k\}$是$\{n\}$的某子列),使

$$Q_{n_k}(p) \in Q_{n_k} h_{s_{n_k}}(\partial \Omega_{n_k}) \quad (k=1,2,\cdots),$$

从而，存在 $x_{n_k} \in \partial \Omega_{n_k} \subset \partial \Omega$，使

$$Q_{n_k} h_{s_{n_k}}(x_{n_k}) = Q_{n_k}(p) \quad (k=1,2,\cdots). \qquad (6\cdot 22)$$

由(6·22)式，(6·16)式及(6·1)式，知

$$\left\| Q_{n_k} h_{t_0}(x_{n_k}) - Q_{n_k}(p) \right\| = \left\| Q_{n_k}(h_{t_0}(x_{n_k}) - h_{s_{n_k}}(x_{n_k})) \right\|$$
$$\leqslant M \cdot (\sup_{x \in \bar{\Omega}} \left\| H(t_0, x) - H(s_{n_k}, x) \right\|) \to 0 \quad (k \to \infty),$$

从而，根据 h_{t_0} 的 A－proper 性知，存在 $\{x_{n_k}\}$ 的子列 $x_{n_{k_i}} \to x_0 \in \partial \Omega$，使 $h_{t_0}(x_0) = p$，此与假定 $p \overline{\in} h_{t_0}(\partial \Omega)$ 矛盾．于是，(6·21)式成立．

由(6·21)式，根据 Brouwer 度的同伦不变性，可得

$$\deg(Q_n h_t, \Omega_n, Q_n(p)) = \deg(Q_n h_{t_0}, \Omega_n, Q_n(p)),$$
$$\forall n > N(t),$$

由此可知

$$\mathrm{Deg}(h_t, \Omega, p) = \mathrm{Deg}(h_{t_0}, \Omega, p), \quad \forall 0 < |t - t_0| < \delta_0, \qquad (6\cdot 23)$$

于是证明了：对于任何 $t_0 \in [0,1]$，都存在 t_0 的某邻域 $N(t_0, \delta_0) = \{t \in [0,1] \mid |t - t_0| < \delta_0\}$，使当 $t \in N(t_0, \delta)$ 时，$\mathrm{Deg}(h_t, \Omega, p)$ 保持不变．由此，再利用有限覆盖定理，即知当 $t \in [0,1]$ 时，$\mathrm{Deg}(h_t, \Omega, p)$ 都保持不变．

(iii)令 $\Omega_n^{(0)} = \Omega_0 \cap X_n$，今证必存在 $N > 0$，使

$$Q_n(p) \overline{\in} Q_n f(\bar{\Omega}_n \setminus \Omega_n^{(0)}), \quad \forall n > N. \qquad (6\cdot 24)$$

事实上，若不然，则存在 $\{n\}$ 的子列 $\{n_k\}$，$x_{n_k} \in \bar{\Omega}_{n_k} \setminus \Omega_{n_k}^{(1)} \subset \bar{\Omega} \setminus \Omega_0$，使

$$Q_{n_k} f(x_{n_k}) = Q_{n_k}(p), \quad (k=1,2,\cdots). \qquad (6\cdot 25)$$

于是，根据 f 的 A－proper 性知，$\{x_{n_k}\}$有收敛子列 $x_{n_{k_i}} \to x_0$，$f(x_0)=p$．由于 $\bar{\Omega} \setminus \Omega_0$ 是闭集，$x_0 \in \bar{\Omega} \setminus \Omega_0$ 此与假设 $p \overline{\in} f(\Omega \setminus \Omega_0)$矛盾．故(6·24)式成立．

由(6·24)式知

$$\deg(Q_n f, \Omega_n, Q_n(p)) = \deg(Q_n f, \Omega_n^{(0)}, Q_n(p)), \quad \forall\, n > N.$$

从而，即知(6·18)式成立．

(ⅳ)令 $\Omega_n^{(1)} = \Omega^{(1)} \cap X_n$，$\Omega_n^{(2)} = \Omega^{(2)} \cap X_n$，则 $\Omega_n^{(1)}$，$\Omega_n^{(2)}$ 是 $\Omega_n = \Omega \cap X$ 的两个互不相交的(X_n 中的)开子集．下证，必存在 $N>0$，使

$$Q_n(p) \overline{\in} Q_n f(\bar{\Omega}_n \setminus (\Omega_n^{(1)} \cup \Omega_n^{(2)})), \quad \forall\, n > N. \tag{6·26}$$

事实上，若不然，则存在$\{n\}$的子列$\{n_k\}$，$x_{n_k} \in \bar{\Omega}_{n_k} \setminus (\Omega_{n_k}^{(1)} \cup \Omega_{n_k}^{(2)}) \subset \bar{\Omega} \setminus (\Omega^{(1)} \cup \Omega^{(2)})$，使

$$Q_{n_k} f(x_{n_k}) = Q_{n_k}(p), \quad (k = 1, 2, \cdots).$$

于是，根据 A－proper 性知，$\{x_{n_k}\}$有收敛子列 $x_{n_{k_i}} \to x_0$，$f(x_0) = p$．由于 $\bar{\Omega} \setminus (\Omega^{(1)} \cup \Omega^{(2)})$是闭集，$x_0 \in \bar{\Omega} \setminus (\Omega^{(1)} \cup \Omega^{(2)})$，此与 $p \overline{\in} f(\bar{\Omega} \setminus (\Omega^{(1)} \cup \Omega^{(2)}))$矛盾，故(6·26)式成立．

由(6·26)式知

$$\begin{aligned} \deg(Q_n f, \Omega_n, Q_n(p)) &= \deg(Q_n f, \Omega_n^{(1)}, Q_n(p)) \\ &\quad + \deg(Q_n f, \Omega_n^{(2)}, Q_n(p)), \quad \forall\, n > N. \end{aligned} \tag{6·27}$$

任给 $\gamma \in \mathrm{Deg}(f, \Omega, p)$，则存在$\{n\}$的子列$\{n_k\}$，使

$$\deg(Q_{n_k} f, \Omega_{n_k}, Q_{n_k}(p)) \to \gamma. \tag{6·28}$$

显然，存在$\{n_k\}$的子列$\{n_{k_i}\}$，使

$$\deg(Q_{n_{k_i}} f, \Omega_{n_{k_i}}^{(1)}, Q_{n_{k_i}}(p)) \to \gamma_1 \in \mathrm{Deg}(f, \Omega^{(1)}, p). \tag{6·29}$$

又显然存在$\{n_{k_i}\}$的子列(为简化符号，不妨设是$\{n_{k_i}\}$本身)，使

$$\deg(Q_{n_{k_i}}f,\Omega_{n_{k_i}}^{(2)},Q_{n_{k_i}}(p))\to\gamma_2\in\mathrm{Deg}(f,\Omega^{(2)},p).\quad(6\cdot30)$$

由(6·27)、(6·28)、(6·29)、(6·30)诸式,得

$$\gamma=\gamma_1+\gamma_2\in\mathrm{Deg}(f,\Omega^{(1)},p)+\mathrm{Deg}(f,\Omega^{(2)},p),$$

(注意,由于 γ_1,γ_2 都可能是 $\pm\infty$,故这里应规定 $(+\infty)+(-\infty)$ 和 $(-\infty)+(+\infty)$ 都可以等于任何 $\gamma\in z^*$),再根据 $\gamma\in\mathrm{Deg}(f,\Omega,p)$ 的任意性,即得(6·19)式.

另外,设 $\mathrm{Deg}(f,\Omega^{(1)},p)$ 与 $\mathrm{Deg}(f,\Omega^{(2)},p)$ 中至少有一个是单元素集,例如,设 $\mathrm{Deg}(f,\Omega^{(1)},p)=\{a\}$,则显然

$$\deg(Q_nf,\Omega_n^{(1)},Q_n(p))\to a\quad(n\to\infty).\qquad(6\cdot31)$$

这时,若 $\gamma\in\mathrm{Deg}(f,\Omega^{(1)},p)+\mathrm{Deg}(f,\Omega^{(2)},p)$,则 $\gamma=a+\gamma_2$,且存在 $\{n\}$ 的子列 $\{n_j\}$,使

$$\deg(Q_{n_j}f,\Omega_{n_j}^{(2)},Q_{n_j}(p))\to\gamma_2\quad(j\to\infty)\qquad(6\cdot32)$$

于是,由(6·27)、(6·31)、(6·32)三式知

$$\deg(Q_{n_j}f,\Omega_{n_j},Q_{n_j}(P))\to a+\gamma_2=\gamma,$$

故 $\gamma\in\mathrm{Deg}(f,\Omega,p)$.由此可知

$$\mathrm{Deg}(f,\Omega^{(1)},p)+\mathrm{Deg}(f,\Omega^{(2)},p)\subset\mathrm{Deg}(f,\Omega,p).\qquad(6\cdot33)$$

由(6·19)式与(6·33)式即得(6·20)式.证完.

注 5 显然,(6·18)式也可直接从(6·20)式推出(在(6·20)式中,令 $\Omega^{(1)}=\varnothing,\Omega^{(2)}=\Omega_0$,这时 $\mathrm{Deg}(f,\Omega^{(1)},p)$ 是单元素集 $\{0\}$).

定义 6.4 设实 Banach 空间 E 是投影完备的,Ω 是 E 中有界开集,$f:\bar{\Omega}\to E$.

(ⅰ)如果对任何 $\lambda\geqslant0$,映象 $f+\lambda I:\bar{\Omega}\to E$ 都是 A - proper 的,则称 f 是 $\boldsymbol{P_*}$ **-紧映象**;

(ⅱ)给定 $\gamma>0$.如果对任何 $\lambda\geqslant\gamma$,映象 $f-\lambda I:\bar{\Omega}\to E$ 都

是 A－proper 的，则称 f 是 **P_γ－紧映象**．

注 6　由于 A－proper 映象是连续、有界的，故显然 P_*－紧映象和 P_γ－紧映象都是连续、有界的．

注 7　根据 A－proper 映象的定义易知若 $f:\bar{\Omega}\to E$ 是 A－proper 映象，则对任何 $\mu\neq 0$，$\mu f:\bar{\Omega}\to E$ 也是 A－proper 映象．于是可得下列两结论：

ⅰ）若 $f=I-F:\bar{\Omega}\to E$ 是全连续场，则 f 是 P_*－紧映象（事实上，对任何 $\lambda\geqslant 0$，由定理 6.1 知 $f+\lambda I=(1+\lambda)\left(I-\dfrac{1}{1+\lambda}F\right)$ 是 A－proper 映象）；

ⅱ）若 $F:\bar{\Omega}\to E$ 是全连续算子，则对任何 $\gamma>0$，F 是 P_γ－紧映象（事实上，由定理 6.1 知，对任何 $\lambda\geqslant\gamma$，$F-\lambda I=-\lambda\left(I-\dfrac{1}{\lambda}F\right)$ 是 A－proper 映象）．

定理 6.3　设 $f:\bar{\Omega}\to E$ 是 P_*－紧映象，又设

$$f(x)+\lambda x\neq\theta,\quad \forall\, x\in\partial\Omega,\quad \lambda\geqslant 0. \tag{6·34}$$

那末，必有 $x^*\in\Omega$ 存在，使 $f(x^*)=\theta$.

证　令

$$h_t(x)=H(t,x)=(1-t)f(x)+tx,\quad \forall\, t\in[0,1],\quad x\in\bar{\Omega}.$$

显然，$H:[0,1]\times\bar{\Omega}\to E$ 连续；对固定的 $t\in[0,1)$，$h_t=(1-t)f+tI=(1-t)\left(f+\dfrac{t}{1-t}I\right)$，由于 $\dfrac{t}{1-t}\geqslant 0$，根据 f 的 P_*－紧性，即知：$h_t:\bar{\Omega}\to E$ 是 A－proper 的；又根据定理 6.1 知，$h_1=I$ 是 A－proper 的．另外，显然对 $t,t_0\in[0,1]$，$x\in\bar{\Omega}$，有

$$\|H(t,x)-H(t_0,x)\|\leqslant(M+M_0)\,|t-t_0|,$$

其中 $M=\sup\limits_{x\in\bar{\Omega}}\|f(x)\|$，$M_0=\sup\limits_{x\in\bar{\Omega}}\|x\|$，故(6·16)式成立．下证 $\theta\,\overline{\in}\,h_t(\partial\Omega)(0\leqslant t\leqslant 1)$．用反证法，假定存在 $x_0\in\partial\Omega$，$0\leqslant t_0\leqslant 1$，

使 $h_{t_0}(x_0)=\theta$，即 $(1-t_0)f(x_0)+t_0x_0=\theta$，则 $t_0\neq 1$（因为 $x_0\neq\theta$），$f(x_0)+\lambda_0x_0=\theta$，$\lambda_0=\dfrac{t_0}{1-t_0}\geqslant 0$，此与假定(6·34)式矛盾．于是根据同伦不变性（定理 6.2(ii)）及(6·5)式，得知

$$\mathrm{Deg}(f,\Omega,\theta)=\mathrm{Deg}(h_0,\Omega,\theta)=\mathrm{Deg}(h_1,\Omega,\theta)$$
$$=\mathrm{Deg}(I,\Omega,\theta)=\{\deg_{LS}(I,\Omega,\theta)\}=\{1\}\neq\{0\},$$

从而，根据可解性即知，存在 $x^*\in\Omega$，使 $f(x^*)=\theta$．证完．

注 8 在定理 6.3 的条件下，已证

$$\mathrm{Deg}(f,\Omega,\theta)=\{1\}, \tag{6·35}$$

定理 6.4 设 $F:\bar{\Omega}\to E$ 是 P_1－紧映象，$\theta\in\Omega$．又设

$$F(x)\neq\mu x,\quad \forall x\in\partial\Omega,\quad \mu\geqslant 1. \tag{6·36}$$

那末，F 在 Ω 中必有不动点，即存在 $x^*\in\Omega$，使 $F(x^*)=x^*$．

证 令 $f=I-F$，由于 F 是 P_1－紧的，故对任何 $\lambda\geqslant 0$，$f+\lambda I=-(F-(1+\lambda)I)$ 是 A－proper 映象，因此，f 是 P_*－紧的．另外，由(6·36)式知：对于 $x\in\partial\Omega$，$\lambda\geqslant 0$，有

$$f(x)+\lambda x=(1+\lambda)x-F(x)\neq\theta,$$

故(6·34)式满足．根据定理 6.3 知，存在 $x^*\in\Omega$，使 $f(x^*)=\theta$，即 $F(x^*)=x^*$．证完．

注 9 由(6·35)式知，在定理 6.4 的条件下，必有

$$\mathrm{Deg}(I-F,\Omega,\theta)=\{1\}. \tag{6·37}$$

定理 6.5 设 $F:\bar{\Omega}\to E$ 是 P_1－紧映象，$\theta\in\Omega$，并且

$$\|F(x)-x\|^2\geqslant\|F(x)\|^2-\|x\|^2,\quad \forall x\in\partial\Omega, \tag{6·38}$$

那末，F 在 $\bar{\Omega}$ 中必有不动点．

证 可设 F 在 $\partial\Omega$ 上没有不动点（否则，定理已获证）．下证(6·36)式必成立．事实上，如果存在 $x_0\in\partial\Omega$，$\mu_0\geqslant 1$，使 $F(x_0)=\mu_0x_0$，则 $\mu_0>1$（因为 $F(x_0)\neq x_0$），$\|x_0\|>0$（因为 $\theta\in$

Ω，故 $x_0 \neq \theta$），从而

$$\| F(x_0) - x_0 \|^2 = (\mu_0^2 - 2\mu_0 + 1) \| x_0 \|^2$$
$$< (\mu_0^2 - 1) \| x_0 \|^2 = \| F(x_0) \|^2 - \| x_0 \|^2,$$

此与(6·38)式矛盾．故(6·36)式成立．根据定理 6.4，即知 F 在 Ω 内具有不动点．证完．

系 1 设 $F: \bar{\Omega} \to E$ 是 P_1－紧映象，$\theta \in \Omega$，并且

$$\| F(x) \| \leqslant \| x \|, \quad \forall x \in \partial\Omega, \tag{6·39}$$

那末，F 在 $\bar{\Omega}$ 中必有不动点．

证 显然，当(6·39)式满足时，(6·38)式必满足．证完．

系 2 设 Ω 是无穷维实可分 Hilbert 空间 H 中的有界开集，$\theta \in \Omega$，$F: \bar{\Omega} \to H$ 是 P_1－紧映象，满足

$$(F(x), x) \leqslant \| x \|^2, \quad \forall x \in \partial\Omega, \tag{6·40}$$

那末，F 在 $\bar{\Omega}$ 中必有不动点．

证 易知，从(6·40)式可推出(6·38)式：

$$\| F(x) - x \|^2 = (F(x) - x, F(x) - x)$$
$$= \| F(x) \|^2 - 2(F(x), x) + \| x \|^2$$
$$\geqslant \| F(x) \|^2 - 2\| x \|^2 + \| x \|^2$$
$$= \| F(x) \|^2 - \| x \|^2$$

证完．

注 10 由注 7 ii）知，定理 6.5 是关于全连续映象不动点的 Altman 定理（第二章定理 3.4）在 P_1－紧映象上的推广．

定理 6.6 设 $F: \bar{\Omega} \to E$ 是 P_1－紧映象，$\bar{\Omega}$ 是凸的，并且 $F(\partial\Omega) \subset \bar{\Omega}$，那末，$F$ 在 $\bar{\Omega}$ 上必具有不动点．

证 不失一般性，设 $\theta \in \Omega$（否则取 $x_0 \in \Omega$，在有界开集 $\Omega_0 = \{x \in E \mid x + x_0 \in \Omega\}$ 的闭包 $\bar{\Omega}_0$ 上考察映象 $F_0(x) = F(x +$

$x_0) - x_0$ 即可．这时，$\theta \in \Omega_0$，$F_0 : \bar{\Omega}_0 \to E$ 是 P_1－紧的，$F_0(\partial \Omega_0) \subset \bar{\Omega}_0$．由 F_0 在 $\bar{\Omega}_0$ 中的不动点 x^*，即得 F 在 $\bar{\Omega}$ 中的不动点 $x^* + x_0$)．

设 F 在$\partial\Omega$ 上无不动点(否则，定理已获证)．下证(6·36)式必满足．事实上，若存在 $x_1 \in \partial\Omega$，$\mu_1 \geqslant 1$，使 $F(x_1) = \mu_1 x_1$，则 $\mu_1 > 1$．令 $x_2 = \mu_1 x_1 = F(x_1)$，则由 $F(\partial\Omega) \subset \bar{\Omega}$，知 $x_2 \in \bar{\Omega}$，且 $x_1 = t_1 x_2$，$t_1 = \dfrac{1}{\mu_1}$，$0 < t_1 < 1$．因 $\theta \in \Omega$，故存在 $r > 0$，使 $T(\theta, r) = \{x \in E \mid \|x\| < r\} \subset \Omega$．又因 $x_2 \in \bar{\Omega}$，故存在 $z_2 \in \Omega$，满足$\|z_2 - x_2\| < \dfrac{(1 - t_1) r}{t_1}$．易知

$$T(t_1 z_2, (1 - t_1) r) = \{x \in E \mid \|x - t_1 z_2\| < (1 - t_1) r\} \subset \Omega$$

(事实上，若 $x \in T(t_1 z_2, (1 - t_1) r)$，则 $x = t_1 z_2 + (1 - t_1) z$，其中$\|z\| < r$，故 $z \in T(\theta, r) \subset \Omega$，再由 Ω 的凸性，知 $x = t_1 z_2 + (1 - t_1) z \in \Omega$)．由于 $x_1 = t_1 x_2 = t_1 z_2 + t_1(x_2 - z_2)$，而 $\|t_1(x_2 - z_2)\| < (1 - t_1) r$，故 $t_1 z_2 + t_1(x_2 - z_2) \in T(t_1 z_2, (1 - t_1) r) \subset \Omega$，从而 $x_1 \in \Omega$，此与 $x_1 \in \partial\Omega$ 矛盾．因此，(6·36)式成立．

于是，根据定理 6.4，即知 F 在Ω 中具有不动点．证完．

注 11 由注 7 ii)知：定理 6.6 是关于全连续映象不动点的 Rothe 定理(第二章定理 3.1)在 P_1－紧映象上的推广．

应当指出，定义 6.1 所述的逼近格式是一种特殊的(但是常用的)逼近格式，从而定义 6.2 引入的 A－proper 映象是一种特殊的(但是常用的)A－proper 映象．我们可以引入一般的逼近格式，A－proper 映象及它的广义拓扑度，如下：

设 E，E_1 是两个实 Banach 空间，所谓从 E 到 E_1 的映象的

逼近格式 $\Gamma=\{X_n, Y_n, P_n, Q_n\}$ 指的是：$\{X_n\}$，$\{Y_n\}$ 是两串定向有限维空间，且 $\dim X_n=\dim Y_n (n=1,2,\cdots)$；$P_n: X_n\to X$，$Q_n: Y\to Y_n$ 都是连续映象．

设 Ω 是 E 中开集，$f:\bar{\Omega}\to E_1$ 连续．令 $\Omega_n=P_n^{-1}(\Omega)(n=1,2,\cdots)$．如果从 $x_{n_k}\in\Omega_{n_k}$（$\{n_k\}$ 表 $\{n\}$ 的某子列）满足

$$\|Q_{n_k}fP_{n_k}(x_{n_k})-Q_{n_k}(y)\|\to 0 \quad (k\to\infty)$$

（其中 $y\in E_1$），能推出 $\{x_{n_k}\}$ 必有子列 $\{x_{n_{k_i}}\}$，使 $P_{n_{k_i}}x_{n_{k_i}}\to x\in\bar{\Omega}$ 且 $f(x)=y$，则称 f 是关于 Γ 的 **A－proper 映象**．

设 $f:\bar{\Omega}\to E$ 是关于 Γ 的 A－proper 映象．$p\in E_1\setminus f(\partial\Omega)$．又设当 n 充分大时 Ω_n 是有界的．则定义**广义拓扑度** $\mathrm{Deg}(f,\Omega,p)$ 如下：

$$\mathrm{Deg}(f,\Omega,p)=\{\gamma\in Z^*\mid \text{存在}\{n\}\text{的子列}\{n_k\}\text{，使}\ \deg(Q_{n_k}fP_{n_k},\Omega_{n_k},Q_{n_k}(p))\to\gamma\},$$

其中 $Z^*=Z\cup\{-\infty,+\infty\}$，$Z$ 表整数集，$\deg(Q_{n_k}fP_{n_k},\Omega_{n_k},Q_{n_k}(p))$ 表相同维数的定向有限维空间 X_{n_k} 与 Y_{n_k} 间连续映象 $Q_{n_k}fp_{n_k}:\bar{\Omega}_{n_k}\to Y_{n_k}$ 的拓扑度．

在一定的条件下，可以证明 $\mathrm{Deg}(f,\Omega,p)$ 具有定理 6.2 所述的诸性质，并可证明若干不动点定理（参看〔72〕，〔73〕，〔34〕）．

很明显，在定义 6.1 中引入的逼近格式 $\Gamma=\{X_n,Q_n\}$ 是一种特殊的逼近格式，即 $E_1=E$，$X_n=Y_n\subset E$，$P_n=I$，Q_n 是从 E 到 X_n 的投影算子，且满足 $\|Q_nx-x\|\to 0(n\to\infty)$，$\forall x\in E$．

最后指出，还可引入其他一些类型映象（单值的或集值的）的（广义）拓扑度．例如，利用全连续场的 Leray－Schauder 度，可定义集值映象串的不动点指数以及相应场的拓扑度，并应用

于带间断非线性项的椭圆型方程(参看〔71〕);利用 A－proper 映象的广义拓扑度,又可引入实可分 Hilbert 空间中连续单调映象的拓扑度,多值极大单调映象的拓扑度以及极大单调映象与广义伪单调映象之和的拓扑度,并可由此获得相应的满射性定理(参看〔74〕,〔75〕,〔154〕).

第三章 非线性算子方程的正解

本章利用实 Banach 空间中的锥理论并结合不动点指数理论来讨论非线性算子方程

$$x = Ax$$

的正解;同时,作为例子给出了对于非线性积分方程及非线性微分方程的若干应用.

§1 锥和半序

定义 1.1 设 E 是实 Banach 空间,如果 P 是 E 中某非空凸闭集,并且满足下面两个条件:

(ⅰ) $x\in P, \lambda\geqslant 0 \Rightarrow \lambda x\in P$;

(ⅱ) $x\in P, -x\in P\Rightarrow x=\theta$, θ 表 E 中零元素;则称 P 是 E 中一个**锥**.

用 P° 表 P 的内点集;如果 $P^{\circ}\neq\phi$,则称 P 是一个**体锥**.

注意,给定 E 中一个锥 P 后,则可在 E 中的元素间引入半序:$x\leqslant y (x, y\in E)$,如果 $y-x\in P$.

若 $x\leqslant y, x\neq y$,则记 $x<y$;若 $y-x\in P^{\circ}$(若 P 是体锥),则记 $x\ll y$.

定义 1.2 如果 $\exists\, \delta>0$,使当 $\|x_1\|=\|x_2\|=1, x_1\in P, x_2\in P$ 时,恒有 $\|x_1+x_2\|\geqslant\delta$,则称锥 P 是**正规的**.

定理 1.1 锥 P 是正规的充分必要条件是:$\exists$ 常数 $N>0$,

使当 $0\leqslant x\leqslant y$ 时, 恒有 $\|x\|\leqslant N\|y\|$(此性质称为范数关于 P 是半单调的, 满足此式的最小的 N 称为 P 的正规常数).

证 必要性: 设 P 是正规的, 而范数非半单调, 于是 $\exists\, \theta\leqslant x_n\leqslant y_n$, 使

$$\|x_n\|>n\|y_n\| \quad (n=1,2,3,\cdots) \tag{1·1}$$

令

$$z_n=\frac{x_n}{\|x_n\|}+\frac{y_n}{n\|y_n\|},$$

$$h_n=-\frac{x_n}{\|x_n\|}+\frac{y_n}{n\|y_n\|}.$$

于是, 由 P 的正规性知

$$\left\|\frac{z_n}{\|z_n\|}+\frac{h_n}{\|h_n\|}\right\|\geqslant\delta \quad (n=1,2,3,\cdots) \tag{1·2}$$

但

$$z_n+h_n=\frac{2y_n}{n\|y_n\|},$$

从而

$$\frac{z_n}{\|z_n\|}+\frac{h_n}{\|h_n\|}=\frac{1}{\|z_n\|}\left(\frac{2y_n}{n\|y_n\|}-h_n\right)+\frac{h_n}{\|h_n\|}$$

$$=\frac{2y_n}{n\|z_n\|\cdot\|y_n\|}+\frac{\|z_n\|-\|h_n\|}{\|z_n\|\cdot\|h_n\|}h_n. \tag{1·3}$$

显然 $1-\frac{1}{n}\leqslant\|z_n\|$, $\|h_n\|\leqslant 1+\frac{1}{n}$, 故 $\left|\|z_n\|-\|h_n\|\right|\leqslant\frac{2}{n}$. 于是由(1·3)式得

$$\left\|\frac{z_n}{\|z_n\|}+\frac{h_n}{\|h_n\|}\right\|\leqslant\frac{2}{n}\cdot\frac{n}{1-\frac{1}{n}}+\frac{2}{n}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{n}}=\frac{4}{n-1},$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\frac{z_n}{\|z_n\|}+\frac{h_n}{\|h_n\|}\right\|=0,$$

此显然与(1·2)式矛盾.

充分性: 设范数半单调. 设 $x_1\in P$, $x_2\in P$, $\|x_1\|=\|x_2\|=$

1. 因 $\theta \leqslant x_1 \leqslant x_1 + x_2$，故 $1 = \|x_1\| \leqslant N\|x_1 + x_2\|$，从而 $\|x_1 + x_2\| \geqslant \dfrac{1}{N} = \delta$. 证完 .

定理 1.2 锥 P 是正规的充分必要条件是：任何区间 $[x_1, x_2] = \{x \mid x_1 \leqslant x \leqslant x_2\}$ 都是有界的 .

证 必要性：设 P 正规 . 根据定理 1.1 知范数半单调 . 当 $x \in [x_1, x_2]$ 时，有 $\theta \leqslant x - x_1 \leqslant x_2 - x_1$，故 $\|x - x_1\| \leqslant N\|x_2 - x_1\|$，从而

$$\begin{aligned}\|x\| &\leqslant \|x - x_1\| + \|x_1\| \\ &\leqslant N\|x_2 - x_1\| + \|x_1\| = \text{const},\end{aligned}$$

故 $[x_1, x_2]$ 有界 .

充分性：用反证法，设 P 不正规 . 根据定理 1.1 知 $\exists\, 0 \leqslant x_n \leqslant y_n$，使 $\|x_n\| > n^3\|y_n\|$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$. 令 $z_n = \dfrac{x_n}{n^2\|y_n\|}$，则 $\|z_n\| > n$，故 $\{z_n\}$ 无界 . 而

$$\theta \leqslant z_n \leqslant \frac{y_n}{n^2\|y_n\|}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\left\|\frac{y_n}{n^2\|y_n\|}\right\| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} < +\infty,$$

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{y_n}{n^2\|y_n\|}$ 收敛，用 u 表其和 $(u \in E)$. 显然

$$\frac{y_n}{n^2\|y_n\|} \leqslant u \quad (n = 1, 2, 3, \cdots),$$

故 $\theta \leqslant z_n \leqslant u$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$，因此 $[\theta, u]$ 无界，此与假定矛盾 . 证完 .

定理 1.3 锥 P 是正规的充分必要条件是：$x_n \leqslant z_n \leqslant y_n$，$x_n \to x$，$y_n \to x \Rightarrow z_n \to x$.

证 必要性：设 P 正规 . 根据定理 1.1 知范数半单调 . 设 $x_n \leqslant z_n \leqslant y_n$，$x_n \to x$，$y_n \to x$，于是有 $\theta \leqslant z_n - x_n \leqslant y_n - x_n$，从而

$\|z_n - x_n\| \leqslant N\|y_n - x_n\|$，故

$$\begin{aligned}\|z_n - x\| &\leqslant \|z_n - x_n\| + \|x_n - x\| \\ &\leqslant N\|y_n - x_n\| + \|x_n - x\| \\ &\leqslant N\|y_n - x\| + N\|x - x_n\| + \|x_n - x\| \to 0 \quad (n \to \infty).\end{aligned}$$

充分性：用反证法，设 P 不正规．根据定理 1.1，$\exists\, \theta \leqslant x_n \leqslant y_n$，使 $\|x_n\| > n^2\|y_n\|$．令 $z_n = \dfrac{x_n}{n\|y_n\|}$，则 $\|z_n\| > n$，故 z_n 不收敛于 θ．但 $\theta \leqslant z_n \leqslant y_n'$，$y_n' = \dfrac{y_n}{n\|y_n\|}$，而 $\|y_n'\| = \dfrac{1}{n} \to 0$，故 $y_n' \to \theta$．由假定应有 $z_n \to \theta$，矛盾．证完．

设 P 是 E 中某锥，设 $u_0 \in P$，$u_0 \neq \theta$，(即 $u_0 > \theta$)．令 $E_{u_0} = \{x \mid x \in E$ 且存在 $\lambda > 0$，使 $-\lambda u_0 \leqslant x \leqslant \lambda u_0\}$．若 $x \in E_{u_0}$，令

$$\|x\|_{u_0} = \inf\{\lambda \mid \lambda > 0,\ -\lambda u_0 \leqslant x \leqslant \lambda u_0\}, \qquad (1\cdot4)$$

则易知 E_{u_0} 成为赋范线性空间，$\|x\|_{u_0}$ 叫做 x 的 **u_0-范数**．容易看出 $P_{u_0} = P \cap E_{u_0}$ 是 E_{u_0} 中一个锥，而且是体锥(例如，u_0 就是 P_{u_0} 的内点)；同时，u_0-范数 $\|\cdot\|_{u_0}$ 关于 P_{u_0} 是单调的(即从 $\theta \leqslant x \leqslant y$，$x, y \in E_{u_0}$ 推出 $\|x\|_{u_0} \leqslant \|y\|_{u_0}$)，从而根据引理 1.1 知 P_{u_0} 是 E_{u_0} 中一个正规锥．

定理 1.4 若 P 是正规的，则：(ⅰ)存在常数 $N_1 > 0$，使 $\|x\| \leqslant N_1\|x\|_{u_0}$ 对一切 $x \in E_{u_0}$ 成立；(ⅱ) E_{u_0} 是完备的，从而是 Banach 空间．

证 (ⅰ)设 $x \in E_{u_0}$，令 $\alpha = \|x\|_{u_0}$，则 $-\alpha u_0 \leqslant x \leqslant \alpha u_0$，从而 $\theta \leqslant x + \alpha u_0 \leqslant 2\alpha u_0$．于是 $\|x + \alpha u_0\| \leqslant N\|2\alpha u_0\|$，故

$$\begin{aligned}\|x\| &\leqslant \|x + \alpha u_0\| + \|-\alpha u_0\| \\ &\leqslant 2\alpha N\|u_0\| + \alpha\|u_0\| = N_1\|x\|_{u_0},\end{aligned}$$

其中 $N_1=(2N+1)\|u_0\|=\text{const}$.

(ii)设 $\{x_n\}$ 是 E_{u_0} 中一基本列，即 $\|x_n-x_m\|_{u_0}\to 0\ (n, m\to\infty)$. 由(i)段的结果知 $\|x_n-x_m\|\leqslant N_1\|x_n-x_m\|_{u_0}$，故 $\|x_n-x_m\|\to 0\ (n, m\to\infty)$，即 $\{x_n\}$ 是 E 中的基本列．由 E 的完备性知 $\exists\, x^*\in E$，使 $\|x_n-x^*\|\to 0\ (n\to\infty)$. $\forall\,\varepsilon>0$，$\exists\, N_2$ 使当 $n>N_2$，$m>N_2$ 时，恒有 $\|x_n-x_m\|_{u_0}\leqslant\varepsilon$，从而

$$-\varepsilon u_0\leqslant x_n-x_m\leqslant\varepsilon u_0\quad(n>N_2,\ \ m>N_2)\tag{1·5}$$

今在(1·5)式中让 n 固定，而令 $m\to\infty$ 取极限，即得 $-\varepsilon u_0\leqslant x_n-x^*\leqslant\varepsilon u_0\ (n>N_2)$，从而 $\|x_n-x^*\|_{u_0}\leqslant\varepsilon\ (n>N_2)$. 由此可知 $x^*\in E_{u_0}$，且 $\|x_n-x^*\|_{u_0}\to 0\ (n\to\infty)$. 证完．

定义 1.3 设 $\{x_n\}$ 单调递增且有上界，即存在 $y\in E$，使

$$x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_n\leqslant\cdots\leqslant y.\tag{1·6}$$

如果这时必存在 $x^*\in E$，使 $\|x_n-x^*\|\to 0\ (n\to\infty)$，则称锥 P **是正则的**.

显然，P 正则⇔任何单调递减且有下界的序列必有极限(即若 $x_1\geqslant x_2\geqslant\cdots\geqslant x_n\geqslant\cdots\geqslant y$，则必存在 $x^*\in E$，使 $\|x_n-x^*\|\to 0$).

定理 1.5 若 P 是正则的，则 P 必是正规的．

证 用反证法．设 P 不是正规的，于是存在 $\{x_n\}\subset P$，$\{y_n\}\subset P$，使

$$\|x_n\|=\|y_n\|=1,\quad \|x_n+y_n\|<\frac{1}{n^2}\quad(n=1,2,\cdots).\tag{1·7}$$

级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_n+y_n)$ 收敛．用 u 表其和，令

$$z_n=x_1+x_2+\cdots+x_n\quad(n=1,2,\cdots)$$

则 $$\|z_{n+1}-z_n\| = \|x_{n+1}\| = 1 \quad (n=1,2,\cdots) \tag{1·8}$$
显然，序列$\{z_n\}$单调递增且有上界：
$$z_n \leqslant (x_1+y_1)+(x_2+y_2)+\cdots+(x_n+y_n) \leqslant u.$$
由于 P 正则，故$\exists x^* \in E$，使$\|z_n - x^*\| \to 0$，此显然与(1·8)式矛盾．证完．

设 $D \subset E$，$z \in E$，若对$\forall x \in D$ 均有 $x \leqslant z$；同时，从 $x \leqslant z_1$ $(\forall x \in D)$可推出 $z \leqslant z_1$；则称 z 是D 的**上确界**，记为 $\sup D$．同样可定义**下确界** $\inf D$．

定义 1.4 若 E 中任二元素 x, y，都存在上确界 $\sup\{x, y\}$，则称锥 P 是**极小的**；若 E 中任何有上界的集D 都具有上确界 $\sup D$，则称锥 P 是**强极小的**．

定义 1.5 如果任何 $x \in E$ 都可表成$x = y - z$ 的形式，其中 $y \in P$，$z \in P$；则称锥 P 是**再生的**．

定理 1.6 若 P 是体锥，则 P 是再生的．

证 设 u_0 是 P 的内点．于是$\exists \rho > 0$，使闭球 $\overline{T}(u_0, \rho) = \{x \mid \|x - u_0\| \leqslant \rho\} \subset P$．$\forall x \in E$，则 $u_0 \pm \rho \dfrac{x}{\|x\|} \in \overline{T}(u_0, \rho) \subset P$，从而 $x = y - z$，其中 $y = \dfrac{\|x\|}{2\rho}\left(u_0 + \rho \dfrac{x}{\|x\|}\right) \in P$，$z = \dfrac{\|x\|}{2\rho}\left(u_0 - \rho \dfrac{x}{\|x\|}\right) \in P$．证完．

例 1.1 设 $E = R^N$——N 维欧氏空间．令
$$P = \{x \mid = (x_1, \cdots, x_N), \quad x_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \cdots, N\}.$$
则 P 是R^N 中一个锥，它显然是正规的(因为范数是单调的)、正则的、极小的、强极小的以及再生的．

例 1.2 设 $E = C(G)$——N 维欧氏空间 R^N 中有界闭集 G 上的连续函数空间($\|\varphi\| = \max\limits_{x \in G} |\varphi(x)|$)．令

$$P = \{\varphi \mid \varphi \in C(G),\ \varphi(x) \geqslant 0\}.$$

则 P 是$C(G)$的一个体锥 .P 是正规的(因为范数是单调的);P 不是正则的,例如,令 $G=[0,1]$, $\varphi_n(x)=1-x^n$ $(n=1,2,\cdots)$,则 $\varphi_1 \leqslant \varphi_2 \leqslant \cdots \leqslant \varphi_n \leqslant \cdots \leqslant \psi$. $\psi(x)\equiv 1$,但 $\varphi_n(x)$在$[0,1]$上显然非一致收敛;P 是再生的(任何 $\varphi \in C(G)$可表为 $\varphi=\varphi_1-\varphi_2$,其中

$$\varphi_1(x)=\begin{cases}\varphi(x), & \text{若在 } x, \varphi(x)\geqslant 0,\\ 0, & \text{若在 } x, \varphi(x)<0\end{cases};$$

$$\varphi_2(x)=\begin{cases}0, & \text{若在 } x, \varphi(x)\geqslant 0,\\ -\varphi(x), & \text{若在 } x, \varphi(x)<0;\end{cases}$$

$\varphi_1 \in P$, $\varphi_2 \in P$);P 是极小的(对任何 $\varphi, \psi \in C(G)$,有 $\sup\{\varphi, h\}=h$, $h(x)=\max\{\varphi(x), \psi(x)\}\in C(G)$);$P$ 不是强极小的,例如,令 $G=[0.2]$, $D=\{\varphi \mid \varphi \in C[0,2]$,当 $0<x<1$ 时 $\varphi(x)<1$,而当 $1<x<2$ 时 $\varphi(x)<2\}$,则 D 在$C[0,2]$上显然无上确界 .

以后,我们还要用到 $C(G)$中的其他锥,例如

$$P_1=\{\varphi \mid \varphi \in C(G),\ \varphi(x)\geqslant 0 \text{ 且} \int_G \varphi(x)\mathrm{d}x \geqslant \alpha \|\varphi\|\},$$

$$P_2=\{\varphi \mid \varphi \in C(G),\ \varphi(x)\geqslant 0 \text{ 且} \min_{x\in G_0} \varphi(x)\mathrm{d}x \geqslant \tau \|\varphi\|\};$$

等 . 这里 $0<\alpha<\mathrm{mes}G$, $0<\tau<1$, G_0 是 G 的某闭子集 . 显然 P_1 与 P_2 都是正规的锥(因范数关于 P_1 和 P_2 都是单调的),并且 P_1 与 P_2 都是体锥(例如,$\varphi_0(x)\equiv c>0$ 就是 P_1 与 P_2 的内点).

例 1.3 设 $E=L^p(\Omega)$, $p\geqslant 1$, $0<\mathrm{mes}\Omega<+\infty$. 令

$$P = \{\varphi \mid \varphi \in L^p(\Omega),\ \varphi(x) \geqslant 0\}.$$

显然 P 是$L^p(\Omega)$中的一个锥,但不是体锥(P 无内点).P 是正

规的，因为显然范数关于 P 是单调的．P 是再生的（任何 $\varphi\in L^p(\Omega)$，可表为 $\varphi=\varphi_1-\varphi_2$，其中，

$$\varphi_1(x)=\begin{cases}\varphi(x), & \text{若在 } x,\varphi(x)\geqslant 0,\\ 0, & \text{若在 } x,\varphi(x)<0;\end{cases}$$

$$\varphi_2(x)=\begin{cases}0, & \text{若在 } x,\varphi(x)\geqslant 0,\\ -\varphi(x), & \text{若在 } x,\varphi(x)<0;\end{cases}$$

$\varphi_1,\varphi_2\in L^p(\Omega)$）．$P$ 是极小的（对任何 $\varphi,\psi\in L^p(\Omega)$ 有 $\sup\{\varphi,\psi\}=h$，$h(x)=\max\{\varphi(x),\psi(x)\}\in L^p(\Omega)$）．下证 P 是正则的：设 $\varphi_1\leqslant\varphi_2\leqslant\cdots\leqslant\varphi_n\leqslant\cdots\leqslant\psi$，令 $\varphi^*(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(x)$（注意，这里以及以下关于 L^p 中函数的等式或不等式都代表几乎处处成立），则显然 $\varphi^*\in L^p(\Omega)$．由于

$$|\varphi_n(x)-\varphi^*(x)|^p\leqslant[\psi(x)-\varphi_1(x)]^p,$$

$$[\psi(x)-\varphi_1(x)]^p\in L(\Omega),$$

故由 Lebesguc 控制收敛定理知

$$\lim_{n\to\infty}\|\varphi_n-\varphi^*\|^p=\lim_{n\to\infty}\int_\Omega|\varphi_n(x)-\varphi^*(x)|^p\mathrm{d}x=0.$$

最后证明 P 是强极小的：设 $D\subset L^p(\Omega)$，D 有上界，即 $\exists\,\psi\in L^P(\Omega)$，使对任何 $\varphi\in D$ 都有 $\varphi\leqslant\psi$．上面已证 P 是极小的，从而易知对 $L^p(\Omega)$ 中任意有限个元素 $\varphi_1,\cdots,\varphi_n$，其上确界存在且

$$\sup\{\varphi_1,\cdots,\varphi_n\}=\sup\{\sup\{\varphi_1,\cdots,\varphi_{n-1}\},\varphi_n\}\text{（递推）}.$$

令 $M=\{f\,|\,f=\sup\{\varphi_1,\cdots,\varphi_k\}$，$\varphi_1,\cdots,\varphi_k$ 为 D 中任意有限个元素 $\}$．又对任何 $\varphi\in L^p(\Omega)$，令 $F(\varphi)=\int_\Omega\varphi(x)\mathrm{d}x$．由于当 $f\in M$ 时 $f\leqslant\psi$，故 $F(f)\leqslant F(\psi)$．令 $\beta=\sup\limits_{f\in M}F(f)$，显然 β 是有限数，且 $\beta\leqslant F(\psi)$．今取 $f_n\in M$，使

$$\lim_{n\to\infty} F(f_n) = \beta. \tag{1·9}$$

恒可假设 $f_1 \leqslant f_2 \leqslant f_3 \leqslant \cdots$（否则只需用 $\sup\{f_1, \cdots, f_n\}$ 来代替 f_n 即可）. 由于 $f_1 \leqslant f_2 \leqslant f_3 \leqslant \cdots \leqslant \psi$, 而上面已证 P 是正则的, 故 $\| f_n - f^* \| \to 0$, $f^*(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \in L^p(\Omega)$. 由 Hölder 不等式知

$$\begin{aligned} |F(f_n) - F(f^*)| &= \left| \int_\Omega [f_n(x) - f^*(x)] \mathrm{d}x \right| \\ &\leqslant (\mathrm{mes}\Omega)^{\frac{1}{q}} \left(\int_\Omega |f_n(x) - f^*(x)|^p \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= (\mathrm{mes}\Omega)^{\frac{1}{q}} \| f_n - f^* \|, \quad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \right). \end{aligned} \tag{1·10}$$

故 $F(f_n) \to F(f^*)(n \to \infty)$. 于是由(1·9)知

$$F(f^*) = \beta = \lim_{n\to\infty} F(f_n). \tag{1·11}$$

下证 $f^* = \sup D$. $\forall \varphi_0 \in D$, 今证 $\varphi_0 \leqslant f^*$. 令 $\varphi_0^* = \sup\{f^*, \varphi_0\}$, 只需证明 $\varphi_0^* = f^*$. 若不然, 则 $\varphi_0^* > f^*$（即 $\varphi_0^* \geqslant f^*$, $\varphi_0^* \neq f^*$）. 于是显然

$$\begin{aligned} F(\varphi_0^*) &= \int_\Omega \varphi_0^*(x) \mathrm{d}x > \int_\Omega f^*(x) \mathrm{d}x \\ &= F(f^*) = \beta. \end{aligned} \tag{1·12}$$

令 $f_n^* = \sup\{f_n, \varphi_0\}$. 则 $f_n^* \in M(n = 1, 2, \cdots)$. 由于 $f_n^*(x) = \max\{f_n(x), \varphi_0(x)\}$, $\varphi_0^*(x) = \max\{f^*(x), \varphi_0(x)\}$, 而 $f^*(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, 故

$$\varphi_0^*(x) = \lim_{n\to\infty} f_n^*(x). \tag{1·13}$$

此外, 显然 $f_1^* \leqslant f_2^* \leqslant \cdots \leqslant f_n^* \leqslant \cdots \leqslant \psi$, 故由 P 的正则性知 $\| f_n^* - \varphi_0^* \| \to 0$. 从而仿(1·10)式之证明可得 $F(f_n^*) \to F(\varphi_0^*)$; 但因 $f_n^* \in M$, 故 $F(f_n^*) \leqslant \beta(n = 1, 2, \cdots)$, 从而有 F

$(\varphi_0{}^*)\leqslant\beta$，此与(1·12)式矛盾．于是 $\varphi_0{}^*=f^*$，故 $f^*\geqslant\varphi_0$．因此 f^* 是 D 的一个上界．

现设 g 是 D 的任一上界，即 $\varphi\leqslant g$ 对任何 $\varphi\in D$ 成立．显然对任何 $f\in M$ 也有 $f\leqslant g$，故 $f_n\leqslant g(n=1,2,\cdots)$．又由于 $f^*(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$，故得 $f^*\leqslant g$．

综上所证可知 $f^*=\sup D$．于是 P 是强极小的．

注 1 关于锥的详细讨论，可参看〔5〕、〔76〕、〔77〕、〔78〕．

§2 增算子与减算子

设 P 是实 Banach 空间 E 中一个锥．

定义 2.1 设算子 $A:D\to E$，其中 D 是 E 的某子集．

(i)如果 $x_1,x_2\in D$，$x_1\leqslant x_2\Rightarrow Ax_1\leqslant Ax_2$，则称 A 是 D 上的**增算子**；

(ii)如果 $x_1,x_2\in D$，$x_1\leqslant x_2\Rightarrow Ax_1\geqslant Ax_2$，则称 A 是 D 上的**减算子**；

定理 2.1 设锥 P 是正规的，$A:[u_0,v_0]\to E$ 是凝聚映象(特别地，严格集压缩映象，全连续算子)并且是增算子．此外设

$$u_0\leqslant Au_0,\quad Av_0\leqslant v_0. \tag{2·1}$$

那么 A 在 $[u_0,v_0]$ 中必有最大不动点 x^* 与最小不动点 x_* (即若 $\bar{x}$ 为 A 在 $[u_0,v_0]$ 中任一不动点，必有 $x_*\leqslant\bar{x}\leqslant x^*$)，并且

$$x^*=\lim_{n\to\infty}v_n,\quad x_*=\lim_{n\to\infty}u_n, \tag{2·2}$$

其中 $v_n=Av_{n-1}$，$u_n=Au_{n-1}(n=1,2,\cdots)$，满足

$$u_0\leqslant u_1\leqslant\cdots\leqslant u_n\leqslant\cdots\leqslant v_n\leqslant\cdots\leqslant v_1\leqslant v_0. \tag{2·3}$$

证 由于 A 是增算子，故显然(2·3)式成立．由于 P 正规，

根据定理 1.2 知 $\{u_n\}$ 有界．令 $S=\{u_0,u_1,\cdots\}$．显然 $S=A(S)\cup\{u_0\}$，从而 $\alpha(S)=\alpha(A(S))$．根据 A 的凝聚性得 $\alpha(S)=0$．故 S 是相对紧集．因此存在子序列 $\{u_{n_k}\}$，使 $u_{n_k}\to x_*$．显然 $u_n\leqslant x_*\leqslant v_n(n=1,2,3,\cdots)$．当 $m>n_k$ 时，$\theta\leqslant x_*-u_m\leqslant x_*-u_{n_k}$ 故由定理 1.1 知 $\|x_*-u_m\|\leqslant N\|x_*-u_{n_k}\|$，由此即得 $x_*=\lim\limits_{m\to\infty}u_m$．在 $u_n=Au_{n-1}$ 两边令 $n\to\infty$ 取极限，注意到 A 的连续性，得 $x_*=Ax_*$．

同理可证极限 $\lim\limits_{n\to\infty}v_n=x^*$ 存在，且 $Ax^*=x^*$．

最后证明 x_* 与 x^* 分别是 A 在 $[u_0,v_0]$ 中的最小不动点和最大不动点．设 $u_0\leqslant\bar{x}\leqslant v_0$，使 $A\bar{x}=\bar{x}$．由 A 的增性知 $Au_0\leqslant A\bar{x}\leqslant Av_0$，即 $u_1\leqslant\bar{x}\leqslant v_1$．再以 A 作用之，得 $u_2\leqslant\bar{x}\leqslant v_2$．这样继续下去，一般有

$$u_n\leqslant\bar{x}\leqslant v_n\quad(n=1,2,\cdots).$$

令 $n\to\infty$ 取极限，即得 $x_*\leqslant\bar{x}\leqslant x^*$．证完．

注 1 由于可能 $x_*=x^*$，故在定理 2.1 的条件下，只能得出 A 在 $[u_0,v_0]$ 中至少有一不动点，而得不出有两个不动点．定理 2.1 见〔79〕．

系 在定理 2.1 的条件下，若更设 A 在 $[u_0,v_0]$ 中的不动点惟一(记为 $\bar{x}$)，则以任何 $x_0\in[u_0,v_0]$ 为初值，作迭代

$$x_n=Ax_{n-1}\quad(n=1,2,\cdots)\tag{2·4}$$

都有 $\|x_n-\bar{x}\|\to0\ (n\to\infty)$．

证 由于 $u_0\leqslant x_0\leqslant v_0$，以 A 反复作用之，得

$$u_n\leqslant x_n\leqslant v_n\quad(n=1,2,\cdots)\tag{2·5}$$

由假定知 $x_*=x^*=\bar{x}$，故由(2.2)式得

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}v_n=\bar{x}.\tag{2·6}$$

由(2·5)式与(2·6)式，利用定理 1.3 即得$\|x_n-\bar{x}\|\to 0$. 证完.

定理 2.2 设锥 P 是正则的，设 $A:[u_0, v_0]\to E$ 连续并且是增算子. 此外设(2·1)式成立. 那末 A 在$[u_0, v_0]$中必具有最大不动点 x^* 与最小不动点 x_*，并且(2·2)式及(2·3)式成立.

证 由于 P 是正则的，故由(2·3)式知极限$\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ 与$\lim\limits_{n\to\infty} v_n$ 均存在，分别以 x_* 与 x^* 表之. 在 $u_n=Au_{n-1}$与 $v_n=Av_{n-1}$两端令 $n\to\infty$，取极限，注意 A 的连续性，得到 $x_*=Ax^*$，$x^*=Ax^*$.

仿定理 2.1 的证明可知 x^* 与 x_* 分别是最大不动点和最小不动点. 证完.

系 在定理 2.2 的条件下，若更设 A 在$[u_0, v_0]$中的不动点惟一(记为 $\bar{x}$). 则以任何 $x_0\subset[u_0, v_0]$为初值，作迭代序列(2·4)都有$\|x_n-\bar{x}\|\to 0$ $(n\to\infty)$.

证 同于定理 2.1 系的证明(注意 P 正则，从而正规). 证完.

还可去掉 A 连续的假设，但 P 的性质要加强.

定理 2.3 设锥 P 是强极小的，$A:[u_0, v_0]\to E$ 是增算子且满足不等式(2·1). 那末 A 在$[u_0, v_0]$中必有最大不动点和最小不动点(从而至少有一个不动点).

证 令 $D=\{x\mid u_0\leqslant x\leqslant v_0,\ Ax\geqslant x\}$. 显然 $u_0\in D$，故 D 非空. 又 D 是有上界的(v_0 是它的一个上界). 于是，根据 P 是强极小的知 $\bar{x}=\sup D$ 存在. 显然 $u_0\leqslant\bar{x}\leqslant v_0$. 下证 $\bar{x}$ 是 A 在$[u_0, v_0]$中的最大不动点.

当 $x\in D$ 时，有 $u_0\leqslant x\leqslant\bar{x}\leqslant v_0$，从而 $u_0\leqslant Au_0\leqslant Ax\leqslant A\bar{x}\leqslant Av_0\leqslant v_0$. 因 $Ax\geqslant x$，故 $x\leqslant A\bar{x}$，因此 $A\bar{x}$ 是D 的一个上界，

所以 $\bar{x}\leqslant Ax$;由此知 $A\bar{x}\leqslant A(A\bar{x})$,从而 $Ax\in D$,于是 $A\bar{x}\leqslant\bar{x}$. 故得 $A\bar{x}=\bar{x}$. 显然,$\bar{x}$ 是 A 在$[u_0,v_0]$中的最大不动点.

同理可证,$\bar{x}_0=\inf G\ (G=\{x\mid u_0\leqslant x\leqslant v_0,\ \ Ax\leqslant x\})$是 A 在$[u_0,v_0]$中的最小不动点,证完.

注 2 还可以讨论满足条件(2·1)的非连续增算子的不动点(参看〔167〕、〔168〕).

例 2.1 作为例子,我们较详细地讨论中子迁移理论中出现的一个积分微分方程,它可以化为一个非线性积分方程,而对应的积分算子就是一个满足条件(2·1)的全连续增算子(参看〔82〕、〔83〕、〔84〕).

考虑位于两平面 $x=-a$ 和 $x=a$ 之间的无限长板式核反应堆. 中子迁移理论中出现下面的非线性积分微分方程

$$\mu\frac{\partial u}{\partial x}-\sigma u+\frac{c\sigma}{2}\int_{-1}^{1}u(x,\mu')\mathrm{d}\mu$$

$$=\sigma F\left(\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\mu(x,\mu')\mathrm{d}\mu'\right),\tag{2·7}$$

其中 $F(z)=\sum_{k=2}^{N}c_k[(1-z)^k-1+kz]$, $c_k\geqslant 0$, $\sum_{k=0}^{N}c_k=1$, $\sum_{k=1}^{N}kc_k=c$, $c_2,c_3,\cdots,c_N$ 中至少有一个不为零(即 $F(z)\neq 0$).

边界条件为

$$u(a,\mu)=0,\ \text{当}\ \mu>0\ \text{时};$$
$$u(-a,\mu)=0,\ \text{当}\ \mu<0\ \text{时}.\tag{2·8}$$

方程(2·7)的解 $u(x,\mu)$代表在点 x 沿方向 l($\mu=\cos(l,x)$)将一中子注入此核反应堆后能产生链式反应的概率($0\leqslant u(x,\mu)\leqslant 1$). 在方程(2·7)中,$c$ 表从一中子和反应堆中一原子核相碰撞时所出现的中子的平均数目(c_0 表碰撞时中子被俘获

的概率，$c_k, k=1,\cdots,N$，表碰撞后出现 k 个中子的概率)，σ^{-1} 表两碰撞间中子的平均自由程．

下面，将问题(2·7)～(2·8)转化为一等价的 Hammerstein 型积分方程．将(2·7)写为

$$\begin{cases} -\mu e^{\frac{\sigma x}{\mu}}\dfrac{\partial}{\partial x}(e^{-\frac{\sigma x}{\mu}}u)=\sigma G(\varphi(x)), & \mu\neq 0 \text{ 时}, \\ u(x,0)=G(\varphi(x)), & \mu=0 \text{ 时}, \end{cases} \tag{2·9}$$

其中

$$\varphi(x)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}u(x,\mu')\mathrm{d}\mu'(\text{通量}), \tag{2·10}$$

$$G(z)=cz-F(z)=1-\sum_{k=0}^{N}c_k(1-z)^k. \tag{2·11}$$

将(2·9)式积分，并利用边界条件(2·8)，得

$$u(x,\mu)=\begin{cases} \displaystyle\int_x^a e^{\frac{\sigma}{\mu}(x-y)}\frac{\sigma}{\mu}G(\varphi(y))\mathrm{d}y, & \mu>0, \\ G(\varphi(x)), & \mu=0, \\ \displaystyle -\int_{-a}^{x} e^{\frac{\sigma}{\mu}(x-y)}\frac{\sigma}{\mu}G(\varphi(y))\mathrm{d}y, & \mu<0. \end{cases} \tag{2·12}$$

再把(2·12)式对 μ 积分，并在右端作变量代替 $t=\dfrac{\sigma}{\mu}$，得

$$\varphi(x)=\int_{-a}^{a}E(|x-y|)G(\varphi(y))\mathrm{d}y, \tag{2·13}$$

其中

$$E(z)=\frac{\sigma}{2}\int_{\sigma}^{+\infty}\frac{e^{-tz}}{t}\mathrm{d}t. \tag{2·14}$$

问题(2·7)～(2·8)与 Hammerstein 型积分方程(2·13)等价：若 $\varphi(x)(0\leqslant\varphi(x)\leqslant 1, \varphi(x)\in C[-a,a])$ 为(2·13)的解，则按(2·12)定义的 $u(x,\mu)$ 必为(2·7)～(2·8)的解($0\leqslant u(x,\mu)\leqslant 1$, $u(x,\mu)\in C^1[-a,a]$，当 $\mu\neq 0$ 时，$u(x,0)\in C[-a,a]$)；反之，若 $u(x,\mu)$ 为(2·7)～(2·8)的解($0\leqslant u(x,\mu)\leqslant 1$,

$u(x, u) \in C^1[-a, a]$ 当 $\mu \neq 0$ 时, $u(x, 0) \in C[-a, a]$ 且设积分 $\int_{-1}^{1} u(x, \mu')\mathrm{d}\mu' \in C[-a, a]$), 则按(2·10)式定义的 $\varphi(x)$ 必为(2·13)的解($0 \leqslant \varphi(x) \leqslant 1$, $\varphi(x) \in C[-a, a]$).

考察 Hammerstein 型积分算子

$$A\varphi = \int_{-a}^{a} E(|x-y|)G(\varphi(y))\mathrm{d}y \qquad (2\cdot15)$$

与线性积分算子

$$B\varphi = \int_{-a}^{a} E(|x-y|)\varphi(y)\mathrm{d}y. \qquad (2\cdot16)$$

辅助结论 I (i)存在 $\tau > 0$, 使 $E(|x-y|) \geqslant \tau$, $\forall x, y \in [-a, a]$, $x \neq y$;

(ii) $\int_{-a}^{a} E(|x-y|)\mathrm{d}y < 1$, $\forall x \in [-a, a]$;

(iii)当 $h \to 0$ 时, $\int_{-a}^{a} |E(|x+h-y|) - E(|x-y|)|\mathrm{d}y$ 一致趋于零(关于 $x \in [-a, a]$).

证 (i)显然 $E(|x-y|) \geqslant E(2a) = \tau$, $\forall x, y \in [-a, a]$, $x \neq y$ ($x = y$ 时 $E((x-y))$ 变为 $+\infty$).

(ii)经计算可知

$$\int_{-a}^{a} E(|x-y|)\mathrm{d}y = \frac{\sigma}{2}\int_{-a}^{a}\int_{\sigma}^{+\infty} \frac{e^{-t|x-y|}}{t}\mathrm{d}t\mathrm{d}y$$

$$= \frac{\sigma}{2}\int_{\sigma}^{+\infty}\int_{-a}^{a} \frac{e^{-t|x-y|}}{t}\mathrm{d}y\mathrm{d}t$$

$$= 1 - \sigma\int_{\sigma}^{+\infty} \frac{e^{-ta}}{t^2}\cosh tx\,\mathrm{d}t < 1, \quad \forall x \in [-a, a];$$

(iii) $\forall \varepsilon > 0$, 由(ii)知瑕积分 $\int_{-a}^{a} E(|y|)\mathrm{d}y$ 收敛, 故可取 $\tau > 0$, 使 $\int_{3\tau}^{3\tau} E(|z|)\mathrm{d}z < \frac{\varepsilon}{4}$. 当 $|h| < \tau$ 时, 有

$$\int_{a}^{a} |E(|x+h-y|)-E(|x-y|)|dy$$

$$= \left(\int_{-a}^{x-2\tau}+\int_{x-2\tau}^{x+2\tau}+\int_{x-2\tau}^{a}\right)|E(|x+h-y|)$$
$$-E(|x-y|)|dy.$$

分别作代换 $x+h-y=z$ 与 $x-y=z$, 知

$$\int_{x-2\tau}^{x+2\tau} |E(|x+h-y|)-E(|x-y|)|dy$$
$$\leqslant \int_{x-2\tau}^{x+2\tau} E(|x+h-y|)dy+\int_{x-2\tau}^{x+2\tau} E(|x-y|)dy$$
$$= \int_{h-2\tau}^{h+2\tau} E(|z|)dz+\int_{-2\tau}^{2\tau} E(|z|)dz$$
$$< 2\int_{-3\tau}^{3\tau} E(|z|)dz < \frac{\varepsilon}{2}.$$

由于 $E(|z|)$当 $z\neq 0$ 时连续, 故在 $\tau\leqslant|z|\leqslant 2a$ 上一致连续, 从而 $\exists\,\delta>0$(可取 $\delta<\tau$), 使当 $\tau\leqslant|z|\leqslant 2a$, $\tau\leqslant|z+h|\leqslant 2a$, $|h|<\delta$ 时恒有 $|E(|z+h|)-E(|z|)|<\frac{\varepsilon}{4a}$. 由于当 $y\in[-a,x-2\tau]$或 $y\in[x+2\tau,a]$时, 恒有 $2a\geqslant|x+h-y|\geqslant\tau$, $2a\geqslant|x-y|\geqslant 2\tau>\tau$, 故知

$$\left(\int_{-a}^{x-2\tau}+\int_{x+2\tau}^{a}\right)|E(|x+h-y|)-E(|x-y|)|dy$$
$$< \left(\int_{-a}^{x-2\tau}+\int_{x+2\tau}^{a}\right)\frac{\varepsilon}{4a}dy < \frac{\varepsilon}{2}.$$

由此可知: 当 $|h|<\delta$ 时, 恒有

$$\int_{-a}^{a} |E(|x+h-y|)-E(|x-y|)|dy<\varepsilon.$$

证完.

辅助结论 Ⅱ (ⅰ) $B:C[-a,a]\to C[-a,a]$全连续且

$$\|B\|=1-\sigma\int_{a}^{+\infty}\frac{e^{-ta}}{t^2}dt=1-e^{-\sigma a}+2aE(a); \qquad (2\cdot 17)$$

(ⅱ)A 是映 $C[-a,a]$ 中区间 $0\leqslant\varphi(x)\leqslant 1$ 入 $C[-a,a]$ 中区间 $0\leqslant\varphi(x)\leqslant 1$ 的全连续算子；

(ⅲ)B 存在惟一的非负就范(即范数为 1)特征函数 $\psi^*(x)$，且 $c^* B\psi^* = \psi^*$，$c^* > 1$，$\psi^*(x) > 0\ (x\in[-a,a])$，$\|\psi^*\| = 1$；此外，$c^*$ 是 B 的单重数特征值，并且若 $\bar{c}$ 是 B 的任一异于 c^* 的特征值，则必有 $|\bar{c}| > c^*$. 又 $\psi^*(x)$ 是偶函数，即

$$\psi^*(-x) = \psi^*(x) \quad (-a\leqslant x\leqslant a). \tag{2·18}$$

证(ⅰ)由辅助结论Ⅰ的(ⅰ)与(ⅱ)易知 B 将 $C[-a,a]$ 中的有界集变成一致有界且等度连续(在 $[-a,a]$ 上)的函数集，从而 $B: C[-a,a]\to C[-a,a]$ 全连续. 当 $\|\varphi\| = 1$ 时显然

$$\|B\varphi\| \leqslant \max_{-a\leqslant x\leqslant a}\int_{-a}^{a} E(|x-y|)\mathrm{d}y.$$

若取 $\varphi_0(x)\equiv 1$，则 $\|\varphi_0\| = 1$，且

$$\|B\varphi_0\| = \max_{-a\leqslant x\leqslant a}\int_{-a}^{a} E(|x-y|)\mathrm{d}y.$$

由此可知

$$\|B\| = \sup_{\|\varphi\|=1}\|B\varphi\| = \max_{-a\leqslant x\leqslant a}\int_{-a}^{a} E(|x-y|)\mathrm{d}y. \tag{2·19}$$

但(参看辅助结论Ⅰ(ⅱ)的证明过程)

$$\int_{-a}^{a} E(|x-y|)\mathrm{d}y = 1 - \sigma\int_{\sigma}^{+\infty}\frac{e^{-ta}}{t^2}\cosh tx\,\mathrm{d}t,$$

故

$$\max_{-a\leqslant x\leqslant a}\int_{-a}^{a} E(|x-y|)\mathrm{d}y = 1 - \sigma\int_{\sigma}^{+\infty}\frac{e^{-ta}}{t^2}\mathrm{d}t. \tag{2·20}$$

又，利用分部积分法知

$$\int_{\sigma}^{\infty}\frac{e^{-ta}}{t^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{\sigma}e^{-\sigma a} - \frac{2a}{\sigma}E(a). \tag{2·21}$$

于是由(2·19)、(2·20)以及(2·21)诸式即得(2·17)式.

(ⅱ)由辅助结论Ⅰ的(ⅱ)、(ⅲ)知 $A(D)\subset D$,这里

$$D=\{\varphi\mid\varphi\in C[-a,a]\text{且}0\leqslant\varphi(x)\leqslant1\},\qquad(2\cdot22)$$

并且 $A(D)$ 中诸函数一致有界且等度连续,从而 $A(D)$ 列紧.另外,显然(由辅助结论Ⅰ的(ⅱ)) A 是连续的.故 $A:D\to D$ 全连续.

(ⅲ)令 $P=\{\varphi\mid\varphi\in C[-a,a],\varphi(x)\geqslant0\}$,则 P 是 $C[-a,a]$ 中一个体锥.当 $\varphi\in P,\varphi\neq\theta$(即 $\varphi(x)\not\equiv0$)时有

$$B\varphi(x)=\int_{-a}^{a}E(|x-y|)\varphi(y)\mathrm{d}y$$

$$\geqslant E(2a)\int_{-a}^{a}\varphi(y)\mathrm{d}y=\alpha>0.$$

故 $B\varphi$ 是 P 的内点.于是根据一已知结果(见〔76〕定理 6.3 或〔6〕264 页定理 2·3)即知 B 在 P 中具有惟一的就范特征元 ψ^*: $\psi^*\in P,\|\psi^*\|=1,c^*B\psi^*=\psi^*$,且 $c^*>0$, c^* 是 B 的单重数特征值,并且 B 的任何其他特征值 $\bar{c}$ 都满足 $|\bar{c}|>c^*$.此外, ψ^* 是 P 的内点.下面证明 $\psi^*(x)$ 是偶函数.我们有

$$\psi^*(-x)=c^*\int_{-a}^{a}E(|-x-y|)\psi^*(y)\mathrm{d}y$$

$$=c^*\int_{-a}^{a}E(|-x+z|)\psi^*(-z)\mathrm{d}z$$

$$=c^*\int_{-a}^{a}E(|x-z|)\psi^*(-z)\mathrm{d}z,$$

故 $\psi^*(-x)$ 也是 B 属于 c^* 的特征函数.上面已证 c^* 是单重数的,故

$$\psi^*=(-x)\equiv\beta\psi^*(x),\ (-a\leqslant x\leqslant a).\ \beta=\text{const}.$$

由于 $\psi^*(x)>0,\psi^*(-x)>0,\max\limits_{-a\leqslant x\leqslant a}\psi^*(x)=\max\limits_{-a\leqslant x\leqslant a}\psi^*(-x)=1$,故必有 $\beta=1$,从而(2·18)式获证.最后证明 $c^*>1$.设 $\psi^*(x)$ 在点 $x_0\in[-a,a]$ 达到最大值,则(注意到辅助结论Ⅰ

的(ⅱ))

$$1=\psi^*(x_0)=c^*\int_{-a}^{a}E(|x_0-y|)\psi^*(y)\mathrm{d}y$$

$$\leqslant c^*\int_{-a}^{a}E(|x_0-y|)\mathrm{d}y<c^*.$$

证完.

结论Ⅰ 若$0<c\leqslant c^*$,则方程(2·13)在D(D的定义见(2·22)式)中只有零解$\varphi(x)\equiv 0$.

证 用反证法.假定方程(2·13)在D中有解$\varphi^*(x)\not\equiv 0$.由于$G_z'(z)=\sum_{k=1}^{N}kc_k(1-z)^{k-1}$是$0\leqslant z\leqslant 1$上的严格减函数,故

$$\begin{aligned}\varphi^*(x)&=\int_{-a}^{a}E(|x-y|)G(\varphi^*(y))\mathrm{d}y\\&=\int_{-a}^{a}E(|x-y|)G_z'(\theta(y)\varphi^*(y))\varphi^*(y)\mathrm{d}y\\&<\int_{-a}^{a}E(|x-y|)G_z'(0)\varphi^*(y)\mathrm{d}y\\&=c\int_{-a}^{a}E(|x-y|)\varphi^*(y)\mathrm{d}y\\&=cB\varphi^*(x),\end{aligned}$$

其中$0<\theta(y)<1$.于是$\max\limits_{-a\leqslant x\leqslant a}\dfrac{\varphi^*(x)}{B\varphi^*(x)}=c_1<c<c^*$.故

$$\varphi^*\leqslant c_1B\varphi^*, \tag{2·23}$$

$$0<c_1<c^*. \tag{2·24}$$

令

$$B_n\varphi=B\varphi+\frac{\varphi^*}{n}\quad(n=1,2,\cdots), \tag{2·25}$$

则当$\varphi\in D$时,$\|B_n\varphi\|\geqslant\dfrac{\|\varphi^*\|}{n}>0$.又令$\overline{B}_n\varphi=\dfrac{B_n\varphi}{\|B_n\varphi\|}$.显然

B_n 是映 D 入 D 的全连续算子, 而 D 是 $C[-a,a]$ 中的有界凸闭集, 故由 Schauder 不动点定理知, $\exists\ \varphi_n\in D$, 使 $B_n\varphi_n=\varphi_n$. 显然 $\|\varphi_n\|=1$. 于是

$$B\varphi_n+\frac{\varphi^*}{n}=\lambda_n\varphi_n\quad(n=1,2,\cdots),\tag{2·26}$$

$$\frac{\|\varphi^*\|}{n}\leqslant\lambda_n=\|B_n\varphi_n\|\leqslant\|B\|+\frac{\|\varphi^*\|}{n}.\tag{2·27}$$

由(2·26)式知, $\varphi_n\geqslant\frac{1}{n\lambda_n}\varphi^*$. 令 $t^*=\sup\{t\mid\varphi_n\geqslant t\varphi^*\}$, 则有 $\frac{1}{n\lambda_n}\leqslant t^*<+\infty$ 且 $\varphi_n\geqslant t^*\varphi^*$. 于是根据(2·26)式及(2·23)式得

$$\varphi_n\geqslant\frac{1}{\lambda_n}B\varphi_n\geqslant\frac{1}{\lambda_n}B(t^*\varphi^*)=\frac{t^*}{\lambda_n}B\varphi^*\geqslant\frac{t^*}{c_1\lambda_n}\varphi^*.$$

由 t^* 的定义知 $\frac{t^*}{c_1\lambda_n}\leqslant t^*$, 从而 $c_1\lambda_n\geqslant1$, 即

$$\lambda_n\geqslant\frac{1}{c_1}\quad(n=1,2,\cdots).\tag{2·28}$$

根据 B 的全连续性(辅助结论Ⅱ(ⅰ))以及 $\{\lambda_n\}$ 的有界性((2·27)式、(2·28)式)知: $\exists\ n_1<n_2<\cdots<n_k<\cdots$, 使 $B\varphi_{n_k}\to\psi_0$, $\lambda_{n_k}\to\lambda_0\left(\frac{1}{c_1}\leqslant\lambda_0\leqslant\|B\|\right)$. 于是由(2·26)式知 $\varphi_{n_k}\to\frac{\psi_0}{\lambda_0}=\varphi_0$, 从而 $\|\varphi_0\|=1$, $B\varphi_0=\lambda_0\varphi_0$, $\varphi_0=\mu_0B\varphi_0$, $\mu_0=\frac{1}{\lambda_0}$, $0<\mu_0\leqslant c_1$. 于是 μ_0 是 B 的特征值, 且注意到(2·24)式, 知 $0<\mu_0<c^*$, 此显然与辅助结论Ⅱ的结论(ⅲ)矛盾. 证完.

辅助结论Ⅲ 若 $c>c^*$, 则方程(2·13)在 D 中必有最小的非零解 $u(x)$ 和最大的非零解 $v(x)$, 并且 $0<u(x)\leqslant v(x)<1$ $(\forall\ x\in[-a,a])$.

证 令

$$v_0(x)\equiv 1,\quad v_n = Av_{n-1}\quad (n=1,2,\cdots),\tag{2·29}$$

其中 A 为算子(2·15)式．由于 $G(z)$是 $0\leqslant z\leqslant 1$ 上的严格增函数,故 A 是映D 入D 的全连续增算子．

由于

$$v_1(x)=\int_{-a}^{a}E(|x-y|)G(1)\mathrm{d}y$$

$$=(1-c_0)\int_{-a}^{a}E(|x-y|)\mathrm{d}y<1=v_0(x),$$

故 $v_0\geqslant v_1\geqslant v_2\geqslant\cdots\geqslant\theta$. 由定理 2.1 的证明过程知, $\exists\, v\in D$, $\|v_n-v\|\to 0(n\to\infty)$, $Av=v$, 且 v 是A 在D 中的最大不动点,并且 $0\leqslant v(x)\leqslant\varphi_1(x)<1$, $\forall\, x\in[-a,a]$.

取定 $\delta>0$ 很小,使

$$(1-\delta)c>c^*.\tag{2·30}$$

由于 $G_z'(z)=\sum_{k=1}^{N}kc_k(1-z)^{k-1}$连续, $G_n'(0)=\sum_{k=1}^{N}kc_k=c$,故$\exists\,\varepsilon_0>0$,使

$$G_z'(z)\geqslant(1-\delta)c\quad(0\leqslant z\leqslant\varepsilon_0).\tag{2·31}$$

于是当 $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$ 时,有

$$A(\varepsilon\psi^*(x))=\int_{-a}^{a}E(|x-y|)G(\varepsilon\psi^*(y))\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-a}^{a}E(|x-y|)G_z'(\theta(y)\varepsilon\psi^*(y))\varepsilon\psi^*(y)\mathrm{d}y$$

$$\geqslant\int_{-a}^{a}E(|x-y|)(1-\delta)c\varepsilon\psi^*(y)\mathrm{d}y$$

$$=\frac{(1-\delta)c\varepsilon}{c^*}\psi^*(x)\geqslant\varepsilon\psi^*(x).\tag{2·32}$$

故令

$$v_{0,\varepsilon}(x)=\varepsilon\psi^*(x),\quad v_{n,\varepsilon}=Av_{n-1,\varepsilon}\quad(n=1,2,\cdots),\tag{2·33}$$

则 $$v_{0,\varepsilon} \leqslant v_{1,\varepsilon} \leqslant v_{2,\varepsilon} \leqslant \cdots \leqslant v_{n,\varepsilon} \leqslant \cdots \leqslant 1,$$
从而存在 $u_\varepsilon \in D$，使 $\| v_{n,\varepsilon} - u_\varepsilon \| \to 0 (n \to \infty)$，且显然有 $Au_\varepsilon = u_\varepsilon$，$0 < u_\varepsilon(x) \leqslant v(x) < 1 \quad (-a \leqslant x \leqslant a)$.

下证 u_ε 与 ε 无关($0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$). 事实上，设 $0<\varepsilon_1<\varepsilon_2\leqslant\varepsilon_0$，显然 $u_{\varepsilon_1} \leqslant u_{\varepsilon_2}$. 令 $T = \{\varepsilon \mid \varepsilon_1 \leqslant \varepsilon_1 \leqslant \varepsilon_2$ 且 $\varepsilon\psi^* \leqslant u_{\varepsilon_1}\}$，显然 $\varepsilon_1 \in T$，故 T 非空．令 $\varepsilon^* = \sup T$，下证必然 $\varepsilon^* = \varepsilon_2$. 因若 $\varepsilon^* < \varepsilon_2$，则将(2·32)式用于 $\varepsilon^*\psi^*$，得(注意 $\varepsilon^*\psi^* \leqslant u_{\varepsilon_1}$)

$$\varepsilon^*\psi^* \leqslant \frac{(1-\delta)c\varepsilon^*}{c^*}\psi^* \leqslant A(\varepsilon^*\psi^*) \leqslant Au_{\varepsilon_1} = u_{\varepsilon_1},$$

由于 $\frac{(1-\delta)c\varepsilon^*}{c^*} > \varepsilon^*$，此显然与 ε^* 的定义矛盾，故 $\varepsilon^* = \varepsilon_2$. 从而 $\varepsilon_2\psi^* \leqslant u_{\varepsilon_1}$，由此可知 $u_{\varepsilon_2 \leqslant u_{\varepsilon_1}}$. 于是得 $u_{\varepsilon_1} = u_{\varepsilon_2}$. 故 u_ε 与 ε 无关．令其公共元为 $u: u = u_\varepsilon (0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0)$. 最后证明 u 是 A 在 D 中的最小非零不动点．设 $\varphi^* \in D$，$\varphi^* \neq \theta$，$A\varphi^* = \varphi^*$，则当 $-a \leqslant x \leqslant a$ 时，有

$$\varphi^*(x) = \int_{-a}^{a} E(|x-y|)G(\varphi^*(y))\mathrm{d}y$$
$$\geqslant E(2a)\int_{-a}^{a} G(\varphi^*(y))\mathrm{d}y = \alpha > 0.$$

取 ε 使 $0<\varepsilon<\min\{\varepsilon_0, \alpha\}$，于是 $\varepsilon\psi^* \leqslant \varepsilon < \alpha \leqslant \varphi^*$，从而易得 $v_n \leqslant \varphi^*$，取极限得 $u = u_\varepsilon \leqslant \varphi^*$. 由此可知，$u$ 是 A 在 D 中的最小非零不动点，且

$$0 < u(x) \leqslant v(x) < 1 \quad (-a \leqslant x \leqslant a).$$

证完．

结论Ⅱ 若 $c > c^*$，则方程(2·13)在 D 中有惟一的非零解 φ^*，$0<\varphi^*(x)<1(-a\leqslant x\leqslant x)$，并且对任何 $\varphi_0 \in D$，$\varphi_0 \neq \theta$，

迭代序列

$$\varphi_n(x)=\int_{-a}^{a}E(|x-y|)G(\varphi_{n-1}(y))\mathrm{d}y \quad (1,2,\cdots) \qquad (2\cdot34)$$

都在$[-a,a]$上一致收敛于 $\varphi^*(x)$: $\|\varphi_n-\varphi^*\|\to0$ $(n\to\infty)$.

证 要证方程(2·13)在 D 中非零解的惟一性,根据辅助结论Ⅲ,只需证明 $u(x)=v(x)(-a\leqslant x\leqslant a)$. 为此首先证明:若 $0<z_1<z_<1$,则

$$\frac{G(z_1)}{z_1}>\frac{G(z_2)}{z_2} \qquad (2\cdot35)$$

事实上,$G_z'(z)=\sum_{k=1}^{N}kc_k(1-z)^{k-1}$是 $0\leqslant z\leqslant1$ 上的严格减函数,又 $G(0)=0$,故当 $0<z<1$ 时,有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{G(z)}{z}\right)&=\frac{zG_z'(z)-G(z)}{z^2}\\&=\frac{1}{z^2}\{zG_z'(z)-[G(z)-G(0)]\}\\&=\frac{1}{z^2}\{zG_z'(z)-G_z'(\theta z)z\}\\&=\frac{1}{z}[G_z'(z)-G_z'(\theta z)]<0 \quad (\text{这里 } 0<\theta<1).\end{aligned}$$

故函数$\dfrac{G(z)}{z}$是 $0<z<1$ 上的严格减函数,从而(2·35)式成立.

现在证明 $u(x)\equiv v(x)(-a\leqslant x\leqslant a)$. 用反证法,假定 $u(x)\not\equiv v(x)$. 由于 $u(x)\leqslant v(x)$,而 $u(x)$, $v(x)$连续,故在$[-a,a]$中某小区间上恒有 $u(x)<v(x)$,从而由(2·35)式有

$$\frac{G(u(x))}{u(x)}-\frac{G(v(x))}{v(x)}>0,$$

因此注意到 $v(x)>0$, $u(x)>0$ 有

$$\int_{-a}^{a}v(x)u(x)\left[\frac{G(u(x))}{u(x)}-\frac{G(v(x))}{v(x)}\right]\mathrm{d}x>0. \qquad (2\cdot36)$$

但

$$\int_{-a}^{a} v(x)u(x)\left[\frac{G(u(x))}{u(x)}-\frac{G(v(x))}{v(x)}\right]\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-a}^{a}[v(x)G(u(x))-u(x)G(v(x))]\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a}E(|x-y|)G(v(y))G(u(x))\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$-\int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a}E(|x-y|)G(u(y))G(v(x))\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a}E(|x-y|)G(u(x))G(v(y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$-\int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a}E(|x-y|)G(u(x))G(v(y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=0,$$

此与(2·36)式矛盾．由此可知 $u(x)\equiv v(x)$．令 $\varphi^{*}=u=v$，由(2·34)式知

$$\varphi_n=A\varphi_{n-1}\quad(n=1,2,\cdots),\quad \varphi_0\in D,\quad \varphi_0\neq\theta.$$

于是

$$1\geqslant\varphi_1(x)=\int_{-a}^{a}E(|x-y|)G(\varphi_0(y))\mathrm{d}y$$

$$\geqslant E(2a)\int_{-a}^{a}G(\varphi_0(y))\mathrm{d}y=\alpha>0,$$

$$(-a\leqslant x\leqslant a).$$

故可取 ε 很小，使 $0<\varepsilon<\min\{\varepsilon_0,\alpha\}$（$\varepsilon_0$ 的意义见(2·31)式）．于是 $\varepsilon\psi^{*}\leqslant\varphi_1\leqslant 1$，两端以 A 作用 $n-1$ 次，得

$$v_{n-1,\varepsilon}\leqslant\varphi_n\leqslant v_{n-1}\quad(n=1,2,\cdots),\tag{2·37}$$

其中 v_{n-1} 表(2·29)式中的序列，$v_{n-1,\varepsilon}$ 表(2·33)式中的序列．在(2·37)式两端令 $n\to\infty$，取极限，并注意到 $v_{n-1}(x)$ 在 $[-a,a]$ 上一致收敛于 $v(x)\equiv\varphi^{*}(x)$ 以及 $v_{n-1,\varepsilon}(x)$ 在 $[-a,a]$ 上

一致收敛于 $u(x)\equiv\varphi^*(x)$，即知 $\varphi_n(x)$在$[-a,a]$上一致收敛于 $\varphi^*(x)$. 证完.

系 $\varphi^*(x)$是偶函数：$\varphi^*(-x)=\varphi^*(x)\ (-a\leqslant x\leqslant a)$.

证 令 $\psi(x)=\varphi^*(-x)$，则

$$\begin{aligned}\psi(x)&=\int_{-a}^{a}E(|-x-y|)G(\varphi^*(y))\mathrm{d}y\\&=\int_{-a}^{a}E(|-x+z|)G(\varphi^*(-z))\mathrm{d}z\\&=\int_{-a}^{a}E(|x-z|)G(\psi(z))\mathrm{d}z.\end{aligned}$$

这表示 $\psi(x)$也是方程(2·13)在 D 中的非零解. 由非零解的惟一性知，$\varphi^*(x)\equiv\psi^*(x)$即 $\varphi^*(x)=\varphi^*(-x)$. 证完.

由于问题(2·7)～(2·8)与积分方程(2·13)等价，故由结论Ⅰ、结论Ⅱ及其系得

结论Ⅲ 当 $0<c<c^*$时，问题(2·7)～(2·8)只有零解 $u(x,\mu)\equiv0$；当 $c>c^*$时，问题(2·7)～(2·8)具有惟一的非零解 $u(x,\mu)$，并且

$$0<u(x,\mu)<1\quad(-a\leqslant x\leqslant a,\ -1\leqslant\mu\leqslant1),\tag{2·38}$$

$$u(x,\mu)=u(-x,-\mu)\quad(-a\leqslant x\leqslant a,\ -1\leqslant\mu\leqslant1),\tag{2·39}$$

$$\sup_{-a\leqslant x\leqslant a,\ -1\leqslant\mu\leqslant1}|u_n(x,\mu)-u(x,\mu)|\to0\quad(n\to\infty),\tag{2·40}$$

其中

$$u_n(x,\mu)=\begin{cases}\displaystyle\int_x^a e^{\frac{\sigma}{\mu}(x-y)}\frac{\sigma}{\mu}G(\varphi_n(y))\mathrm{d}y, & \mu>0;\\ G(\varphi_n(x)), & \mu=0;\\ \displaystyle-\int_{-a}^{x} e^{\frac{\sigma}{\mu}(x-y)}\frac{\sigma}{\mu}G(\varphi_n(y))\mathrm{d}y, & \mu<0;\end{cases}$$

$\varphi_n(x)$表序列(2·34)，其中 $\varphi_0(x)$是满足 $0\leqslant\varphi_0(x)\leqslant 1$ 的任何不恒为零的连续函数．

证 只需证(2·39)式与(2·40)式．当 $\mu>0$ 时有(注意到 $\varphi^*(x)$是函数)

$$\begin{aligned}
u(-x,-\mu) &= -\int_{-a}^{-x} e^{-\frac{\sigma}{-\mu}(-x-y)}\frac{\sigma}{-\mu}G(\varphi^*(y))\mathrm{d}y \\
&= \int_x^a e^{\frac{\sigma}{\mu}(x-z)}\frac{\sigma}{\mu}G(\varphi^*(-z))\mathrm{d}z \\
&= \int_x^a e^{\frac{\sigma}{\mu}(x-z)}\frac{\sigma}{\mu}G(\varphi^*(z))\mathrm{d}z \\
&= u(x,\mu)
\end{aligned}$$

同理可证：当 $\mu\leqslant 0$ 时，也有 $u(-x,-\mu)=u(x,\mu)$，故(2·39)式成立．

当 $\mu>0$ 时，

$$\begin{aligned}
&|u_n(x,\mu)-u(x,u)| \\
&= \left|\int_x^a e^{\frac{\sigma}{\mu}(x-y)}\frac{\sigma}{\mu}[G(\varphi_n(y))-G(\varphi^*(y))]\mathrm{d}y\right| \\
&\leqslant \|G(\varphi_n)-G(\varphi^*)\|\cdot\int_x^a e^{\frac{\sigma}{\mu}(x-y)}\frac{\sigma}{\mu}\mathrm{d}y \\
&= \|G(\varphi_n)-G(\varphi^*)\|\cdot\left(1-e^{-\frac{\sigma}{\mu}(a-x)}\right) \\
&\leqslant \|G(\varphi_n)-G(\varphi^*)\|;
\end{aligned}$$

同理可知，当 $\mu<0$ 时，

$$\begin{aligned}
&|u_n(x,\mu)-u(x,u)| \\
&\leqslant \|G(\varphi_n)-G(\varphi^*)\|\cdot\int_{-a}^{x} e^{\frac{\sigma}{\mu}(x-y)}\left(-\frac{\sigma}{\mu}\right)\mathrm{d}y \\
&= \|G(\varphi_n)-G(\varphi^*)\|\cdot\left(1-e^{-\left(-\frac{\sigma}{\mu}\right)(a+x)}\right) \\
&\leqslant \|G(\varphi_n)-G(\varphi^*)\|;
\end{aligned}$$

又显然($\mu=0$ 时)，

$$|u_n(x,0)-u(x,0)|=|G(\varphi_n(x))-G(\varphi^*(x))|.$$

故得

$$\sup_{a\leqslant x\leqslant a,\ -1\leqslant\mu\leqslant 1}|u_n(x,\mu)-u(x,\mu)|=\|G(\varphi_n)-G(\varphi^*)\|,$$

由此注意到$\|\varphi_n-\varphi^*\|\to 0\ (n\to\infty)$，即得(2·40)式．证完．

注 3 结论Ⅲ的结论是符合物理事实的．若碰撞时出现的中子平均数 $c<1$，显然不可能产生链式反应，故应有 $u(x,\mu)\equiv 0$. 由于中子可能逃离核反应堆，故即使 c 稍大于 1，也不能产生链式反应(即 $u(x,\mu)\equiv 0$)；只有当 c 大于某一比 1 大的数 c^* 以后，才可能产生链式反应(即 $0<u(x,\mu)<1$).

另外公式(2·40)表示：可以从任何初始函数 $\varphi_n(x)$出发作迭代序列，最后得出的 $u_n(x,\mu)$可作为 $u(x,\mu)$的近似值．

最后讨论，界数 c^* 以及问题(2·7)～(2·8)的解 $u(x,\mu)$对于反应堆宽度 $2a$ 的依赖性．

结论Ⅳ (ⅰ)c^*是 a 的连续函数，且随 a 的增大而严格减小，即当 $0<a<\hat{a}$ 时，必有 $c^*>\hat{c}^*$；

(ⅱ) $\lim\limits_{a\to+0}c^*=+\infty$;

(ⅲ) $\lim\limits_{a\to+\infty}c^*=1$.

证 (ⅰ)：取定 $p>2$，令 $q=\dfrac{p}{p-1}$. 由 Hölder 不等式有($x\neq y$ 时)

$$0<E(|x-y|)\leqslant\frac{\sigma}{2}\left(\int_\sigma^{+\infty}e^{-pt|x-y|}\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\int_\sigma^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^q}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$=\frac{\gamma e^{-\sigma|x-y|}}{|x-y|^{\frac{1}{p}}}\leqslant\frac{\gamma}{|x-y|^{\frac{1}{p}}},\tag{2·41}$$

其中 $\gamma=2^{-1}p^{-\frac{1}{p}}(q-1)^{-\frac{1}{q}}\sigma^{\frac{1}{q}}=\mathrm{const}$. 于是知(例如参看〔18〕引理 5.1)算子 B 又是映$L^2[-a,a]$入 $C[-a,a]$的全连续算

子．故$\frac{1}{c^*}=\max\limits_{\|\varphi\|_{L^2}=1}(B\varphi,\varphi)$，并且最大值在$\varphi=\psi=\frac{\psi^*}{\|\psi^*\|_{L^2}}$时达到．做$[-\hat{a},\hat{a}]$上的函数$\hat{\psi}_0$如下：令

$$\hat{\psi}_0(x)=\begin{cases}\psi(x), & 当\ x\in[-a,a]时;\\ 0, & 当\ x\in[-\hat{a},\hat{a}]\setminus[-a,a]时,\end{cases}$$

显然

$$\|\hat{\psi}_0\|_{L^2}=\left(\int_{-\hat{a}}^{\hat{a}}|\hat{\psi}_0(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\int_{-a}^{a}|\psi(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$=\|\psi\|_{L_2}=1,$$

故

$$\frac{1}{\hat{c}^*}=\max_{\|\varphi\|_{L^2}=1}\int_{-\hat{a}}^{\hat{a}}\int_{-\hat{a}}^{\hat{a}}E(|x-y|)\varphi(x)\varphi(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$\geqslant\int_{-\hat{a}}^{\hat{a}}\int_{-\hat{a}}^{\hat{a}}E(|x-y|)\hat{\psi}_0(x)\hat{\psi}_0(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a}E(|x-y|)\psi(x)\psi(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{c^*},$$

从而$c^*\geqslant\hat{c}^*$．下证$c^*\neq\hat{c}^*$．事实上，若$c^*=\hat{c}^*$，由于$\psi(x)$及$\hat{\psi}(x)=\frac{\hat{\psi}^*(x)}{\|\hat{\psi}^*\|_{L^2}}>0$，故当$t>0$充分小时，有$t\psi(x)\leqslant\hat{\psi}(x)$ $(-a\leqslant x\leqslant a)$．令$t_0$表满足此式的$t$中之最大者(它显然存在)，则$t_0\psi(x)\leqslant\hat{\psi}(x)(-a\leqslant x\leqslant a)$，从而$(-a\leqslant x\leqslant a$时)

$$t_0\psi(x)=t_0\psi\int_{-a}^{a}E(|x-y|)\psi(y)\mathrm{d}y$$
$$\leqslant c^*\int_{-a}^{a}E(|x-y|)\hat{\psi}(y)\mathrm{d}y$$
$$=\hat{c}^*\int_{a}^{a}E(|x-y|)\hat{\psi}(y)\mathrm{d}y$$
$$<\hat{c}^*\int_{\hat{a}}^{\hat{a}}E(|x-y|)\hat{\psi}(y)\mathrm{d}y$$

$$= \hat{\psi}(x),$$

于是，注意到 $\psi, \hat{\psi}$ 都是连续函数，知当 $\varepsilon_0 > 0$ 充分小时有 $(t_0 + \varepsilon_0)\psi(x) \leqslant \hat{\psi}(x)(-a \leqslant x \leqslant a)$，此与 t_0 的定义矛盾．于是 $c^* > \hat{c}^*$ 获证．再证 $\hat{c}^*$ 是 a 的连续函数．设 $0 < l_1 \leqslant a < \hat{a} \leqslant l_2$，这里 l_1、l_2 是两个任意固定的数．令 $\int_a^{\hat{a}} |\hat{\psi}(x)|^2 \mathrm{d}x = \frac{\delta}{2}$，注意到 $\hat{\psi}(x)$ 是偶函数（辅助结论 2·2(ⅲ)），知

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\hat{c}^*} &= \int_{-\hat{a}}^{\hat{a}} \int_{-\hat{a}}^{\hat{a}} E(|x-y|)\hat{\psi}(x)\hat{\psi}(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&< \int_{-a}^{a} \int_{-a}^{a} E(|x-y|)\hat{\psi}(x)\hat{\psi}(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&\quad + \left(\int_{-\hat{a}}^{-a} + \int_{a}^{\hat{a}}\right)\hat{\psi}(x)\mathrm{d}x \int_{-\hat{a}}^{\hat{a}} E(|x-y|)\hat{\psi}(y)\mathrm{d}y \\
&\quad + \left(\int_{-\hat{a}}^{-a} + \int_{a}^{\hat{a}}\right)\hat{\psi}(y)\mathrm{d}y \int_{-\hat{a}}^{\hat{a}} E(|x-y|)\hat{\psi}(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_{-a}^{a} \int_{-a}^{a} E(|x-y|)\hat{\psi}(x)\hat{\psi}(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&\quad + \frac{4}{\hat{c}^*} \int_{a}^{\hat{a}} [\hat{\psi}(x)]^2 \mathrm{d}x \leqslant \frac{1-\delta}{c^*} + \frac{2\delta}{\hat{c}^*},
\end{aligned}$$

从而

$$0 < c^* - \hat{c}^* < \frac{\delta \hat{c}^*}{1 - 2\delta} \tag{2·42}$$

由(2·41)式知

$$\begin{aligned}
\frac{\delta}{2} &= \int_a^{\hat{a}} [\hat{\psi}(x)]^2 \mathrm{d}x \\
&= (\hat{c}^*)^2 \int_a^{\hat{a}} \mathrm{d}x \left[\int_{-\hat{a}}^{\hat{a}} E(|x-y|)\hat{\psi}(y)\mathrm{d}y\right]^2 \\
&\leqslant (\hat{c}^*)^2 \int_a^{\hat{a}} \mathrm{d}x \int_{-\hat{a}}^{\hat{a}} [E(|x-y|)]^2 \mathrm{d}y \\
&\leqslant \gamma^2 (\hat{c}^*)^2 \int_a^{\hat{a}} \mathrm{d}x \int_{-\hat{a}}^{\hat{a}} |x-y|^{-\frac{2}{p}} \mathrm{d}y
\end{aligned}$$

$$=\gamma^2(\hat{c}^*)^2\int_a^{\hat{a}}\mathrm{d}x\left[\int_{-\hat{a}}^{x}(x-y)^{-\frac{2}{p}}\mathrm{d}y+\int_x^{\hat{a}}(y-x)^{-\frac{2}{p}}\mathrm{d}y\right]$$

$$=\frac{p}{p-2}\gamma^2(\hat{c}^*)^2\int_a^{\hat{a}}[(\hat{a}-x)^{1-\frac{2}{p}}+(\hat{a}-x)^{1-\frac{2}{p}}]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{pq\gamma^2(\hat{c}^*)^2}{2(p-2)}[(2\hat{a})^{\frac{2}{q}}-(\hat{a}+a)^{\frac{2}{q}}+(\hat{a}-a)^{\frac{2}{q}}]. \tag{2·43}$$

另外，由于

$$\hat{\psi}(x)=\hat{c}^*\int_{-\hat{a}}^{\hat{a}}E(|x-y|)\hat{\psi}(y)\mathrm{d}y$$

$$\geqslant\hat{c}^*E(2a)\int_{-\hat{a}}^{\hat{a}}\hat{\psi}(y)\mathrm{d}y,$$

两端积分，得

$$\int_{-\hat{a}}^{\hat{a}}\hat{\psi}(x)\mathrm{d}x\geqslant2\hat{a}\hat{c}^*E(2a)\int_{-\hat{a}}^{\hat{a}}\hat{\psi}(y)\mathrm{d}y,$$

故

$$1\geqslant2\hat{a}\hat{c}^*E(2a)>2l_1\hat{c}^*E(2l_2). \tag{2·44}$$

由(2·42)、(2·43)、(2·44)诸式得

$$0<c-\hat{c}^*<\frac{\delta'}{4l_1E(2l_2)(1-\delta')},$$

其中

$$\delta'=\frac{pq\gamma^2}{2(p-2)l_1^2[E(2l_2)]^2}[(2\hat{a})^{\frac{2}{q}}-(\hat{a}+a)^{\frac{2}{q}}+(\hat{a}-a)^{\frac{2}{q}}].$$

故 $\hat{c}^*$ 是 a 的连续函数获证 .

(ⅱ)与(ⅲ)：先证不等式

$$1-\frac{1}{4\sigma a}+\frac{1}{4\sigma a}e^{-2\sigma a}-\frac{1}{2}e^{-2\sigma a}+2aE(2a)$$

$$\leqslant\frac{1}{c^*}\leqslant1-e^{-\sigma a}+2aE(a). \tag{2·45}$$

由(2·17)式知

$$\frac{1}{c^*}=\frac{\|B\psi^*\|}{\|\psi^*\|}\leqslant\|B\|\|\psi^*\|=\|B\|$$

$$=1-e^{-\sigma a}+2aE(a),$$

故(2·45)式右端不等式成立．

令 $\varphi_0(x)\equiv\frac{1}{\sqrt{2a}}(-a\leqslant x\leqslant a)$，则 $\|\varphi_0\|_{L^2}=1$，从而

$$\frac{1}{c^*}\geqslant(B\varphi_0,\varphi_0)=1-\frac{\sigma}{a}\int_a^{+\infty}\frac{e^{-ta}\sinh ta}{t^3}\mathrm{d}t. \qquad (2·46)$$

利用部分积分法，易算得

$$\int_\sigma^{+\infty}\frac{e^{-ta}\sinh ta}{t^3}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{4\sigma^2}-\frac{1}{4\sigma^2}e^{-2\sigma a}+\frac{a}{2\sigma}e^{-2\sigma a}-\frac{2a^2}{\sigma}E(2a),$$

以此式代入(2·46)式，即得(2·45)式左端不等式．故(2·45)式成立．

由 Hölder 不等式知

$$aE(\sigma)=\frac{\sigma a}{2}\int_\sigma^{+\infty}\frac{e^{-ta}}{t}\mathrm{d}t\leqslant\frac{\sigma a}{2}\left(\int_\sigma^{+\infty}e^{-2ta}\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\int_\sigma^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{\sigma a}}{2\sqrt{2}}e^{-\sigma a},$$

故

$$\lim_{a\to+\infty}aE(a)=0, \qquad (2·47)$$

$$\lim_{a\to+0}aE(a)=0. \qquad (2·48)$$

由(2·47)式知：当 $a\to+\infty$ 时(2·45)式两端的式子都趋于1，故结论(ⅲ)成立．又，由(2·48)式以及(2·45)右端的不等式知

$$c^*\geqslant[1-e^{-\sigma a}+2aE(a)]^{-1}\to+\infty,\quad 当\ a\to+0\ 时．$$

故结论(ⅱ)成立．证完．

注 4 结论Ⅳ具有明确的物理意义．首先注意，实际的核反应堆都是有限的，无限只是一种简化了的理想情况．上述无限板式核反应堆可以近似地理解为长方体反应堆，它的宽为 $2a$，它的高(设为 $2a_1$)和长(设为 $2a_2$)都很大(和 a 比较而言，即 $a_1 \gg a, a_2 \gg a$)．由原子核物理学知道(参看[85])，反应堆中的中子必有一部分从反应堆的表面逃脱出去，其逃脱量和反应堆表面的面积成正比，而中子的产生量和反应堆的体积成正比．(ⅰ)表示：当 a 增大时，易知上述长方体形反应堆的表面积和体积之比值减小(因为此比值为 $\dfrac{8a_1a_2+8a_2a+8aa_1}{8aa_1a_2}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}\approx\dfrac{1}{a}$)，因此，总的看来，中子的损失减少，故中子平均数 c 就是小一点也可能维持链式反应，此意即 c^* 减小．(ⅲ)表示：若 a 很大(反应堆很大)，则反应堆表面积和体积之比很小，从而总的看来，中子的损失很少，故只要中子平均数 c 大于 1，就可能产生链式反应．同时我们指出，由于 $c=\sum\limits_{k=1}^{N}kc_k\leqslant\sum\limits_{k=1}^{N}k$，故 c 是有界的，因此，由(ⅱ)知：反应堆太窄时，就不可能产生链式反应．这一结论在物理上是正确的．由原子物理学知(参看[85])，反应堆必须大于它的所谓"临界体积"，才能发生链式反应．

最后讨论解对参数的依赖性．

结论Ⅴ 设 $c>c^*$，则(ⅰ)当 $\hat{a}\to a$ 时必有 $\|\hat{\varphi}^*-\varphi^*\|\to 0$，这里 φ^* 和 $\hat{\varphi}^*$ 分别表方程(2·13)和方程

$$\hat{\varphi}^*(x)=\int_{-\hat{a}}^{\hat{a}}E(|x-y|)G[\hat{\varphi}^*(y)]\mathrm{d}y \qquad (-\hat{a}\leqslant x\leqslant\hat{a}) \tag{2·49}$$

的惟一的、满足条件 $0<\varphi^*(x)<1$, $0<\hat{\varphi}^*(x)<1$ 的连续解,范数 $\|\hat{\varphi}^*-\varphi^*\|_*$ 是在空间 $C[-a^*,a^*]$ 中取的,这里 $a^*=\min\{a,\hat{a}\}$.

(ii) $a<\hat{a}\Rightarrow\varphi^*(x)<\hat{\varphi}^*(x)\quad(-a\leqslant x\leqslant a)$.

证 (i) 设 $a<\hat{a}$, 令

$$\varphi_0(x)\equiv 1,\quad \varphi_n(x)=\int_{-a}^{a}E(|x-y|)G[\varphi_{n-1}(y)]\mathrm{d}y$$
$$(n=1,2,\cdots),\quad(-a\leqslant x\leqslant a)\tag{2·50}$$

$$\hat{\varphi}_0(x)\equiv 1,\quad \hat{\varphi}_n(x)=\int_{-\hat{a}}^{\hat{a}}E(|x-y|)G[\hat{\varphi}_{n-1}(y)]\mathrm{d}y$$
$$(n=1,2,\cdots),\quad(-\hat{a}\leqslant x\leqslant \hat{a}).\tag{2·51}$$

由归纳法易知

$$\varphi_n(x)\leqslant\hat{\varphi}_n(x)\quad(-a\leqslant x\leqslant a,\quad n=1,2,\cdots)$$

取极限得

$$\varphi^*(x)\leqslant\hat{\varphi}^*(x)\leqslant\hat{\varphi}_n(x)\quad(-a\leqslant x\leqslant a, n=1,2,\cdots).\tag{2·52}$$

下证

$$\lim_{\hat{a}\to a+0}\|\hat{\varphi}_n-\varphi_n\|=0\quad(n=1,2,\cdots),\tag{2·53}$$

其中范数是在 $C[-a,a]$ 中取的. 由归纳法. 当 $n=0$ 时(2·53)式显然成立. 设 $n=k$ 时成立,则由(2·50)式与(2·51)式知

$$\begin{aligned}&0\leqslant\hat{\varphi}_{k+1}(x)-\varphi_{k+1}(x)\\&=\int_{-a}^{a}E(|x-y|)\{G[\hat{\varphi}_k(y)]-G[\varphi_k(y)]\}\mathrm{d}y\\&\quad+\left(\int_{-\hat{a}}^{-a}+\int_{a}^{\hat{a}}\right)E(|x-y|)G[\hat{\varphi}_k(y)]\mathrm{d}y\\&=I_1+I_2.\end{aligned}$$

我们有

$$0<I_1\leqslant\|G(\hat{\varphi}_k)-G(\varphi_k)\|\int_{-a}^{a}E(|x-y|)\mathrm{d}y$$

$$\leqslant \| G(\hat{\varphi}_k) - G(\varphi_k) \|,$$

故当 $\hat{a} \to a+0$ 时 I_1 一致趋于零(关于 $x \in [-a, a]$). 又

$$0 < I_2 \leqslant \left(\int_{-\hat{a}}^{-a} + \int_{a}^{\hat{a}} \right) E(|x-y|) \mathrm{d}y$$

$$= \frac{\sigma}{2} \int_{\sigma}^{+\infty} \mathrm{d}t \int_{-\hat{a}}^{-a} \frac{e^{-t(x-y)}}{t} \mathrm{d}y + \frac{\sigma}{2} \int_{\sigma}^{+\infty} \mathrm{d}t \int_{a}^{\hat{a}} \frac{e^{-t(y-x)}}{t} \mathrm{d}y$$

$$= \frac{\sigma}{2} \int_{\sigma}^{+\infty} \frac{1}{t^2} [e^{-t(a+x)} + e^{-t(a-x)}] \cdot [1 - e^{-t(\hat{a}-a)}] \mathrm{d}t$$

$$< \sigma \int_{\sigma}^{+\infty} \frac{1 - e^{-t(\hat{a}-a)}}{t^2} \mathrm{d}t \quad (-a \leqslant x \leqslant a).$$

由于当 $\hat{a} \to a+0$ 时 $\int_{\sigma}^{+\infty} \frac{1 - e^{-t(\hat{a}-a)}}{t^2} \mathrm{d}t \to 0$, 故 I_2 一致趋于零(关于 $x \in [-a, a]$). 因此 $\| \hat{\varphi}_{k+1} - \varphi_k \| \to 0$ $(\hat{a} \to a+0)$. 故(2·53)式成立. $\forall \varepsilon > 0$, 取 n_0, 使 $\| \varphi^* - \varphi_{n_0} \| < \frac{\varepsilon}{2}$. 由(2·53)式知 $\exists \delta > 0$, 使当 $a < \hat{a} < a + \delta$ 时, 恒有 $\| \hat{\varphi}_{n_0} - \varphi_{n_0} \| < \frac{\varepsilon}{2}$. 于是, 由(2·53)式知($a < \hat{a} < a + \delta$ 时)

$$\| \hat{\varphi}^* - \varphi^* \| \leqslant \| \hat{\varphi}_{n_0} - \varphi^* \| \leqslant \| \hat{\varphi}_{n_0} - \varphi_{n_0} \| + \| \varphi_{n_0} - \varphi^* \|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

因此有 $\lim\limits_{\hat{a} \to a+0} \| \hat{\varphi}^* - \varphi^* \| = 0$. 同理可证 $\lim\limits_{\hat{a} \to a-0} \| \hat{\varphi}^* - \varphi^* \| = 0$, 其中范数是在 $C[-\hat{a}, \hat{a}]$ 中取的. 于是(i)获证.

当 $a < \hat{a}$ 时, 由(2·52)式知(当 $-a \leqslant x \leqslant a$ 时)

$$\hat{\varphi}^*(x) = \left(\int_{-\hat{a}}^{-a} + \int_{-a}^{a} + \int_{a}^{\hat{a}} \right) E(|x-y|) G[\hat{\varphi}^*(y)] \mathrm{d}y$$

$$\geqslant \int_{-a}^{a} E(|x-y|) G[\varphi^*(y)] \mathrm{d}y$$

$$+ \left(\int_{-\hat{a}}^{-a} + \int_{a}^{\hat{a}} \right) E(|x-y|) G[\hat{\varphi}^*(y)] \mathrm{d}y$$

$$= \varphi^*(x) + \left(\int_{-\hat{a}}^{-a} + \int_{a}^{\hat{a}}\right) E(|x-y|) G[\hat{\varphi}^*(y)] \mathrm{d}y$$

$$> \varphi^*(x).$$

(ⅱ)获证．证完．

结论Ⅵ 当 $\hat{a} \to a$ 时，必有

$$\max_{-a^* \leqslant x \leqslant a^*} |\hat{u}(x,\mu) - u(x,\mu)| \to 0 \text{(对任何} -1 \leqslant \mu \leqslant 1\text{)},$$

$a^* = \min\{a, \hat{a}\}$；

$$\sup_{\substack{-a+\varepsilon \leqslant x \leqslant a-\varepsilon \\ -1 \leqslant \mu \leqslant 1}} |\hat{u}(x,\mu) - u(x,\mu)| \to 0 \quad \text{(对任何 } \varepsilon > 0\text{)};$$

这里 $u(x,\mu)$ 表问题(2·7)～(2·8)的不恒为零的满足条件 $0 \leqslant u(x,\mu) \leqslant 1$ 的惟一解，$\hat{u}(x,\mu)$ 表在(2·7)～(2·8)中以 $\hat{a}$ 代 a 所对应问题的解．此外，若 $a < \hat{a}$，则必有 $u(x,\mu) < \hat{u}(x,\mu)$ $(-a \leqslant x \leqslant a, -1 \leqslant \mu \leqslant 1)$.

证 由结论Ⅴ的(ⅰ)与(ⅱ)，利用关系式(2·12)，即易推出结论Ⅵ的断言．

注 5 结论Ⅵ的物理意义为：能产生链式反应的概率随反应堆的加大(即 a 增大)而连续增大；因此，核反应堆愈大，愈易产生链式反应．

注 6 对于中子迁移方程的线性情况，已有许多研究，例如，见〔86〕、〔87〕、〔88〕、〔89〕．

下面讨论减算子．

定理 2.4(见〔142〕、〔156〕) 设(ⅰ)锥 P 是正规的，$A: P \to P$ 是凝聚映象(特别地，严格集压缩映象，全连续算子)，并且是减算子；(ⅱ) $A\theta > \theta$，$A^2\theta \geqslant \varepsilon_0 A\theta$，其中 $\varepsilon_0 > 0$；(ⅲ)对任何 $\theta < x \leqslant A\theta$ 及 $0 < t < 1$，存在 $\eta = \eta(x,t) > 0$，使

$$A(tx) \leqslant [t(1+\eta)]^{-1} Ax.$$

那末，A 具有惟一的正不动点 $x^* > \theta$，并且以任何 $x_0 \in P$ 为初值作迭代序列 $x_n = Ax_{n-1}(n=1,2,\cdots)$，都有

$$\|x_n - x^*\| \to 0$$

证 对于 P 中任何非相对紧的有界集 S，有

$$\alpha(A^2(S)) = \alpha(A(A(S))) \leqslant \alpha(A(S)) < \alpha(S),$$

故 $A^2: P \to P$ 也是凝聚算子，而且是增算子．令 $u_0 = \theta$，$u_n = Au_{n-1}(n=1,2,\cdots)$，易知 $u_0 \leqslant A^2 u_0$，$A^2 u_1 \leqslant u_1$．于是根据定理 2.1 知，A^2 在 $[\theta, A\theta]$（即 $[u_0, u_1]$）中必具有最大不动点 u^* 与最小不动点 u_*，且

$$\lim_{n\to\infty} u_{2n} = u_*, \quad \lim_{n\to\infty} u_{2n+1} = u^*, \tag{2·54}$$

$$\theta = u_0 \leqslant u_2 \leqslant \cdots \leqslant u_{2n} \leqslant \cdots \leqslant u_* \leqslant u^* \leqslant \cdots \leqslant u_{2n+1} \leqslant \cdots \leqslant u_3 \leqslant u_1 = A\theta. \tag{2·55}$$

因 $u_2 = A^2\theta \geqslant \varepsilon_0 A\theta > \theta$，故 $u^* \geqslant u_* > \theta$．在 $u_{2n} = Au_{2n-1}$ 和 $u_{2n+1} = Au_{2n}$ 中令 $n \to \infty$ 取极限，得 $u_* = Au^*$，$u^* = Au_*$．我们有 $u_* \geqslant u_2 \geqslant \varepsilon_0 u_1 \geqslant \varepsilon_0 u^*$．令 $t_0 = \sup\{t > 0 \mid u_* \geqslant tu^*\}$．则 $\varepsilon_0 \leqslant t_0 \leqslant 1$，$u_* \geqslant t_0 u^*$．若 $t_0 < 1$，则由条件（iii）知：存在 $\eta_0 > 0$，使

$$A(t_0 u^*) \leqslant [t_0(1+\eta_0)]^{-1} Au^* = [t_0(1+\eta_0)]^{-1} u_*,$$

故

$$u^* = Au_* \leqslant A(t_0 u^*) \leqslant [t_0(1+\eta_0)]^{-1} u_*,$$

即 $u_* \geqslant t_0(1+\eta_0)u^*$，此与 t_0 的定义矛盾．因此，有 $t_0 = 1$．由此可知 $u_* = u^*$．令 $x^* = u_* = u^*$．则 $x^* > \theta$，$x^* = Ax^*$，即 x^* 是 A 的正不动点

若有 $\bar{x} \geqslant \theta$ 使 $\bar{x} = A\bar{x}$，则 $\theta < \bar{x} \leqslant A\theta$，$\bar{x} = A^2\bar{x}$．故 $\bar{x}$ 是 A^2 在 $[\theta, A\theta]$ 中的一个不动点．根据 u_* 的最小性和 u^* 的最大

性，得 $u_* \leqslant \bar{x} \leqslant u^*$. 故 $\bar{x} = x^*$. 于是，我们证明了 A 的正不动点的惟一性.

最后，证明 $\|x_n - x^*\| \to 0$. 由于 $x_0 \geqslant \theta$，故 $\theta \leqslant Ax_0 \leqslant A\theta$，即 $u_0 \leqslant x_1 \leqslant u_1$，再以 A 作用之，得 $u_2 \leqslant x_2 \leqslant u_1$；这样继续下去，得

$$u_{2n} \leqslant x_{2n} \leqslant u_{2n-1}, \quad u_{2n} \leqslant x_{2n+1} \leqslant u_{2n+1}, \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

由此根据(2·54)式与(2·55)式，并注意到 $u_* = x^* = u^*$，应用定理 1.3，即知 $\|x_{2n} - x^*\| \to 0$，$\|x_{2n+1} - x^*\| \to 0$；故 $\|x_n - x^*\| \to 0$. 证完.

例 2.2 研究核物理中出现的一个非线性积分方程(参看〔104〕、〔105〕、〔106〕)：

$$1 = \psi(x) + \psi(x) \int_0^1 \frac{R(x, y)}{x^2 - y^2} \psi(y) \mathrm{d}y, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1. \qquad (2·56)$$

由于 $\psi(x)$ 代表某种概率，故我们感兴趣的是方程(2·56)满足条件 $0 < \psi(x) \leqslant 1$ 的解(注意，方程(2·56)的解必满足 $\psi(x) \neq 0$).

结论 假定

(i) $R(x, y)$ 在 $0 \leqslant x, y \leqslant 1$ 上连续，且当 $x > y$ 时，$R(x, y) \geqslant 0$；当 $x < y$，时，$R(x, y) \leqslant 0$；

(ii) $\exists\, v > 0$，使当 $0 \leqslant x, y \leqslant 1, x \neq y$ 时，有

$$|R(x, y)| \leqslant C |x - y|^v S(x, y),$$

其中 C 是常数，$S(x, y)$ 在 $0 \leqslant x, y \leqslant 1$ 上非负有界，且满足

$$\overline{\lim_{x, y \to +0}} \frac{S(x, y)}{x + y} < +\infty. \qquad (2·57)$$

那末，方程(2·56)在 $C[0, 1]$ 中满足 $\psi(x) > 0$ 的解存在惟一. 用 $\psi^*(x)$ 表此惟一解，则必有 $0 < \psi^*(x) \leqslant 1$；并且对 C

[0,1]中任何满足 $0<\psi_0(x)\leqslant 1$ 的函数 $\psi_0(x)$，作迭代序列

$$\psi_{n+1}(x)=\left[1+\int_0^1 \frac{R(x,y)}{x^2-y^2}\psi_n(y)\mathrm{d}y\right]^{-1}$$

$$(n=0,1,2,\cdots) \tag{2·58}$$

都必有

$$\|\psi_n-\psi^*\|\to 0 \quad (n\to\infty\text{时}). \tag{2·59}$$

证 当 $R(x,y)\equiv 0$ 时结论显然成立．故下设 $R(x,y)\not\equiv 0$．作代换

$$\varphi(x)=\frac{1}{\psi(x)}-1, \tag{2·60}$$

则方程(2·56)变成 Hammerstein 积分方程

$$\varphi(x)=\int_0^1 \frac{R(x,y)}{x^2-y^2}\cdot\frac{1}{1+\varphi(y)}\mathrm{d}y. \tag{2·61}$$

方程(2·56)满足 $0<\psi(x)\leqslant 1$ 的解，相当于方程(2·61)满足 $\varphi(x)\geqslant 0$ 的解．由条件(ⅱ)知

$$\left|\frac{R(x,y)}{x^2-y^2}\right|\leqslant\frac{C_1}{|x-y|^{1-v}} \quad (x\neq y, C_1=\text{const}),$$

故线性积分算子

$$B\varphi(x)=\int_0^1 \frac{R(x,y)}{x^2-y^2}\varphi(y)\mathrm{d}y$$

映 $C[0,1]$ 入 $C[0,1]$ 全连续(例如参看[18]引理 5.1)，从而，注意到假定(ⅰ)，知算子

$$A\varphi(x)=\int_0^1 \frac{R(x,y)}{x^2-y^2}\cdot\frac{1}{1+\varphi(y)}\mathrm{d}y \tag{2·62}$$

映锥 $P=\{\varphi\mid\varphi\in C[0,1],\varphi(x)\geqslant 0\}$ 入 P 全连续，而且显然是减算子：$\theta\leqslant\varphi_1\leqslant\varphi_2\Rightarrow A\varphi_1\geqslant A\varphi_2$ 故定理 2.4 的条件(ⅰ)满足．由于 $R(x,y)\not\equiv 0$，故 $A\theta>\theta$．又显然 $A^2\theta\geqslant\varepsilon_0 A\theta$，其中

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{1+M}, \quad M = \| A\theta \| = \max_{0 \leqslant x \leqslant 1} \int_0^1 \frac{R(x,y)}{x^2 - y^2} \mathrm{d}y.$$

故定理 2.4 的条件(ⅱ)满足．现设 $\varphi > \theta, 0 < t < 1$，有

$$A(t\varphi(x)) = \frac{1}{t} \int_0^1 \frac{R(x,y)}{x^2 - y^2} \cdot \frac{1}{t^{-1} + \varphi(y)} \mathrm{d}y. \qquad (2\cdot 63)$$

由于 $t^{-1} + \varphi(y) > 1 + \varphi(y)$，故由 $\varphi(y)$ 的连续性知

$$\min_{y \in [0,1]} \frac{t^{-1} + \varphi(y)}{1 + \varphi(y)} = 1 + \eta, \quad \eta > 0.$$

于是，再由(2·63)式知

$$A(t\varphi(x)) \leqslant \frac{1}{t(1+\eta)} \int_0^1 \frac{R(x,y)}{x^2 - y^2} \cdot \frac{1}{1 + \varphi(y)} \mathrm{d}y$$

$$= [t(1+\eta)]^{-1} A\varphi(x),$$

故定理 2.4 的条件(ⅲ)满足．于是根据定理 2.4 知，A 具有惟一的正不动点 $\varphi^*(x)$．由于 $A\theta > \theta$，故 $\varphi^*(x)$ 也是 A 在 P 中的惟一不动点．由定理 2.4 知：对任何 $\varphi_0 \in P$，作迭代序列

$$\varphi_{n+1} = A\varphi_n \quad (n = 0, 1, 2, \cdots), \qquad (2\cdot 64)$$

都有 $\| \varphi_n - \varphi^* \| \to 0$．令(代换(2·60)的逆代换)

$$\psi^*(x) = \frac{1}{1 + \varphi^*(x)}, \quad \psi_n(x) = \frac{1}{1 + \varphi_n(x)}$$

$$(n = 0, 1, 2, \cdots) \qquad (2\cdot 65)$$

则 $\psi^*(x)$ 是方程(2·56)满足 $0 < \psi(x) \leqslant 1$ 的惟一连续解(也是满足 $\psi(x) > 0$ 的惟一连续解)，并且(2·59)式成立．由(2·64)式与(2·65)式，知(2·58)式成立．证完．

例 2.3 给定一致椭圆型算子

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x) u,$$

即存在常数 $\mu_0 > 0$，使对一切 $x \in \bar{\Omega}$($\bar{\Omega}$ 表 R^N 中某有界凸区域，

$\partial\Omega \in C^{2+\mu}, 0<\mu<1)$，一切 $\xi=(\xi, \cdots, \xi_N)\in R^N$，皆有 $\sum\limits_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqslant \mu_0|\xi|^2$，这里，设 $a_{ij}(x)=a_{ji}(x)$，$b_i(x)$，$c(x)$，都属于 $C^\mu(\bar{\Omega})$ 且 $c(x)\geqslant 0$（参看〔94〕，〔93〕）。

考察半线性 Dirichlet 问题：

$$\begin{cases} Lu = [a_0(x) + \sum\limits_{i=1}^{n} a_i(x) u^{\alpha_i}]^{-1}, & x \in \Omega; \\ u\big|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \tag{2·66}$$

结论　设 $a_i(x)\in C^\mu(\bar{\Omega})(i=0,1,2,\cdots,n)$，$a_0(x)$ 恒正，$a_i(x)(i=1,2,\cdots,n)$ 非负（$\forall x\in\bar{\Omega}$）；$0<\alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_n\leqslant 1$，$n\geqslant 1$，那末，Dirichlet 问题（2·66）具有惟一的在 Ω 上恒正的属于 $C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$ 的解 $u^*(x)$，这里 $\alpha=\min\{\mu,\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$，并且以 $\bar{\Omega}$ 上任何属于 $C^\mu(\bar{\Omega})$ 的非负函数 $u_0(x)$ 为初值，用 $u_n(x)$ 表线性 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} Lu = \left\{ a_0(x) + \sum\limits_{i=1}^{n} a_i(x)[u_{n-1}(x)]^{\alpha_i} \right\}^{-1}, & x \in \Omega; \\ u\big|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \tag{2·67}$$

属于 $C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$ 的惟一解，则必然 $u_n(x)$ 在 $\bar{\Omega}$ 上一致收敛于 $u^*(x)$。

证　众所周知，问题（2·66）的解等价于 Hammerstein 积分算子

$$Au(x) = \int_{\bar{\Omega}} G(x,y) f(y,\varphi(y))\mathrm{d}y \tag{2·68}$$

的不动点，这里 $G(x,y)$ 表 L 对 $\bar{\Omega}$ 的 Dirichlet 问题的 Green 函数，$f(x,u)=[a_0(x)+\sum\limits_{i=1}^{n} a_i(x)u^{\alpha_i}]^{-1}$。显然 Немыцкий 算子 $\mathbf{f}\varphi(x)=f(x,\varphi(x))$ 映锥 $P=\{\varphi\in C(\bar{\Omega})\mid \varphi(x)\geqslant 0\}$ 入 P

连续、有界．由于 $G(x,y)$满足不等式(例如，见〔77〕)

$$0<G(x,y)<\begin{cases} M_0|x-y|^{2-N}, & N>2; \\ M_0|\ln|x-y||, & N=2, \end{cases} \quad \forall x,y\in\Omega, x\neq y,$$

$(M_0=\text{const})$，故易知(例如，见〔18〕引理 5.1)线性积分算子

$$Gv(x)=\int_{\bar{\Omega}} G(x,y)v(y)\mathrm{d}y \qquad (2\cdot 69)$$

映 P 入 P 全连续．于是，算子 $A=G\mathbf{f}$ 映 P 入 P 全连续，而且显然是减算子，故定理 2.4 的条件(ⅰ)满足．条件(ⅱ)是显然满足的．下证定理 2.4 的条件(ⅲ)满足．$\forall\varphi>\theta, 0<t<1$，有

$$A(t\varphi(x))\leqslant t^{-1}\int_{\bar{\Omega}} G(x,y)\left\{t^{-1}a_0(y)\right.$$

$$\left.+\sum_{i=1}^{n}a_i(y)[\varphi(y)]^{\alpha_i}\right\}^{-1}\mathrm{d}y. \qquad (2\cdot 70)$$

因 $a_0(y)>0(\forall y\in\bar{\Omega}), 0<t<1$，故

$$t^{-1}a_0(y)+\sum_{i=1}^{n}a_i(y)[\varphi(x)]^{\alpha_i}>a_0(y)+\sum_{i=1}^{n}a_i(y)[\varphi(y)]^{\alpha_i},$$

$$\forall y\in\bar{\Omega},$$

从而，由连续性知

$$\min_{y\in\bar{\Omega}}\frac{t^{-1}a_0(y)+\sum_{i=1}^{n}a_i(y)[\varphi(y)]^{\alpha_i}}{a_0(y)+\sum_{i=1}^{n}a_i(y)[\varphi(y)]^{\alpha_i}}=1+\eta, \quad \eta>0.$$

由(2·70)式得

$$A(t\varphi(x))\leqslant\frac{1}{t(1+\eta)}\int_{\bar{\Omega}} G(x,y)\left\{a_0(y)\right.$$

$$\left.+\sum_{i=1}^{n}a_i(y)[\varphi(y)]^{\alpha_i}\right\}^{-1}\mathrm{d}y$$

$$=[t(1+\eta)]^{-1}A\varphi(x),$$

故条件(ⅲ)满足．于是由定理 2.4 知，A 在 P 中具有惟一的正不动点 $u^*(x)$($u^*(x)\geqslant 0$ 不恒为零)．由 $u^*=G\mathbf{f}u^*$ 知，$u^*(x)>0$，$\forall x\in\Omega$．下证 $u^*(x)\in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$．事实上，由 $\mathbf{f}u^*\in C(\bar{\Omega})$ 知，$u^*=G\mathbf{f}u^*\in C^{1+\mu'}(\bar{\Omega})$，$(0<\mu'<1)$(参看〔79〕)．于是又有 $\mathbf{f}u^*\in C^{\alpha}(\bar{\Omega})$(利用〔96〕引理 2)，从而 $u^*=G\mathbf{f}u^*\in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$(参看〔94〕)．

最后根据定理 2.4 知：对任何 $u_0(x)\in P$，作迭代序列

$$u_n(x)=\int_{\bar{\Omega}}G(x,y)f(y,u_{n-1}(y))\mathrm{d}y$$

$$(n=1,2,\cdots),\tag{2·71}$$

$u_n(x)$ 在 $\bar{\Omega}$ 上一致收敛于 $u^*(x)$．当 $u_0(x)$ 属于 $C^{\mu}(\bar{\Omega})$ 时，有 $\mathbf{f}u_0\in C^{\alpha}(\bar{\Omega})$，从而由(2·71)知 $u_1(x)\in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$；再由(2·71)又知 $u_2(x)\in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$；这样继续下去，知 $u_n(x)\in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$ $(n=1,2,\cdots)$；并且由(2·71)式知，$u_n(x)$ 是 Dirichlet 问题(2·67)的解．证完．

定理 2.5(见〔81〕)　设(ⅰ′)锥 P 是正规的，$A:P\to P$ 是减算子；(ⅱ′)$A\theta>\theta$，$A^2\theta\geqslant\varepsilon_0 A\theta$，其中 $\varepsilon_0>0$；(ⅲ′)对任何 $0<a<b<1$，存在 $\eta=\eta(a,b)>0$ 使

$$A(tx)\leqslant[t(1+\eta)]^{-1}Ax,\quad \forall a\leqslant t\leqslant b,\quad \theta<x\leqslant A\theta.$$

那末，A 具有惟一的正不动点 $x^*>\theta$，并且，以任何 $x_0\in P$ 为初值作迭代序列 $x_n=Ax_{n-1}$ $(n=1,2,3,\cdots)$，都有

$$\|x_n-x^*\|\to 0.$$

证　令 $u_0=\theta$，$u_n=Au_{n-1}$ $(n=1,2,3,\cdots)$．由于 A 是减算子，易知

$$\theta=u_0\leqslant u_2\leqslant\cdots\leqslant u_{2n}\leqslant\cdots\leqslant u_{2n+1}\leqslant\cdots\leqslant u_3\leqslant u_1=A\theta.\tag{2·72}$$

由条件(ⅱ′),我们有

$$u_2 \geqslant \varepsilon_0 u_1 > \theta. \tag{2·73}$$

于是,由(2·72)式和(2·73)式,得

$$u_{2n} \geqslant \varepsilon_0 u_{2n+1} \quad (n=1,2,3,\cdots). \tag{2·74}$$

令 $t_n = \sup\{t>0 \mid u_{2n} \geqslant t u_{2n+1}\}$,则

$$u_{2n} \geqslant t_n u_{2n+1} \quad (n=1,2,3,\cdots). \tag{2·75}$$

并且,由(2·72)式和(2·74)式并注意到 $u_{2n+2} \geqslant u_{2n} \geqslant t_n u_{2n+1} \geqslant t_n u_{2n+3}$,得

$$0 < \varepsilon_0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant \cdots \leqslant t_n \leqslant \cdots \leqslant 1. \tag{2·76}$$

因此 $t_n \to t^*$,并且 $\varepsilon_0 \leqslant t^* \leqslant 1$. 下证

$$t^* = 1. \tag{2·77}$$

事实上,若 $t^* < 1$,则 $\varepsilon_0 \leqslant t_n \leqslant t^*$ $(n=1,2,3,\cdots)$. 于是,由(2·72)式及条件(ⅲ′)知:存在 $\eta>0$,使

$$u_{2n+1} = Au_{2n} \leqslant A(t_n u_{2n+1}) \leqslant [t_n(1+\eta)]^{-1} Au_{2n+1}$$
$$= [t_n(1+\eta)]^{-1} u_{2n+2},$$

从而

$$u_{2n+2} \geqslant t_n(1+\eta) u_{2n+1} \geqslant t_n(1+\eta) u_{2n+3},$$

由此可知

$$t_{n+1} \geqslant t_n(1+\eta), \ (n=1,2,3,\cdots),$$

故得

$$t_{n+1} \geqslant t_1(1+\eta)^n \geqslant \varepsilon_0(1+\eta)^n, \ (n=1,2,3,\cdots).$$

因此 $t_n \to +\infty$,此与(2·76)式矛盾. 故(2·77)式成立. 由(2·72)式和(2·75)式,我们有

$$\theta \leqslant u_{2n+2p} - u_{2n} \leqslant u_{2n+1} - u_{2n} \leqslant (1-t_n) u_{2n+1} \leqslant (1-t_n) A\theta,$$

故

$$\|u_{2n+2p}-u_{2n}\|\leqslant N(1-t_n)\|A\theta\|,\quad (n,p=1,2,3,\cdots)$$

其中 N 表 P 的正规常数．由此，注意到(2·77)式即知 $u_{2n}\to u_*\in E$．同理可证 $u_{2n+1}\to u^*\in E$．由(2·72)式得

$$u_{2n}\leqslant u_*\leqslant u^*\leqslant u_{2n+1}\quad (n=1,2,3,\cdots),$$

从而

$$\theta\leqslant u^*-u_*\leqslant u_{2n+1}-u_{2n}\leqslant(1-t_n)A\theta\quad (n=1,2,3,\cdots),$$

$$\|u^*-u_*\|\leqslant N(1-t_n)\|A\theta\|\quad (n=1,2,3,\cdots),$$

故 $u_*=u^*$．令 $x^*=u_*=u^*$．则 $x^*>\theta$，且

$$u_{2n}\leqslant x^*\leqslant u_{2n+1}\quad (n=1,2,3,\cdots),$$

于是

$$u_{2n+1}=Au_{2n}\geqslant Ax^*\geqslant Au_{2n+1}=u_{2n+2}\quad (n=1,2,3,\cdots).$$

再令 $n\to\infty$ 取极限，即得 $x^*\leqslant Ax^*\leqslant x^*$．因此 $x^*=Ax^*$，即 x^* 是 A 的正不动点．

若 $\bar{x}\geqslant\theta$ 使 $\bar{x}=A\bar{x}$，则 $u_0=\theta\leqslant\bar{x}=A\bar{x}\leqslant A\theta=u_1$．由归纳法易知 $u_{2n}\leqslant\bar{x}\leqslant u_{2n+1}(n=1,2,\cdots)$．令 $n\to\infty$ 取极限，得 $\bar{x}=x^*$．这就证明了 A 的正不动点的惟一性．

最后，$\|x_n-x^*\|\to 0$ 的证明同于定理 2.4 对应部分的证明，从略．证完．

注 7　定理2.5不要求算子 A 具有紧性和连续性，但条件(ⅲ′)比定理 2.4 中的条件(ⅲ)强．关于非紧增算子和非紧减算子的研究，还见〔80〕、〔170〕．

§3　凹算子与凸算子

定义 3.1　设 P 是实 Banach 空间 E 中某锥，算子 $A:P\to$

P, $u_0>\theta$(即 $u_0\in P$, $u_0\neq\theta$). 如果

(ⅰ)对于任何 $x>\theta$, 都存在 $\alpha=\alpha(x)>0$, $\beta=\beta(x)>0$, 使

$$\alpha u_0\leqslant Ax\leqslant\beta u_0; \tag{3·1}$$

(ⅱ)对于任何满足 $\alpha_1 u_0\leqslant x\leqslant\beta_1 u_0$ 的 $x\in P$(这里 $\alpha_1=\alpha_1(x)>0$, $\beta_1=\beta_1(x)>0$), 以及 $0<t<1$, 都有 $\eta=\eta(x,t)>0$ 存在, 使

$$A(tx)\geqslant(1+\eta)tAx. \tag{3·2}$$

则称 A 是 $\boldsymbol{u_0}$-**凹算子**.

定义 3.2 设 P 是实 Banach 空间 E 中某锥, 算子 $A:P\to P$, $u_0>\theta$. 如果

(ⅰ)对于任何 $x>\theta$, 都存在 $\alpha=\alpha(x)>0$, $\beta=\beta(x)>0$, 使(3·1)式成立

(ⅱ)对于任何满足 $\alpha_1 u_0\leqslant x\leqslant\beta_1 u_0$ 的 $x\in P$(这里 $\alpha_1=\alpha_1(x)>0$, $\beta_1=\beta_1(x)>0$), 以及 $0<t<1$, 都有 $\eta=\eta(x,t)>0$ 存在, 使

$$A(tx)\leqslant(1-\eta)tAx. \tag{3·3}$$

则称 A 是 $\boldsymbol{u_0}$-**凸算子**.

定义 3.3 设 P 是实 Banach 空间 E 中某体锥, $A:P\to P$.

(ⅰ)如果对于任何 $x>\theta$ 及 $0<t<1$, 均有

$$A(tx)\gg tAx, \tag{3·4}$$

则称 A 是**强次线性的**;

(ⅱ)如果对于任何 $x>\theta$ 及 $0<t<1$, 均有

$$A(tx)\ll tAx, \tag{3·5}$$

则称 A 是**强超线性的**.

另外, 若 $x<y$(即 $x\leqslant y$, $x\neq y$)$\Rightarrow Ax\ll Ay$, 则称 A 是**强增的**; 若 $x<y\Rightarrow Ay-Ax\leqslant\tau u_0$, 其中 $\tau=\tau(x,y)>0$, 则称 A 是

u_0-增的．

显然，若 A 是强增的，则 A 必是 u_0-增的，这里 u_0 可为 P° 中任何元素．

例 3.1 我们证明，在例 2.2 的结论的条件下，算子(2·62)式的平方 A^2 是 u_0-凹算子，这里 $u_0=\int_0^1 \frac{R(x,y)}{x^2-y^2}\mathrm{d}y$(当然假定 $R(x,y)\neq 0$，这时 $u_0(x)\geqslant 0,\neq 0$，即 $u_0>\theta$)．事实上，对于任何 $\varphi\geqslant\theta$，有

$$A^2\varphi(x)=\int_0^1 \frac{R(x,y)}{x^2-y^2}\cdot\frac{1}{1+A\varphi(x)}\mathrm{d}y,$$

从而 $\alpha u_0\leqslant A^2\varphi\leqslant\beta u_0$，其中 $\beta=1,\ \alpha=\frac{1}{1+M},\ M=\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}A\varphi(x)>0$，故(3·1)式满足．其次，当 $\varphi\geqslant\theta, 0<t<1$，时，有

$$\begin{aligned}A[t\varphi(x)]&=\int_0^1 \frac{R(x,y)}{x^2-y^2}\cdot\frac{1}{1+t\varphi(y)}\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{t}\int_0^1 \frac{R(x,y)}{x^2-y^2}\cdot\frac{1}{\frac{1}{t}+\varphi(y)}\mathrm{d}y\\&\leqslant\frac{1}{t}\int_0^1 \frac{R(x,y)}{x^2-y^2}\cdot\frac{1}{1+\varphi(y)}\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{t}A\varphi(x),\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}A^2(t\varphi(x))&\geqslant\left[\frac{1}{t}A\varphi(x)\right]=\int_0^1 \frac{R(x,y)}{x^2-y^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{t}A\varphi(y)}\mathrm{d}y\\&=t\int_0^1 \frac{R(x,y)}{x^2-y^2}\cdot\frac{1}{t+A\varphi(y)}\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

由于 $t+A\varphi(x)<1+A\varphi(x)$，故

$$\min_{0\leqslant x\leqslant 1}\frac{1+A\varphi(x)}{t+A\varphi(x)}=1+\eta,\quad \eta>0.$$

于是

$$A^2[t\varphi(x)] \geqslant t(1+\eta)\int_0^1 \frac{R(x,y)}{x^2-y^2}\cdot\frac{1}{1+A\varphi(y)}\mathrm{d}y$$

$$=(1+\eta)tA^2\varphi(x).$$

故(3·2)式满足．因此 A^2 是 u_0-凹算子．

定理3.1 设 P 是实Banach空间 E 中某体锥，$u_0\in P^\circ$．则

(ⅰ)若 A 是强次线性的，则 A 必为 u_0-凹算子；

(ⅱ)若 A 是强超线性的，则 A 必为 u_0-凸算子．

证 只证(ⅰ)，(ⅱ)可类似证之．设 A 是强次线性算子．对 $x>\theta$，由(3·4)式有

$$Ax=A\left(\frac{1}{2}\cdot 2x\right)\gg\frac{1}{2}A(2x)\geqslant\theta.$$

因此 $Ax\in P^\circ$．于是 $\exists\,\alpha>0$(充分小)，使 $Ax-\alpha u_0\in P$，即 $Ax\geqslant\alpha u_0$．另外，因 $u_0\in P^\circ$，故 $\exists\,\beta>0$(充分大)，使 $u_0-\frac{1}{\beta}Ax\in P$，从而 $Ax\leqslant\beta u_0$．于是(3·1)式成立．

$\forall\,x>\theta$ 及 $0<t<1$，由(3·4)式知 $A(tx)-tAx\in P^\circ$．于是 $\exists\,\eta=\eta(x,t)>0$(充分小)，使 $A(tx)-tAx-\eta tAx\in P$，即 $A(tx)\geqslant(1+\eta)tAx$．故(3·2)式成立，于是，$A$ 是 u_0-凹算子，证完．

注1 若 $u_0>\theta$，则一般来说，u_0-凹算子(凸算子)不一定是强次线性的(强超线性的)．例如，考虑例3.1中的算子 A^2，它是 u_0-凹算子．若设 $R(x,y)\not\equiv 0$，但 $\exists\,x_0\in[0,1]$，使 $R(x_0,y)\equiv 0$ $(0\leqslant y\leqslant 1)$．则对任何 $\varphi>\theta$，$0<t<1$ 有

$$A^2[t\varphi(x_0)]=\int_0^1\frac{R(x_0,y)}{x_0^2-y^2}\cdot\frac{1}{1+A[t\varphi(x)]}\mathrm{d}y=0,$$

$$tA^2[\varphi(x_0)]=t\int_0^1\frac{R(x_0,y)}{x_0^2-y^2}\cdot\frac{1}{1+A[\varphi(x)]}\mathrm{d}y=0,$$

因此 $A^2(t\varphi)-tA^2\varphi\overline{\in}P^\circ$(注意,$P=\{\varphi|\varphi\in C[0,1],\varphi(x)\geqslant 0\}$).故 A^2 不是强次线性的.

注 2 u_0-凸算子(特别地,强超线性算子)若在 $x=\theta$ 处连续,则必满足 $A\theta=\theta$.事实上,由(3·3)式知 $A(tx)\leqslant tAx$,令 $t\to+0$ 取极限,注意到 A 在 $x=\theta$ 的连续性,得 $A\theta\leqslant\theta$.但 $A\theta\geqslant\theta$(因假定 $A:P\to P$),故 $A\theta=\theta$.

u_0-凹算子(特别地,强次线性算子)即使全连续,也不一定有 $A\theta=\theta$,而可能 $A\theta>\theta$.例如,例 3.1 中的算子 A^2 就是 u_0-凹算子,而且是全连续的,但 $A^2\theta>\theta$.

例 3.2 考察非线性积分算子

$$A\varphi(x)=\int_G k(x,y)[\varphi(y)]^\alpha \mathrm{d}y \tag{3·6}$$

其中 G 表 N 维欧氏空间 R^N 中某有界闭域,$k(x,y)$ 在 $G\times G$ 上恒正,连续,$\alpha>0$,$\alpha\neq1$.令 $P=\{\varphi|\varphi\in C(G),\varphi(x)\geqslant0\}$.显然,$A:P\to P$ 全连续.

(i)若 $0<\alpha<1$,则当 $\varphi>\theta$,$0<t<1$ 时,

$$A[t\varphi(x)]-tA[\varphi(x)]=(t^\alpha-t)\int_0^1 k(x,y)[\varphi(y)]^\alpha \mathrm{d}y$$

$$\geqslant m(t^\alpha-t)\int_0^1[\varphi(y)]^\alpha \mathrm{d}y=\beta>0,$$

其中 $m=\min\limits_{x,y\in G}k(x,y)>0$.故 $A(t\varphi)-tA\varphi\in P^\circ$,即 $A(t\varphi)\gg tA\varphi$.这时 A 是强次线性的;

(ii)若 $\alpha>1$,则当 $\varphi>\theta$, $0<t<1$ 时

$$tA[\varphi(x)]-A[t\varphi(x)]=(t-t^\alpha)\int_0^1 k(x,y)[\varphi(y)]^\alpha \mathrm{d}y$$

$$\geqslant m(t-t^\alpha)\int_0^1[\varphi(y)]^\alpha \mathrm{d}y=\beta^*>0,$$

故 $A(t\varphi)\ll tA\varphi$.这时 A 是强超线性的.

从这个例子可以看出“次线性”与“超线性”名称的来源．一般来说，u_0-凹算子（特别地，强次线性算子）具有较弱的非线性，而 u_0-凸算子（特别地，强超线性算子）具有较强的非线性．

定理3.2 设 A 是 u_0-凹算子，而且是增算子，则 A 至多只有一个正的（即 $>\theta$ 的）不动点．

证 设 $x^{(1)}>\theta, x^{(2)}>\theta$，使 $Ax^{(1)}=x^{(1)}, Ax^{(2)}=x^{(2)}$．由(3·1)式知

$$x^{(1)}=Ax^{(1)}\geqslant\alpha^{(1)}u_0=\frac{\alpha^{(1)}}{\beta^{(2)}}\cdot\beta^{(2)}u_0\geqslant\frac{\alpha^{(1)}}{\beta^{(2)}}Ax^{(2)}=\frac{\alpha^{(1)}}{\beta^{(2)}}x^{(2)}.$$

于是，令 $t_0=\sup\{t\mid x^{(1)}\geqslant tx^{(2)}\}$，知 $0<t_0<+\infty$．下证 $t_0\geqslant 1$．事实上，若 $t_0<1$，则由 $x^{(1)}\geqslant t_0x^{(2)}$，并注意到由(3·2)式知 $\exists\,\eta_0>0$，使 $A(t_0x^{(2)})\geqslant(1+\eta_0)t_0Ax^{(2)}$，得

$$\begin{aligned}x^{(1)}=Ax^{(1)}&\geqslant A(t_0x^{(2)})\geqslant(1+\eta_0)t_0Ax^{(2)}\\&=(1+\eta_0)t_0x^{(2)}.\end{aligned}$$

由于$(1+\eta_0)t_0>t_0$，此显然与 t_0 的定义矛盾．于是 $t_0\geqslant 1$，即 $x^{(1)}\geqslant x^{(2)}$．

同理可证 $x^{(2)}\geqslant x^{(1)}$．因此 $x^{(1)}=x^{(2)}$．证完．

定理3.3 设 A 是 u_0-凹算子，而且是增算子．如果 A 具有正不动点 x^*，并且锥 P 是正规的，那末必存在 $R>r>0$，使

$$Ax\not\leqslant x\quad(x\in P,\ 0<\|x\|<r\text{ 时}),\tag{3·7}$$

$$Ax\not\geqslant x\quad(x\in P,\ \|x\|>R\text{ 时}).\tag{3·8}$$

证 先证

$$x>\theta,\ Ax\leqslant x\Rightarrow x\geqslant x^*.\tag{3·9}$$

事实上，由(3·1)式知

$$x\geqslant Ax\geqslant\alpha(x)u_0=\frac{\alpha(x)}{\beta(x^*)}\cdot\beta(x^*)u_0$$

$$\geqslant \frac{\alpha(x)}{\beta(x^*)} Ax^* = \frac{\alpha(x)}{\beta(x^*)} x^*,$$

于是令 $t_0 = \sup\{t \mid x \geqslant tx^*\}$，知 $0 < t_0 < +\infty$. 下证 $t_0 \geqslant 1$. 若不然 $t_0 < 1$，则由(3·2)式知，$\exists\ \eta_0 > 0$，使

$$x \geqslant Ax \geqslant A(t_0 x^*) \geqslant (1+\eta_0) t_0 Ax^* = (1+\eta_0) t_0 x^*,$$

此显然与 t_0 的定义矛盾．于是 $t_0 \geqslant 1$，故(3·9)式成立．

同理可证：

$$x > \theta,\ \ Ax \geqslant x \Rightarrow x \leqslant x^*. \tag{3·10}$$

令 $r = \inf_{z \in P} \| z + x^* \|$，则 $r > 0$（因若 $r = 0$，则 $\exists\ z_n \in P$，使 $\| z_n + x^* \| \to 0$，从而 $z_n \to -x^* \in P$，此与 $x^* > 0$ 矛盾）. 于是此 r 即满足(3·7)式．事实上，当 $x \in P$，$0 < \|x\| < r$ 时，必有 $x \ngeq x^*$（因若 $x \geqslant x^*$，则 $x = z + x^*$，$z = x - x^* \geqslant \theta$，从而 $\|x\| = \|z + x^*\| \geqslant r$）. 于是由(3·9)式知 $Ax \nleq x$.

由于 P 是正规的，故区间 $[\theta, x^*]$ 有界．令 $R = \lim\limits_{\theta \leqslant x \leqslant x^*} \|z\|$，则此 R 即满足(3·8)式．事实上，当 $x \in P$，$\|x\| > R$ 时，必有 $x \nleq x^*$，故由(3·10)式，即知 $Ax \ngeq x$. 证完．

注 3　条件(3·7)式与(3·8)式即所谓"锥压缩". 在本章 §4 中将看到，如果 A 还是全连续的，那末条件(3·7)式与(3·8)式就保证了 A 具有正不动点：因此可以说：增的全连续 u_0-凹算子具有（惟一）不动点的充分必要条件是它是锥压缩的．

定理 3.4　设 A 是凹算子而且是增算子．如果 A 具有正不动点 x^*，那末对于任何 $x_0 > \theta$，作迭代

$$x_{n+1} = Ax_n \quad (n = 0, 1, 2, \cdots), \tag{3·11}$$

都必有

$$\| x_n - x^* \|_{u_0} \to 0 \quad (n \to \infty). \tag{3·12}$$

证 任取 $0<t_1<1$，令

$$v_0=t_1x^*,\quad v_{n+1}=Av_n\quad(n=0,1,2,\cdots).\tag{3·13}$$

显然

$$t_1x^*=v_0\leqslant v_1\leqslant v_2\leqslant\cdots\leqslant v_n\leqslant\cdots\leqslant x^*.\tag{3·14}$$

令 $\rho_n=\sup\{t\mid tx^*\leqslant v_n\}$，很明显

$$0<t_1=\rho_0\leqslant\rho_1\leqslant\rho_2\leqslant\cdots\leqslant\rho_n\leqslant\cdots\leqslant 1.\tag{3·15}$$

又

$$\rho_nx^*\leqslant v_n\quad(n=0,1,2,\cdots).\tag{3·16}$$

我们证明

$$\lim_{n\to\infty}\rho_n=1.\tag{3·17}$$

若不然，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\rho_n=\gamma<1\ (\gamma\geqslant t_1>0)$．于是由 A 的 u_0-凹性知，$\exists\,\eta>0$，使

$$A(\gamma x^*)\geqslant(1+\eta)\gamma Ax^*=(1+\eta)\gamma x^*.$$

从而当 $0<t\leqslant\gamma$ 时，有

$$A(tx^*)=A\left(\frac{t}{\gamma}\cdot\gamma x^*\right)\geqslant\frac{t}{\gamma}A(\gamma x^*)\geqslant(1+\eta)tx^*,$$

特别地，有

$$A(\rho_nx^*)\geqslant(1+\eta)\rho_nx^*\quad(n=0,1,2,\cdots).\tag{3·18}$$

由(3·16)知(注意到 A 是增算子)

$$v_{n+1}=Av_n\geqslant A(\rho_nx^*)\geqslant(1+\eta)\rho_nx^*,$$

由此可知

$$\rho_{n+1}\geqslant(1+\eta)\rho_n\quad(n=0,1,2,\cdots),$$

从而

$$\rho_n\geqslant(1+\eta)^n\rho_0\quad(n=0,1,2,\cdots),$$

此显然与(3·15)式矛盾．故(3·17)式成立．

现任取 $t_2>1$，令

$$w_0=t_2x^*,\quad w_{n+1}=Aw_n\quad(n=0,1,2,\cdots).\tag{3·19}$$

显然

$$t_2x^*=w_0\geqslant w_1\geqslant w_2\geqslant\cdots\geqslant w_n\geqslant\cdots\geqslant x^*.\tag{3·20}$$

令 $\xi_n=\inf\{t\mid tx^*\geqslant w_n\}$，很明显

$$t_2=\xi_0\geqslant\xi_1\geqslant\xi_2\geqslant\cdots\geqslant\xi_n\geqslant\cdots\geqslant 1,\tag{3·21}$$

$$\xi_nx^*\geqslant w_n\quad(n=0,1,2,\cdots).\tag{3·22}$$

我们证明

$$\lim_{n\to\infty}\xi_n=1.\tag{3·23}$$

若不然，设 $\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n=\gamma_0>1$. 由 A 的 u_0-凹性知，$\exists\ \eta_0>0$，使

$$Ax^*=A\left(\frac{1}{\gamma_0}\gamma_0x^*\right)\geqslant\frac{1+\eta_0}{\gamma_0}A(\gamma_0x^*),$$

即

$$A(\gamma_0x^*)\leqslant\frac{\gamma_0}{1+\eta_0}Ax^*=\frac{\gamma_0x^*}{1+\eta_0},$$

由此可知，当 $t\geqslant\gamma_0$ 时

$$A(\gamma_0x^*)=A\left(\frac{\gamma_0}{t}\cdot tx^*\right)\geqslant\frac{\gamma_0}{t}A(tx^*),$$

从而

$$A(tx^*)\leqslant\frac{t}{\gamma_0}A(\gamma_0x^*)\leqslant\frac{tx^*}{1+\eta_0}.$$

特别有

$$A(\xi_nx^*)\leqslant\frac{\xi_nx^*}{1+\eta_0}\quad(n=0,1,2,\cdots),$$

再注意到(3·22)式得

$$w_{n+1}=Aw_n\leqslant A(\xi_nx^*)\leqslant\frac{\xi_nx^*}{1+\eta_0}\quad(n=0,1,2,\cdots),$$

从而

$$\xi_{n+1} \leqslant \frac{\xi_n}{1+\eta_0} \quad (n=0,1,2,\cdots),$$

由此得

$$\xi_n \leqslant \frac{\xi_n}{(1+\eta_0)^n} \quad (n=0,1,2,\cdots),$$

此显然与(3·21)式矛盾．故(3·23)式成立．

现设 $x_0 > \theta$, 并作迭代序列(3·11)．由(3·1)式知

$$\alpha_0 u_0 \leqslant x^* = Ax^* \leqslant \beta_0 u_0, \tag{3·24}$$

$$\alpha_1 u_0 \leqslant x_1 = Ax_0 \leqslant \beta_1 u_0, \tag{3·25}$$

其中 $\alpha_0 > 0, \beta_0 > 0, \alpha_1 > 0, \beta_1 > 0$. 由此知

$$\frac{\alpha_1}{\beta_0} x^* \leqslant x_1 \leqslant \frac{\beta_1}{\alpha_0} x^*.$$

今取 $0 < t_1 < \min\left\{1, \frac{\alpha_1}{\beta_0}\right\}, t_2 > \max\left\{1, \frac{\beta_1}{\alpha_0}\right\}$, 则

$$0 < t_1 < 1, \quad t_2 > 1, \quad v_0 = t_1 x^* \leqslant x_1 \leqslant t_2 x^* = w_0,$$

由此，根据 A 的增性得(注意到(3·16)式与(3·22)式)

$$\rho_n x^* \leqslant v_n \leqslant x_{n+1} \leqslant w_n \leqslant \xi_n x^* \quad (n=0,1,2,\cdots),$$

再根据(3·24)式知(注意到(3·15)式与(3·21)式)

$$(\rho_n - 1)\beta_0 u_0 \leqslant (\rho_n - 1)x^* \leqslant x_{n+1} - x^* \leqslant (\xi_n - 1)x^*$$
$$\leqslant (\xi_n - 1)\beta_0 u_0 \qquad (n=0,1,2,\cdots),$$

由此，注意到(3·17)式与(3·23)式，即得(3·12)式．证完．

系　若更设 P 是正规的，则必有

$$\|x_n - x^*\| \to 0 \quad (n \to \infty) \tag{3·26}$$

证　由(3·12)式，利用本章定理 1·4 即得(3·26)式．证完．

定理 3.5　设 A 是 u_0-凸算子，而且是增算子，则 A 至多只

有一个正的(即$>\theta$的)不动点．

证 设$x^{(1)}>\theta, x^{(2)}>\theta$使$Ax^{(1)}=x^{(1)}, Ax^{(2)}=x^{(2)}$．由(3·1)式知

$$x^{(1)}=Ax^{(1)}\leqslant\beta^{(1)}u_0\leqslant\frac{\beta^{(1)}}{\alpha^{(2)}}Ax^{(2)}=\frac{\beta^{(1)}}{\alpha^{(2)}}x^{(2)}.$$

令$t_0=\inf\{t\mid x^{(1)}\leqslant tx^{(2)}\}$，由上式及$x^{(1)}>\theta$知$0<t<+\infty$．下证$t_0\geqslant1$．事实上，若$t_0<1$，则由$x^{(1)}\leqslant t_0x^{(2)}$并注意到(3·3)式得

$$x^{(1)}=Ax^{(1)}\leqslant A(t_0x^{(2)})\leqslant(1-\eta_0)t_0Ax^{(2)}=(1-\eta_0)t_0x^{(2)},$$

其中$\eta_0>0$，此与t_0的定义矛盾．故$t_0\geqslant1$，从而$x^{(1)}\leqslant x^{(2)}$．同理可证$x^{(2)}\leqslant x^{(1)}$．于是$x^{(1)}=x^{(2)}$．证完．

注4 定理3.5是郭林获得的．注意，若只假定A是u_0-增算子，则A可能有多个正不动点．例如，设$E=R^2=\{x\mid x=(x_1,x_2)\}$是二维欧式空间．令

$$P=\{x\mid x=(x_1,x_2), x_1\geqslant0, x_2\geqslant0\}.$$

又令

$$Ax=\left(x_1^2+x_2,\ \frac{1}{16}x_1+4x_2^2\right),\quad x=(x_1,x_2).$$

容易验证A是u_0-增算子，这里$u_0=(1,1)$．不难推出，A具有三个正不动点$x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}$：

$$x^{(1)}=\left(\frac{3}{4},\frac{3}{16}\right),\quad x^{(2)}=\left(\frac{5+\sqrt5}{8},\ \frac{5-\sqrt5}{32}\right)$$

$$x^{(3)}=\left(\frac{5-\sqrt5}{8},\ \frac{5+\sqrt5}{32}\right).$$

显然$x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}$之间互相不能比较(即关系式$x^{(1)}<x^{(2)}$，$x^{(1)}>x^{(2)}, x^{(1)}<x^{(3)}, x^{(1)}>x^{(3)}, x^{(2)}<x^{(3)}, x^{(2)}>x^{(3)}$之中

任何一个都不成立).

§4 锥压缩与锥拉伸不动点定理

首先,我们把 Banach 空间 E 中有界开集上的全连续算子的 Leray - Schauder 度的概念,推广到锥 P 中有界开集上的全连续算子的情形,从而得出算子的不动点指数的概念(参看〔78〕).

由 Dugundji 定理(见第一章引理 2.3)知,实 Banach 空间 E 中任何非空凸闭集都是 E 的收缩核;从而,E 中任何锥 P 都是 E 的收缩核.

定理 4.1 设 X 是实 Banach 空间 E 中一个收缩核. 对于 X 的每个有界(相对)开集 $U\subset X$,设 $A:\overline{U}\rightarrow X$ 全连续且在∂U 上没有不动点(即 $Ax\neq x$),则存在整数 $i(A,U,X)$(称为 A 在 U 上关于 X 的不动点指数),满足下列条件:

(ⅰ)正规性:若 $A:\overline{U}\rightarrow U$ 是常算子,则 $i(A,U,X)=1$;

(ⅱ)可加性:若 U_1 与 U_2 是 U 的互不相交的子集,都是开的(关于 X),并且 A 在 $\overline{U}\setminus(U_1\cup U_2)$上没有不动点,则

$$i(A,U,X)=i(A,U_1,X)+i(A,U_2,X),$$

这里 $i(A,U_k,X)=i(A|_{\overline{U}_k},U_k,X)\ (k=1,2)$;

(ⅲ)同伦不变性:设 $H:[0,1]\times\overline{U}\rightarrow X$ 全连续,使当$(t,x)\in[0,1]\times\partial U$ 时,恒有 $H(t,x)\neq x$,则 $i(H(t,\cdot),U,X)$与 t 无关;

(ⅳ)保持性:若 Y 是X 的一个收缩核,$A(\overline{U})\subset Y$,则

$$i(A,U,X)=i(A,U\cap Y,Y),$$

这里 $i(A,U\cap Y,Y)=i(A|_{\overline{U\cap Y}},U\cap Y,Y)$;

(ⅴ)切除性：若 V 是开集(关于 X)，$V \subset U$，且 A 在 $\overline{U} \setminus V$ 上没有不动点，则

$$i(A, U, X) = i(A, V, X);$$

(ⅵ)可解性：若 $i(A, U, X) \neq 0$，则 A 在 U 中至少有一个不动点．

证 用 $r: E \to X$ 表示一个保核收缩，即 r 连续且当 $x \in X$ 时，$r(x) = x$．取 R 充分大，使 E 中开球 $T_R = \{x \mid x \in E, \|x\| < R\} \supset \overline{U}$．定义

$$i(A, U, X) = \deg(I - A \cdot r, T_R \cap r^{-1}(U), \theta), \quad (4 \cdot 1)$$

其中 I 表示 E 中恒等算子，右端是 Leray－Schauder 度．

下面证明，按(4·1)式定义的 $i(A, U, X)$ 即合定理的要求．先证下面的结论：

(I) $A \cdot r: r^{-1}(\overline{U}) \to E$ 的不动点皆属于 U，且为 A 的不动点．事实上，若 $x_0 \in r^{-1}(\overline{U})$，使 $A \cdot r(x_0) = x_0$．由于 $A: \overline{U} \to X$，故 $x_0 \in X$，从而 $x_0 = r(x_0) \in \overline{U}$，$Ax_0 = x_0$．但假定 A 在 ∂U 上没有不动点，故 $x_0 \in U$．

由 r 连续，知 $r^{-1}(U)$ 是 E 中开集，从而 $T_R \cap r^{-1}(U)$ 是 E 中有界开集．易知 $A \cdot r$ 在 $\partial(T_R \cap r^{-1}(U))$ 上没有不动点．事实上，设有 $x_0 \in \partial(T_R \cap r^{-1}(U))$，使 $A \cdot r(x_0) = x_0$．由上结论(I)知 $x_0 \in U$．由于 $U \subset T_R \cap r^{-1}(U)$，故 x_0 是开集 $T_R \cap r^{-1}(U)$ 的内点，此与 $x_0 \in \partial(T_R \cap r^{-1}(U))$ 矛盾．另外，显然 $A \cdot r: r^{-1}(\overline{U}) \to E$ 全连续；综上所述，可知(4·1)式右端的 Leray－Schauder 度有意义．

下证(4·1)式右端的数不随 R 的选取而变．设 $R_1 > R$．由结论(I)知 $A \cdot r$ 的不动点均属于 U，而

$$U \subset T_R \cap r^{-1}(U) \subset T_{R_1} \cap r^{-1}(U),$$

故 $A \cdot r$ 在 $\overline{T_{R_1} \cap r^{-1}(U)} \setminus (T_R \cap r^{-1}(U))$ 上没有不动点，因此，由 Leray－Schauder 度的切除性知

$$\begin{aligned}&\deg(I - A \cdot r,\ T_{R_1} \cap r^{-1}(U), \theta)\\ &= \deg(I - A \cdot r,\ T_R \cap r^{-1}(U), \theta).\end{aligned} \tag{4·2}$$

再证(4·1)式右端的数不随保核收缩的选取而变．设 $r_1: E \to X$ 是另一保核收缩．要证

$$\begin{aligned}&\deg(I - A \cdot r_1,\ T_R \cap r_1^{-1}(U), \theta)\\ &= \deg(I - A \cdot r,\ T_R \cap r^{-1}(U), \theta).\end{aligned} \tag{4·3}$$

令 $V = T_R \cap r^{-1}(U) \cap r_1^{-1}(U)$，则 V 是 E 中有界开集，且

$$V \subset T_R \cap r^{-1}(U),\quad V \subset T_R \cap r_1^{-1}(U),\quad V \supset U.$$

于是 $A \cdot r$ 在 $\overline{T_R \cap r^{-1}(U)} \setminus V$ 上没有不动点，$A \cdot r_1$ 在 $\overline{T_R \cap r_1^{-1}(U)} \setminus V$ 上没有不动点，因此

$$\deg(I - A \cdot r, T_R \cap r^{-1}(U), \theta) = \deg(I - A \cdot r, V, \theta), \tag{4·4}$$

$$\deg(I - A \cdot r_1, T_R \cap r_1^{-1}(U), \theta) = \deg(I - A \cdot r_1, V, \theta) \tag{4·5}$$

令 $H(t, x) = r[tA \cdot r(x) + (1-t)A \cdot r_1(x)]$，显然 $H: [0,1] \times \overline{V} \to E$ 全连续．易知当 $(t, x) \in [0,1] \times \partial V$ 时，必有 $H(t, x) \neq x$．事实上，若 $\exists (t_0, x_0) \in [0,1] \times \partial V$，使 $H(t_0, x_0) = x_0$，即

$$r[t_0 A \cdot r(x_0) + (1-t_0)A \cdot r_1(x_0)] = x_0.$$

于是 $x_0 \in X$，$r(x_0) = x_0$，$r_1(x_0) = x_0$，$x_0 = r[t_0 Ax_0 + (1-t_0)Ax_0] = r(Ax_0) = Ax_0$，(因 $x_0 \in \partial V \subset \overline{V} \subset \overline{r^{-1}(U)} \subset r^{-1}(\overline{U})$，

故 $x_0=r(x_0)\in\bar{U}$，从而 $Ax_0\in X$)．于是 $x_0\in U\subset V$，此与 $x_0\in\partial V$ 矛盾．另外，由于 $V\subset\overline{r^{-1}(U)}\cap\overline{r_1^{-1}(U)}\subset r^{-1}(\bar{U})\cap r_1^{-1}(\bar{U})$，故当 $x\in V$ 时 $r(x)\in\bar{U}$，$r_1(x)\in\bar{U}$，从而

$$H(0,x)=r[A\cdot r_1(x)]=A\cdot r_1(x),$$

$$H(1,x)=r[A\cdot r(x)]=A\cdot r(x).$$

由 Leray－Schauder 度的同伦不变性知

$$\deg(I-A\cdot r_1,\ V,\theta)=\deg(I-A\cdot r,\ V,\theta).\qquad(4\cdot6)$$

由(4·4)、(4·5)以及(4·6)诸式即得(4·3)式

由此可知，按(4·1)式定义的 $i(A,U,X)$是由 X,U,A 惟一确定的，不随数 R 和保核收缩 r 的选取而变．

(ⅰ)设 $A:\bar{U}\to U$ 是常算子，即 $Ax\equiv x_0\in U(\forall x\in\bar{U})$．这时当 $x\in\overline{T_R\cap r^{-1}(U)}$时，$(I-A\cdot r)x=x-x_0$ 且 $x_0\in U\subset T_R\cap r^{-1}(U)$，故由 Leray－Schauder 度的性质知

$$\begin{aligned}&\deg(I-A\cdot r,\ T_R\cap r^{-1}(U),\theta)\\&=\deg(I-x_0,\ T_R\cap r^{-1}(U),\theta)\\&=\deg(I,\ T_R\cap r^{-1}(U),x_0)=1.\end{aligned}$$

(ⅱ)若 $x_0\in\overline{T_R\cap r^{-1}(U)}$，使 $A\cdot r(x_0)=x_0$．由前面已证的结论(I)知 $x_0\in U$，$r(x_0)=x_0$，$Ax_0=x_0$；故由假定知 $x_0\in U_1\cup U_2$．于是，$x_0\in[T_R\cap r^{-1}(U_1)]\cup[T_R\cap r^{-1}(U_2)]$．由此可知 $A\cdot r$ 在$\overline{T_R\cap r^{-1}(U)}\setminus([T_R\cap r^{-1}(U_1)]\cup[T_R\cap r^{-1}(U_2)])$上没有不动点，而 $T_R\cap r^{-1}(U_1)$与 $T_R\cap r^{-1}(U_2)$互不相交，故由 Leray－Schauder 度的可加性得

$$\begin{aligned}&\deg(I-A\cdot r,\ T_R\cap r^{-1}(U),\theta)\\&=\deg(I-A\cdot r,\ T_R\cap r^{-1}(U_1),\theta)\end{aligned}$$

$$+\deg(I-A\cdot r,T_R\cap r^{-1}(U_2),\theta),$$

即 $$i(A,U,X)=i(A,U_1,X)+i(A,U_2,X).$$

(ⅲ)考察

$$H(t,r(x)):[0,1]\times[\overline{T_R\cap r^{-1}(U)}]\to E.$$

它显然全连续．若 $t_0\in[0,1]$, $x_0\in\overline{T_R\cap r^{-1}(U)}$, 使 $H(t_0,r(x_0))=x_0$, 则 $r(x_0)\in\overline{U}$, $x_0=H(t_0,r(x_0))\in X$, 从而 $r(x_0)=x_0$, $H(t_0,x_0)=x_0$. 由假定知 $x_0\overline{\in}\partial U$, 故 $x_0\in U$, 从而 $x_0\in T_R\cap r^{-1}(U)$, 于是, $x_0\overline{\in}\partial(T_R\cap r^{-1}(U))$由此可知, 当$(t,x)\in[0,1]\times\partial(T_R\cap r^{-1}(U))$时, 必有 $H(t,r(x))\neq x$. 于是根据 Leray－Schauder 度的同伦不变性知, $\deg(I-H(t,r(\cdot)),T_R\cap r^{-1}(U),\theta)$与 t 无关, 亦即 $i(H(t,\cdot),U,X)$与 t 无关．

(ⅳ)设 $r_1:X\to Y$是一个保核收缩, 则显然 $r_1\cdot r:E\to Y$ 是保核收缩．于是按定义(4·1)式有

$$i(A,U,X)=\deg(I-A\cdot r,T_R\cap r^{-1}(U),\theta).\quad(4\cdot7)$$

$$i(A,U\cap Y,Y)$$
$$=\deg(I-A\cdot r_1\cdot r,T_R\cap(r_1\cdot r)^{-1}(U\cap Y),\theta).\quad(4\cdot8)$$

令 $V=T_R\cap r^{-1}(U)\cap[(r_1\cdot r)^{-1}(U\cap Y)]$. 则 V 为E中有界开集．若 $x_0=A\cdot r(x_0)(x_0\in r^{-1}(\overline{U}))$, 则由结论$(I)$知, $x_0\in U$, $x_0=Ax_0$, $r(x_0)=x_0$. 由于 $A:\overline{U}\to Y$, 故 $x_0\in Y$, 从而 $x_0\in U\cap Y$, 并且 $x_0=Ax_0=A\cdot r_1\cdot r(x_0)$, $x_0\in V$;反之, 若 $x_0=A\cdot r_1\cdot r(x_0)$ $(x_0\in(r_1\cdot r)^{-1}(\overline{U\cap Y}))$, 则由结论$(I)$知 $x_0\in V\cap Y$, $x_0=Ax_0$, 从而 $r_1\cdot r(x_0)=r(x_0)=x_0$, $x_0=A\cdot r(x_0)$, $x_0\in V$, 由此可知, $A\cdot r$ 与$A\cdot r_1\cdot r$ 的不动点完全一致, 且均属于 V. 故 $A\cdot r$ 在$\overline{T_R\cap r^{-1}(U)}\setminus V$ 上没有不动点, $A\cdot r_1\cdot r$ 在$\overline{T_R\cap[(r_1\cdot r)^{-1}(U\cap Y)]}\setminus V$ 上没有不动点．因此

$$\deg(I - A\cdot r, T_R \cap r^{-1}(U), \theta)$$

$$= \deg(I - A\cdot r, V, \theta), \tag{4·9}$$

$$\deg(I - A\cdot r_1\cdot r, T_R \cap [(r_1\cdot r)^{-1}(U\cap Y)], \theta)$$

$$= \deg(I - A\cdot r_1\cdot r, V, \theta). \tag{4·10}$$

令 $H(t,x) = r_1\cdot r[tA\cdot r(x) + (1-t)A\cdot r_1\cdot r(x)]:[0,1]\times \overline{U}\to E$ 它显然全连续．

若 $t_0\in[0,1]$, $x_0\in\overline{V}$, 使 $H(t_0,x_0)=x_0$, 即

$$r_1\cdot r[t_0A\cdot r(x_0) + (1-t_0)A\cdot r_1\cdot r(x_0)] = x_0.$$

则 $r(x_0)\in U$, $x_0\in Y\subset X$, 故 $r(x_0)=x_0=r_1\cdot r(x_0)$, $x_0\in\overline{U}$, $r_1\cdot r(Ax_0)=x_0$. 因 $Ax_0\in Y$, 故 $r_1\cdot r(Ax_0)=Ax_0$, 从而 $Ax_0 = x_0$. 由假定知 $x_0\in U$, 故 $x_0\in U\cap Y$, 由此知 $x_0\in V$, 由于 V 是E 中的有界开集, 故 $x_0\overline{\in}\partial V$. 综上所述, 知当$(t,x)\in[0,1]\times\partial V$ 时, 必有 $H(t,x)\neq x$. 注意当 $x\in\overline{V}$ 时, $H(0,x)=r_1\cdot r[A\cdot r_1\cdot r(x)] = A\cdot r_1\cdot r(x)$, $H(1,x)=r_1\cdot r[A\cdot r\cdot(x)] = A\cdot r\cdot(x)$, 由 Leray－Schauder 度的同伦不变性, 知

$$\deg(I - A\cdot r_1\cdot r, V, \theta) = \deg(I - A\cdot r, V, \theta). \tag{4·11}$$

由(4·7)、(4·8)、(4·9)、(4·10)以及(4·11)诸式得

$$i(A,U,X) = i(A, U\cap Y, Y).$$

(v)先在结论(ii)中令 $U_1=U$, $U_2=\varnothing$, 则得

$$i(A,U,X) = i(A,U,X) + i(A,\phi,X),$$

故 $i(A,\phi,X)=0$. 再在结论(ii)中令 $U_1=V$, $U_2=\varnothing$, 由假定, A 在 $U\setminus V = U\setminus\{U_1\cup U_2\}$ 上没有不动点, 故

$$i(A,U,X) = i(A,V,X) + i(A,\varnothing,X) = i(A,V,X).$$

(vi)用反证法, 若 A 在 U 中没有不动点, 则 A 在 $\overline{U}=\overline{U}\setminus\varnothing$ 上没有不动点．在结论(V)中令 $V=\varnothing$, 即得

$$i(A, U, X)=i(A, \varnothing, X)=0,$$

此与假定矛盾．定理全部证完．

注 1 可以证明(参看[78])，全连续算子的不动点指数是惟一的，即：若三变元 A, U, X 的整值函数 $i(A, U, X)$(这里，X 取 E 的一切收缩核，U 取 X 的一切有界开集，A 取一切满足 $A: \overline{U} \to X$ 全连续、且在 ∂U 上 $Ax \neq x$ 的算子)具有定理 4.1 中的性质(ⅰ)～(ⅳ)，那末，此整值函数必等于定理 4.1 中按(4·1)式定义的不动点指数．

注 2 不动点指数的概念还可以推广到严格集压缩映象和凝聚映象．先讨论严格集压缩映象的不动点指数．设 X 是实 Banach 空间 E 的一个凸闭集，U 是 X 的有界开集，$A: \overline{U} \to X$ 是严格集压缩映象，且 $Ax \neq x$，$\forall x \in \partial U$．今定义不动点指数如下：令 $D_1=\overline{\mathrm{co}} A(\overline{U})$，$D_n=\overline{\mathrm{co}} A(D_{n-1} \cap \overline{U})$ $(n=2,3, \cdots)$．显然 $D_n \subset X$ $(n=1,2, \cdots)$．

(ⅰ)如果对某个 $n=n_0$，$D_{n_0} \cap \overline{U}=\varnothing$，则当 $n>n_0$ 时 D_n 都没有意义，这时我们规定：不动点指数 $i(A, U, X)=0$．

(ⅱ)现设 $D_n \cap \overline{U} \neq \varnothing$ $(n=1,2, \cdots)$．于是 $D_n \cap \overline{U}$ 是一串非空有界闭集．令 $D=\bigcap_{n=1}^{\infty} D_n \subset X$，仿第二章定义 5.3 的推导，可知 D 是非空凸紧集，$D \cap \overline{U}$ 是非空紧集，且 $A(D \cap \overline{U}) \subset D$．于是，将 A 视为映 $D \cap \overline{U}$ 入 D 的算子时是全连续的，从而由延拓定理，存在全连续算子 $A_1: \overline{U} \to D$ $(D \subset X)$，使当 $x \in D \cap \overline{U}$ 时，恒有 $A_1 x=Ax$．易知 $A_1 x \neq x$，$\forall x \in \partial U$(事实上若 $\exists x_0 \in \partial U$，使 $x_0=A_1 x_0 \in D$，则 $x_0 \in D \cap \overline{U}$，从而 $Ax_0=A_1 x_0=x_0$，矛盾)．于是根据定理知 $i(A_1, U, X)$ 有定义．我们规定 A 的不动点指数为：$i(A, U, X)=i(A_1, U, X)$(易知，这样定义的 i

(A, U, X)不随 A_1 的选择而变).

不难证明,定理 4.1 中的性质(ⅰ)~(ⅵ)对于严格集压缩映象的不动点指数也成立,但(ⅳ)中的 Y 应换为 X 的一个凸闭集,而(ⅲ)应换为下面的:

(ⅲ)′同伦不变性:设 $H:[0,1]\times\overline{U}\rightarrow X$ 连续,并且对每一个固定的 $t\in[0,1]$, $H(t,\cdot):\overline{U}\rightarrow X$, 是 k-集压缩映象, $k<1$(k 与 t 无关),而且 $H(t,x)$对于 t 在任何点 $t_0\in[0,1]$的连续性关于 $x\in\overline{U}$ 是一致的. 又设当$(t,x)\in[0,1]\times\partial U$ 时,恒有 $H(t,x)\neq x$. 那末 $i(H(t,\cdot),U,X)$与 t 无关.

利用严格集压缩映象的不动点指数,仿第二章定义 5.4 可定义凝聚映象的不动点指数如下:设 X 是实 Banach 空间 E 中的凸闭集,而且是星形的,即若 $x\in X$,必有 $tx\in X$, $\forall\, 0\leqslant t\leqslant 1$, (显然 E 中中心在θ 的任何闭球以及任何锥都是星形的凸闭集).设 U 是 X 的有界开集, $A:\overline{U}\rightarrow X$ 是凝聚映象,且 $Ax\neq x$, $\forall\, x\in\partial U$. 于是利用第二章 5.4(ⅱ)易知 $\tau=\inf\limits_{x\in\partial U}\|x-Ax\|>0$. 任取严格集压缩映象 $B:\overline{U}\rightarrow X$,使$\|Ax-Bx\|<\frac{\tau}{3}$, ($\forall\, x\in\overline{U}$). 这种 B 是存在的,例如取 $B=kA$,其中 k 小于 1 而充分接近于 1 即可(由于 X 是星形的,故 $B=kA:\overline{U}\rightarrow X$). 由于当 $x\in\partial U$ 时,

$$\|x-Bx\|\geqslant\|x-Ax\|-\|Ax-Bx\|>\frac{2\tau}{3}>0,$$

故 $Bx\neq x$, $\forall\, x\in\partial U$. 于是按前面的定义, $i(B,U,X)$有意义,规定 $i(A,U,X)=i(B,U,X)$. 易知这样定义的不动点指数 $i(A,U,X)$不随 B 的选择而变. 同样,不难证明,定理 4.1 中的性质(ⅰ)~(ⅵ)((ⅳ)中的 Y 换为 X 的一个星形凸闭集,(ⅲ)换为(ⅲ)′,且在(ⅲ)′中 $H(t,\cdot)$是 k-集压缩映象换为$H(t,\cdot)$

是凝聚映象)，对于凝聚映象的不动点指数也成立．

关于算子不动点指数的进一步讨论与推广，参看〔59〕.

下设 P 是 E 中的一个锥，从而 P 是 E 的一个收缩核，也是 E 的一个星形凸闭集．又设 Ω 是 E 的有界开集，则 $P\cap\Omega$ 是 P 中的有界开集，并且 $\partial(P\cap\bar{\Omega})=P\cap\partial\Omega$, $\overline{P\cap\Omega}=P\cap\bar{\Omega}$.

引理 4.1 设 $\theta\in\Omega$, $A: P\cap\bar{\Omega}\to P$ 是凝聚映象，并且满足

$$Ax=\mu x,\quad x\in P\cap\partial\Omega\Rightarrow\mu<1. \tag{4·12}$$

那末必有

$$i(A,P\cap\Omega,P)=1. \tag{4·13}$$

证 令 $H(t,x)=tAx$，则 $H:[0,1]\times(P\cap\bar{\Omega})\to P$ 连续．显然，对每个 $t\in[0,1]$, $H(t,\cdot): P\cap\bar{\Omega}\to P$ 是凝聚映象，并且 $H(t,x)$ 对于 t 的连续性关于 $x\in P\cap\bar{\Omega}$ 是一致的．由(4·12)式及 $\theta\in\Omega$ 知 $H(t,x)\neq x$, $\forall x\in P\cap\partial\Omega$, $0\leqslant t\leqslant 1$. 于是，根据凝聚映象不动点指数的同伦不变性与正规性知

$$i(A,P\cap\Omega,P)=i(\theta,P\cap\Omega,P)=1.$$ 证完．

引理 4.2(见〔90〕) 设 $A: P\cap\bar{\Omega}\to P$ 全连续，$B: P\cap\partial\Omega\to P$ 全连续．如果满足

(ⅰ) $\inf\limits_{x\in P\cap\partial\Omega}\|Bx\|>0$;

(ⅱ) $x-Ax\neq tBx,\quad\forall x\in P\cap\partial\Omega,\quad t\geqslant 0.$

那末必有

$$i(A,P\cap\Omega,P)=0. \tag{4·14}$$

证 由于 $P\cap\partial\Omega$ 是 E 中闭集，利用全连续算子的延拓定理(第一章定理 2.7)，可将 B 延拓成映 $P\cap\bar{\Omega}$ 入 P 的全连续算子(仍记为 B)，并且满足

$$B(P\cap\bar{\Omega})\subset\overline{\mathrm{co}}B(P\cap\partial\Omega). \tag{4·15}$$

令 $F=B(P\cap\partial\Omega)$，则 $\overline{\mathrm{co}}B(P\cap\partial\Omega)=\overline{\mathrm{co}}F=\overline{M}$，这里

$$M = \left\{ y \mid y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i, \lambda_i \geqslant 0, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, y_i \in F; n = 1,2,\cdots \right\}.$$

下证

$$\inf_{y \in \overline{M}} \| y \| > 0. \tag{4·16}$$

令 E_0 表 F 在 E 中张成的子空间，即 $E_0 = \overline{L(F)}$,

$$L(F) = \left\{ y \mid y = \sum_{i=1}^{n} \mu_i y_i, \mu_i \text{ 是实数}, y_i \in F; n = 1,2,\cdots \right\}.$$

因 B 全连续，故 F 是 E 中相对紧集，从而可分，因此 E_0 是可分的 Banach 空间．令 $P_0 = P \cap E_0$，则 P_0 是 E_0 的一个锥，并且 $F \subset P_0$, $\overline{\text{co}}F \subset P_0$．根据〔76〕定理 2.1 或〔5〕定理 1.4.1 知，$\exists f_0 \in E_0{}^*$ 使对一切 $y \in P_0$, $y \neq \theta$，均有 $f_0(y) > 0$．由假定(ⅰ)，$\tau = \inf\limits_{y \in F} \| y \| > 0$，我们证明

$$\inf_{y \in F} f_0(y) = \sigma > 0. \tag{4·17}$$

事实上，若 $\sigma = 0$，则 $\exists y_k \in F$，使 $f_0(y_k) \to 0 (k \to \infty)$．由 F 相对紧及 P_0 闭，知存在子列 $y_{k_i} \to z_0 \in P_0$．于是 $f_0(y_{k_i}) \to f_0(z_0)$，从而 $f_0(z_0) = 0$．由 f_0 的性质知 $z_0 = \theta$．但由 $\| y_{k_i} \| \geqslant \tau$，得 $\| z_0 \| \geqslant \tau$，此与 $z_0 = \theta$ 矛盾，故(4·17)式成立．

$\forall y \in M$，则 $y = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i y_i$, $\lambda_i \geqslant 0$, $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, $y_i \in F$．根据(4·17)式知

$$f_0(y) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_0(y_i) \geqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \sigma = \sigma,$$

由此，通过取极限知 $f_0(y) \geqslant \sigma$, $\forall y \in \overline{M}$．由 F 相对紧，故 $\overline{\text{co}}F = \overline{M}$ 是紧集，因此(4·16)式中的下确界能达到，即 $\exists y_0 \in \overline{M}$，使 $\inf\limits_{y \in \overline{M}} \| y \| = \| y_0 \|$．由上述，$f_0(y_0) \geqslant \sigma$，故 $y_0 \neq \theta$，从而(4·16)式成立．由(4·15)式与(4·16)式知

$$\inf_{x \in P \cap \bar{\Omega}} \| Bx \| = a > 0. \tag{4·18}$$

现用反证法证明(4·14)式. 设若 $i(A, P \cap \Omega, P) \neq 0$. 取 $t_0 > \frac{b+c}{a}$, 其中 $b = \sup_{x \in P \cap \Omega} \| x \|$, $c = \sup_{x \in P \cap \Omega} \| Ax \|$. 由条件(ⅱ), 利用不动点指数的同伦不变性, 知

$$i(A + t_0 B, P \cap \Omega, P) = i(A, P \cap \Omega, P) \neq 0,$$

从而根据定理(4·1)(ⅵ)知, $\exists\, x_0 \in P \cap \Omega$, 使 $Ax_0 + t_0 Bx_0 = x_0$, 故

$$t_0 = \frac{\| x_0 - Ax_0 \|}{\| Bx_0 \|} \leqslant \frac{b+c}{a}$$

此与 t_0 的取法矛盾, 故(4·14)式成立. 证完.

系 设 $A: P \cap \bar{\Omega} \to P$ 全连续. 若 $\exists\, u_0 \in P$, $u_0 \neq \theta$, 使

$$x - Ax \neq t u_0, \quad \forall\, x \in P \cap \partial\Omega, \quad t \geqslant 0, \tag{4·19}$$

那末, (4·14)式必成立.

证 在引理 4.2 中取 $Bx \equiv u_0$ ($\forall\, x \in P \cap \partial\Omega$) 即获证.

引理 4.3 设 $A: P \cap \bar{\Omega} \to P$ 全连续. 若满足

(ⅰ)′ $\inf_{x \in P \cap \partial\Omega} \| Ax \| > 0$;

(ⅱ)′ $Ax = \mu x$, $x \in P \cap \partial\Omega \Rightarrow \mu \overline{\in} (0, 1]$,

那末, (4·14)式必成立.

证 将引理 4.2 中的 B 取成 A, 我们证明引理 4.2 的条件(ⅰ)与(ⅱ)均满足. 事实上, 这时引理 4.2 的条件(ⅰ)即现在的条件(ⅰ)′. 下用反证法证明条件(ⅱ)满足. 若(ⅱ)不满足, 即存在 $x_0 \in P \cap \partial\Omega$, $t_0 \geqslant 0$, 使 $x_0 - Ax_0 = t_0 Ax_0$. 于是 $Ax_0 = \mu_0 x_0$, $\mu_0 = \frac{1}{1 + t_0}$, 显然 $0 < \mu_0 \leqslant 1$, 此与条件(ⅱ)′矛盾. 故条件(ⅱ)满足. 于是根据引理 4.2, 即知(4·14)式成立. 证完.

注 3 容易证明: 引理 4.3 的条件(ⅰ)′与(ⅱ)′等价于条件

$$\inf_{x\in P\cap\partial\Omega,0\leqslant\mu\leqslant 1}\|Ax-\mu x\|>0. \tag{4·20}$$

注 4 由第二章引理3.1,定理3.6及其后的注5知:若考虑的不是锥映象,而是定义在整个 $\overline{\Omega}$ 上的映象,那末,类似于引理4.3的结论仅当 E 是无穷锥空间时才成立.

定理 4.2 设 Ω_1,Ω_2 是 E 的有界开集,$\theta\in\Omega_1,\overline{\Omega}_1\subset\Omega_2$, $A:P\cap(\overline{\Omega}_2\setminus\Omega_1)\to P$ 全连续.如果满足条件

(H_1)存在 $u_0\in P\setminus\{\theta\}$,使 $x-Ax\neq tu_0,\ \forall x\in P\cap\partial\Omega_2$, $t\geqslant0$; $Ax\neq\mu x,\ \forall x\in P\cap\partial\Omega_1,\mu\geqslant1$

或

(H_2)存在 $u_0\in P\setminus\{\theta\}$,使 $x-Ax\neq tu_0,\ \forall x\in P\cap\partial\Omega_1$, $t\geqslant0$; $Ax\neq\mu x,\ \forall x\in P\cap\partial\Omega_2,\mu\geqslant1$

那末,A 在$P\cap(\Omega_2\setminus\overline{\Omega}_1)$中必有不动点.

证 首先,将 A 延拓成映$P\cap\overline{\Omega}_2$ 入 P 的全连续算子(仍记为 A).在条件(H_1)满足的情形下,根据引理4.1与引理4.2的系,知

$$i(A,P\cap\Omega_1,P)=1,\quad i(A,P\cap\Omega_2,P)=0,$$

从而根据不动点指数的可加性(定理4.1(ii)),得

$$\begin{aligned}&i(A,P\cap(\Omega_2\setminus\overline{\Omega}_1),P)\\&=i(A,P\cap\Omega_2,P)-i(A,P\cap\Omega_1,P)=0-1=-1;\end{aligned}$$

同理可知在条件(H_2)满足的情形下,有

$$i(A,P\cap(\Omega_2\setminus\overline{\Omega}_1),P)=1-0=1.$$

总之,$i(A,P\cap(\Omega_2\setminus\overline{\Omega}_1),P)\neq0$,从而根据可解性知 A 在$P\cap(\Omega_2\setminus\overline{\Omega}_1)$中具有不动点.证完.

例 4.1 考察 Hammerstein 积分方程

$$\varphi(x)=\int_G k(x,y)f(\varphi(y))\mathrm{d}y=A\varphi(x) \tag{4·21}$$

正解的存在性，这里 G 表 R^N 中有界闭域，$f(u)$在 $0\leqslant u<+\infty$ 上连续、非负且 $f(0)=0$. 我们利用定理 4.2 证明下面的结论(参看[91])：

结论 I 假定：(i)非负连续核 $k(x,y)$满足 $k(x,x)\not\equiv 0$ $(x\in G)$；

(ii)存在常数 $0<\alpha<1$，使

$$0<\underline{\lim}_{u\to+0}\frac{f(u)}{u^{\alpha}}\leqslant+\infty; \tag{4·22}$$

(iii)存在常数 $0<\alpha^*<1$，使

$$0\leqslant\overline{\lim}_{u\to+\infty}\frac{f(u)}{u^{\alpha^*}}<+\infty. \tag{4·23}$$

则在 $C(G)$中方程(4·21)至少有一正解 $\varphi(x)$(即 $\varphi(x)\geqslant 0$, $\varphi(x)\not\equiv 0$).

证 令 $P=\{\varphi(x)\mid\varphi(x)\in C(G),\varphi(x)\geqslant 0\}$，则 P 是 $C(G)$中的一个锥. 显然 $A:P\to P$ 全连续. 以下用 P_l 表 $P\cap T_l$, $T_l=\{x\mid\|x\|<l\}$. 于是 P_l 是 P 中有界开集，并且 $\partial P_l=P\cap S_l$, $S_l=\{x\mid\|x\|=l\}$, $l>0$. 可假定 $\exists\,\varepsilon_0>0$，使

$$\varphi-A\varphi\neq\theta\ (\text{对一切 }\varphi\in P,\ 0<\|\varphi\|\leqslant\varepsilon_0) \tag{4·24}$$

(否则结论已证). 由(ii)及 $f(0)=0$ 知，$\exists\,\sigma>0$ 及 $\varepsilon_1>0$，使

$$f(u)\geqslant\sigma u^{\alpha}\quad(0\leqslant u\leqslant\varepsilon_1). \tag{4·25}$$

由(i)知，$\exists\,\tau>0$ 及 G 中某小球 $T_\delta=T(x_0,\delta)=\{x\mid|x-x_0|\leqslant\delta\}$，使

$$k(x,y)\geqslant\tau\quad((x,y)\in T_\delta\times T_\delta\text{ 时}). \tag{4·26}$$

令

$$\varepsilon_2=\min\left\{\varepsilon_0,\varepsilon_1,\left(\tau\sigma\,\mathrm{mes}\,T_{\frac{\delta}{2}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\right\}, \tag{4·27}$$

其中 $T_{\frac{\delta}{2}}$表球 $T\left(x_0,\frac{\delta}{2}\right)=\left\{x\mid|x-x_0|\leqslant\frac{\delta}{2}\right\}$. 取 $0<r<\varepsilon_2$,

作 G 上的连续函数 $\psi(x)$ 如下(见图 3-4.1):

$$\psi(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x\in T_{\frac{\delta}{2}} \text{时};\\ 0, & \text{当 } x\overline{\in} T_\delta \text{ 时};\\ 0 \text{ 与 } 1 \text{ 之间的数,但保持 } \psi(x) \text{在 } G \text{ 上连续,} & \\ \quad\text{当 } x\in T_\delta \setminus T_{\frac{\delta}{2}} \text{时}. & \end{cases}$$

下面证明,对此 ψ,有(显然 $\psi\in P$, $\|\psi\|=1$)

$$\varphi - A\varphi \neq t\psi$$

(对任何 $\varphi\in\partial P_r$, $t\geqslant 0$). (4·28)

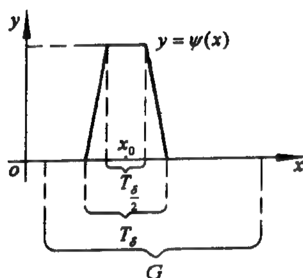


图 3-4·1

事实上,假定 $\exists\, \varphi_1\in\partial P_r$, $t_1\geqslant 0$ 使 $\varphi_1 - A\varphi_1 = t_1\psi$. 由(4·24)式知 $t_1>0$. 又有 $\varphi_1 = t_1\psi + A\varphi_1 \geqslant t_1\psi_1$. 令 $t^*=\sup\{t\mid \varphi_1\geqslant t\psi\}$. 则 $t_1<t^*<+\infty$, $\varphi_1\geqslant t^*\psi$, 于是

$$t^* = t^*\|\psi\|\leqslant\|\varphi_1\| = r<\varepsilon_2\leqslant\left(\tau\sigma\,\mathrm{mes}\,T_{\frac{\delta}{2}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

因此,当 $x\in T_\delta$ 时,有(注意到(4·25)式与(4·26)式)

$$\begin{aligned}\varphi_1(x) &= \int_G k(x,y)f(\varphi_1(u))\mathrm{d}y + t_1\psi(x)\\ &\geqslant \int_G k(x,y)\sigma[\varphi_1(y)]^\alpha \mathrm{d}y + t_1\psi(x)\\ &\geqslant \int_G k(x,y)\sigma(t^*)^\alpha[\psi(y)]^\alpha \mathrm{d}y + t_1\psi(x)\\ &\geqslant \int_{T_{\delta/2}} k(x,y)\sigma(t^*)^\alpha[\psi(y)]^\alpha \mathrm{d}y + t_1\psi(x)\end{aligned}$$

$$\geqslant \tau\sigma(t^*)^\alpha \operatorname{mes} T_{\frac{\delta}{2}} + t_1\psi(x) \geqslant t^* + t_1\psi(x),$$

故

$$\varphi_1(x) \geqslant (t^* + t_1)\psi(x) \quad (x \in G),$$

此显然与 t^* 的定义矛盾．故(4·28)式成立．

另一方面，由(ⅲ)知∃ $a>0$ 及 $u_0>0$，使

$$f(u) \leqslant a u^{\alpha^*} \quad (u \geqslant u_0 \text{ 时}).$$

由假定，$f(u)$在$[0, +\infty)$上连续．令 $\mu = \max\limits_{0 \leqslant u \leqslant u_0} f(u)$．于是

$$0 \leqslant f(u) \leqslant \mu + a u^{\alpha^*} \quad (0 \leqslant u < +\infty \text{时}). \tag{4·29}$$

今取正数 R 充分大($R > \varepsilon_2$)，使

$$\frac{\mu\|K\|}{R} + \frac{a\|K\|}{R^{1-\alpha^*}} < 1, \tag{4·30}$$

其中$\|K\|$表映 $C(G)$入 $C(G)$的线性积分算子

$$K\varphi(x) = \int_G k(x,y)\varphi(y)\mathrm{d}y$$

的范数．我们证明：

$$\varphi \in \partial P_R,\ \lambda \geqslant 1 \Rightarrow A\varphi \neq \lambda\varphi. \tag{4·31}$$

事实上，若∃ $\varphi_0 \in \partial P_R$，$\lambda_0 \geqslant 1$，使 $A\varphi_0 = \lambda_0\varphi_0$，则(注意到(4·29)式)

$$\lambda_0\varphi_0(x) = \int_G k(x,y) f(\varphi_0(y))\mathrm{d}y$$

$$\leqslant \|K\| \cdot (\mu + a\|\varphi_0\|^{\alpha^*}) \leqslant \|K\| \cdot (\mu + aR^{\alpha^*}),$$

从而

$$\lambda_0 R = \lambda_0\|\varphi_0\| \leqslant \|K\| \cdot (\mu + aR^{\alpha^*})$$

故由(4·30)式得

$$\lambda_0 \leqslant \frac{\mu\|K\|}{R} + \frac{\alpha\|K\|}{R^{1-\alpha_*}} < 1,$$

此与 $\lambda_0 \geqslant 1$ 矛盾．由此可知，(4·31)式成立．

下是，定理 4.2 的条件(H_2)满足．因此根据定理 4.2 知，A 在 $P_R \setminus \bar{P}_r$ 中具有不动点．证完．

注 5 可以举出一些满足条件(ⅱ)和(ⅲ)的初等函数 $f(u)$，例如

$$f(u)=\sum_{i=1}^{n} a_i u^{\alpha_i}(1-b_i \sin u),\ \ 0<\alpha_i<1,\ \ a_i>0$$

$$|b_i| \leqslant 1\ \ (n=1,2,\cdots,n), \tag{4·32}$$

$$f(u)=(2+\cos^2 u)\ln(1+5\sqrt{u}), \tag{4·33}$$

等(对于函数(4·32)，可取 $\alpha=\min\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$，$\alpha^*=\max\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$；对于函数(4·33)，可取 $\alpha=\alpha^*=\frac{1}{2}$)．

注 6 条件(ⅰ)可换为"(ⅰ)′非负连续的对称核满足 $k(x,y)\not\equiv 0$"，这时必有 $x_0 \neq y_0$ 存在，使 $k(x_0,y_0)=k(y_0,x_0)>0$．(4·28)式的证法与上述类似，只需改换 $\psi(x)$的定义，如图 3－4·2 所示．

注 7 "$k(x,y)$连续"这个条件可减弱，例如，条件(ⅰ)可换为："(ⅰ)″当 $x \neq y$ 时 $k(x,y)$是不恒为零的连续对称核，并且满足不等式

$$0 \leqslant k(x,y) \leqslant \frac{M_0}{|x-y|^v}\ \ (x\in G, y\in G, x\neq y), \tag{4·34}$$

其中 $M_0=\text{const}$，$0<v<N$"．因为这时已保证了算子 K 映 $C(G)$入 $C(G)$全连续；函数 $\psi(x)$的作法同图 3－4.2 所示．

由于椭圆型算子的 Dirichlet 问题的 Green 函数满足条件(ⅰ)″(例如，参看〔92〕)，故由上述结论得下面

结论 Ⅱ 给定一致椭圆型算子

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u,$$

即设存在常数 $\mu_0 > 0$，使对一切 $x \in \bar{\Omega}$（Ω 是 R^N 中某有界凸区域），一切 $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_N) \in R^N$，皆有 $\sum_{i,j=1}^{N} a_i(x)\xi_i\xi_2 \geqslant \mu_0 |\xi|^2$，这里设 $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$，$a_{ij}(x)$，$b_i(x)$，$c(x)$ 都属于 $C^\lambda(\bar{\Omega})$，$\partial\Omega \in C^{2+\lambda}$，$0<\lambda<1$ 且 $c(x) \geqslant 0$（参看[94]、[93]）. 考察 Dirichlet 问题：

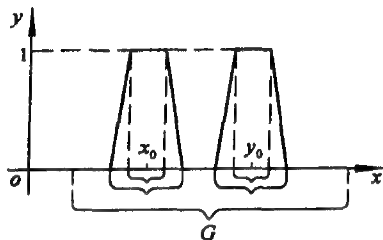


图 3-4·2

$$\begin{cases} Lu = f(u) & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{4·35}$$

其中 $f(u) \geqslant 0$（$u \geqslant 0$ 时），$f(0) = 0$，且 $f(u)$ 属于 $C^\mu([0, +\infty))$，$0<\mu<1$.

如果函数 $f(u)$ 满足结论 I 中的条件（ⅱ）与（ⅲ），则 Dirichlet 问题(4·35)必有非零解 $u(x)$，此解属于 $C^{2+\lambda_0}(\bar{\Omega})$，$\lambda_0 = \min\{\mu, \lambda\}$，并且 $u(x)>0$（当 $x \in \Omega$ 时）.

易知函数(4·32)式属于 $C^{\mu_1}([0, +\infty))$，$\mu_1 = \min\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$，函数(4·33)式属于 $C^{\mu_2}([0, +\infty))$，$\mu_2 = \frac{1}{2}$；故它们对应的 Dirichlet 问题(4·35)的非零解分别属于 $C^{2+\lambda_1}(\bar{\Omega})$（$\lambda_1 = \min\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \lambda\}$）和 $C^{2+\lambda_2}(\bar{\Omega})\left(\lambda_2 = \min\left\{\frac{1}{2}, \lambda\right\}\right)$.

下面，回到一般算子.

引理 4.4 设 $A: P \cap \bar{\Omega} \to P$ 全连续. 那末

(ⅰ)设 $\theta\in\Omega$，若 $x\in P\cap\partial\Omega\Rightarrow Ax\not\geq x$，则 $i(A,P\cap\Omega,P)=1$；

(ⅱ)若 $x\in P\cap\partial\Omega\Rightarrow Ax\not\leq x$，则 $i(A,P\cap\Omega,P)=0$.

证 (ⅰ)这时条件(4·12)式必成立，因为若有 $x_0\in P\cap\partial\Omega$，$\mu_0\geq 1$ 存在，使 $Ax_0=\mu_0x_0$，则 $Ax_0=\mu_0x_0\geq x_0$，此与假定矛盾．于是，根据引理 4.1，即知 $i(A,P\cap\Omega,P)=1$.

(ⅱ)任取 $\mu_0>\theta$，则(4·19)必满足，因若存在 $x_1\in P\cap\partial\Omega$ 及 $t_1\geq 0$，使 $x_1-Ax_1=t_1\mu_0$，则必有 $x_1=t_1\mu_0+Ax_1\geq Ax_1$，此与假设矛盾．于是根据引理 4.2 的系，知 $i(A,P\cap\Omega,P)=0$. 证完．

定理 4.3(锥拉伸与锥压缩不动点定理) 设 Ω_1,Ω_2 是 E 中有界开集，$\theta\in\Omega_1$，$\bar{\Omega}_1\subset\Omega_2$，$A:P\cap(\bar{\Omega}_2\setminus\Omega_1)\to P$ 全连续．如果满足条件

(H_3) $Ax\not\geq x$，$\forall x\in P\cap\partial\Omega_1$；$Ax\not\leq x$，$\forall x\in P\cap\partial\Omega_2$(即锥拉伸).

或

(H_4) $Ax\not\geq x$，$\forall x\in P\cap\partial\Omega_2$；$Ax\not\leq x$，$\forall x\in P\cap\partial\Omega_1$(即锥压缩).

那末，A 在 $P\cap(\Omega_2\setminus\bar{\Omega}_1)$ 中必具有不动点．

证 和定理 4.2 的证明完全类似，只是这时不引用引理 4.1 和引理 4.2 的系，而引用引理 4.4 即可．从略．

注 8 当 Ω_1,Ω_2 都是以 θ 为中心的球时，可不利用不动点指数理论而直接证明定理 4.3，例如在条件(H_4)下不动点的存在性(即锥压缩不动点定理)可证明如下：取 $h_0\in P$，使

$$\|h_0\|>\frac{1}{2}\left(\frac{r}{2}+\frac{1}{2}\sup_{z\in\partial P_r}\|Az\|\right),\tag{4·36}$$

这里，已设 $\Omega_1=\{x\mid \|x\|<r\}$，$\Omega_2=\{x\mid \|x\|<R\}$，$R>r>0$，$P_r=P\cap\Omega_1$，$P_R=P\cap\Omega_2$. 按下式定义算子 $\widetilde{A}(\widetilde{A}:P\to P)$：

$$\widetilde{A}x=\begin{cases}2h_0, & x=\theta;\\ \dfrac{\|x\|}{r}A\left(\dfrac{r}{\|x\|}x\right)+2h_0, & x\in P,\ 0<\|x\|<\dfrac{r}{2};\\ \dfrac{\|x\|}{r}A\left(\dfrac{r}{\|x\|}x\right)+\dfrac{4\|x\|}{r}\cdot\dfrac{r-\|x\|}{\|x\|}h_0, & x\in P,\\ & \dfrac{r}{2}\leqslant\|x\|\leqslant r;\\ Ax, & x\in P,\ r<\|x\|<R;\\ A\left(\dfrac{R}{\|x\|}x\right), & x\in P,\ \|x\|\geqslant R.\end{cases}$$

显然，$\widetilde{A}:P\to P$ 连续，并且 $\widetilde{A}(P)$ 是相对紧集，故由 Schauder 不动点定理知，$\exists x^*\in P$，使 $\widetilde{A}x^*=x^*$. 很明显，$x^*\neq\theta$；若 $0<\|x^*\|<\frac{r}{2}$，则

$$\frac{\|x^*\|}{r}A\left(\frac{r}{\|x^*\|}x^*\right)+2h_0=x^*,$$

从而

$$\|h_0\|\leqslant\frac{1}{2}\left[\|x^*\|+\frac{\|x^*\|}{r}\left\|A\left(\frac{r}{\|x^*\|}x^*\right)\right\|\right]$$
$$<\frac{1}{2}\left(\frac{r}{2}+\frac{1}{2}\sup_{z\in\partial P_r}\|Az\|\right),$$

此与 h_0 的取法(4·36)式矛盾；

若 $\frac{r}{2}\leqslant\|x^*\|\leqslant r$，则

$$x^*=\frac{\|x^*\|}{r}A\left(\frac{r}{\|x^*\|}x^*\right)+\frac{4\|x^*\|}{r}\cdot\frac{r-\|x^*\|}{\|x^*\|}h_0$$
$$\geqslant\frac{\|x^*\|}{r}A\left(\frac{r}{\|x^*\|}x^*\right),$$

从而，令 $x_0=\frac{r}{\|x^*\|}x^*$，有 $x_0\in\partial P_r$，$Ax_0\leqslant x_0$，此与条件(H_4)矛盾；

若$\|x^*\|\geqslant R$，则 $x^*=A\left(\frac{R}{\|x^*\|}x^*\right)$. 令 $x_1=\frac{R}{\|x^*\|}x^*$，则有 $x_1\in\partial P_R$，并且

$$Ax_1=x^*=\frac{\|x^*\|}{R}x_1\geqslant x_1,$$

此与条件(H_4)矛盾．

由此可知必有 $r<\|x^*\|<R$，即 $x^*\in P_R\setminus\bar{P}_r=P\cap(\Omega_2\setminus\bar{\Omega}_1)$，并且 $x^*=\tilde{A}x^*=Ax^*$．证完．

至于在条件(H_3)下不动点的存在性(即锥拉伸不动点定理)，直接证明比较复杂，可参看〔77〕.

注 9 上述锥拉伸与锥压缩不动点定理(见〔9〕定理 4 5.1 及〔78〕)是重要的不动点定理之一，它有广泛的应用(参看〔9〕、〔78〕、〔95〕、〔96〕)．当 Ω_1,Ω_2 是以 θ 为中心的球时，可证上述锥拉伸与锥压缩不动点定理对于严格集压缩映象和凝聚映象也成立(见〔97〕).

例 4.2 考察一般多项式型 Hammerstein 积分方程

$$\varphi(x)=\int_G k(x,y)f(y,\varphi(y))\mathrm{d}y=A\varphi(x) \quad (4\cdot37)$$

其中 G 是 R^N 中有界闭域，$f(x,u)=\sum_{i=1}^{n}a_i(x)u^{\alpha_i}$，$\alpha_i>0(i=1,2,\cdots,n)$．利用锥拉伸与锥压缩不动点定理，能证明下面两个结论(见〔96〕).

结论 Ⅰ 设(ⅰ)非负连续核 $k(x,y)$ 满足 $\int_G k(x,y)\mathrm{d}x>0$(对任何 $y\in G$)；(ⅱ)$a_i(x)\geqslant0$，$a_i(x)\in L$，$0<\alpha_i<1(i=1,$

$2, \cdots, n$)，并且诸 $\alpha_i(x)$ 中有某 $\alpha_{i_0}(x)$ 满足 $\inf_{x\in G} a_{i_0}(x) > 0$. 则方程(4·37)必有在 G 上不恒为零的非负连续解 .

证 令

$$P = \{\varphi \mid \varphi \in C(G),\ \varphi(x) \geqslant 0,\ \|\varphi\|_L \geqslant \beta M^{-1} \|\varphi\|_C\}, \tag{4·38}$$

其中 $\beta = \min_{y\in G} \int_G k(x, y) \mathrm{d}x > 0$, $M = \max_{(x,y)\in G\times G} k(x, y)$，容易验证，$P$ 是 $C(G)$ 中一个锥 . 下证 $A: P \to P$. 事实上，当 $\varphi \in P$ 时有

$$\begin{aligned}\|A\varphi\|_L &= \int_G A\varphi(x) \mathrm{d}x \\ &= \int_G \mathrm{d}x \int_G k(x, y) f(y, \varphi(y)) \mathrm{d}y \geqslant \beta \|\mathbf{f}\varphi\|_L,\end{aligned}$$

其中 $\mathbf{f}$ 表算子 $\mathbf{f}\varphi(x) = f(x, \varphi(x))$. 另一方面，显然有 $A\varphi(x) \leqslant M\|\mathbf{f}\varphi\|_L$，故 $\|A\varphi\|_L \geqslant \beta M^{-1} \|A\varphi\|_C$，即 $A\varphi \in P$.

另外，易知 $\mathbf{f}$ 映 P 入 L 连续有界，从而 A 映 P 入 P 全连续 . 以下用 P_l 表 P 中有界开集 $P \cap T_l$, $T_l = \{x \mid \|x\| < l\}$, $l > 0$. 取 r 很小，使

$$0 < r < (\tau_0 \beta)^{\frac{1}{1-a_{i_0}}}, \tag{4·39}$$

其中 $\tau_0 = \inf_{x\in G} a_{i_0}(x) > 0$. 我们证明

$$\varphi \in \partial P_r \Rightarrow A\varphi \nleq \varphi. \tag{4·40}$$

事实上，设有 $\varphi_0 \in \partial P_r$，使 $A\varphi_0 \leqslant \varphi_0$. 由 $0 \leqslant \varphi_0(x) \leqslant r$ 得 $0 \leqslant [\varphi_0(x)]^{1-a_{i_0}} \leqslant r^{1-a_{i_0}}$，从而 $\varphi_0(x) \leqslant r^{1-a_{i_0}} [\varphi_0(x)]^{a_{i_0}}$，由此得

$$\begin{aligned}\varphi_0(x) \geqslant A\varphi_0(x) &\geqslant \int_G k(x, y) a_{i_0}(y) [\varphi_0(y)]^{a_{i_0}} \mathrm{d}y \\ &\geqslant \frac{\tau_0}{r^{1-a_{i_0}}} \int_G k(x, y) \varphi_0(y) \mathrm{d}y.\end{aligned}$$

故 $$\int_G \varphi_0(x)\mathrm{d}x \geqslant \frac{\tau_0\beta}{r^{1-\alpha_{i_0}}}\int_G \varphi_0(y)\mathrm{d}y$$

由此并注意到 $\int_G \varphi_0(x)\mathrm{d}x > 0$, 即得 $\frac{\tau_0\beta}{r^{1-\alpha_{i_0}}} \leqslant 1$, 或 $r \geqslant (\tau_0\beta)^{\frac{1}{1-\alpha_{i_0}}}$,此与 r 的取法(4·39)式矛盾．故(4·40)式成立．

另一方面,取 $R > r$ 很大,使

$$R > M\sum_{i=1}^{n}\|a_i\|_L \cdot R^{\alpha_i}. \tag{4·41}$$

我们证明

$$\varphi \in \partial P_R \Rightarrow A\varphi \ngeq \varphi. \tag{4·42}$$

事实上,若有 $\varphi_1 \in \partial P_R$,使 $A\varphi_1 \geqslant \varphi_1$,则

$$R = \|\varphi_1\|_C \leqslant \|A\varphi_1\|_C \leqslant M\sum_{i=1}^{n}\|a_i\|_L \cdot \|\varphi_1\|^{\alpha_i}$$
$$= M\sum_{i=1}^{n}\|a_i\|_L \cdot R^{\alpha_i},$$

此与 R 的取法(4·41)式矛盾．于是(4·42)式成立．

由(4·40)式及(4·42)式,利用锥压缩不动点定理(定理 4.3 条件),即知 A 在 $P_R \setminus \overline{P}_r$ 中必有不动点．证完．

注 10 在结论 I 的假设条件下,若更设:$\exists\, \sigma > 0$ 使

$$\sup_{x\in G}\int_G [k(x,y)]^{-\sigma}\mathrm{d}y < +\infty, \tag{4·43}$$

那末方程(4·37)在 G 上不恒为零的非负连续解是惟一的,并且此解在 G 上处处为正．事实上,加上条件(4·43)后,对任何 $\varphi \in C(G)$, $\varphi(x) \geqslant 0, \neq 0$, 应用指数小于 1 的 Hölder 不等式(见〔45〕140 页不等式(6.9.3),在其令 $k = \frac{\sigma}{1+\sigma}$,从而 $k' = -\sigma$)知

$$\int_G k(x,y)\varphi(y)\mathrm{d}y$$

$$\geqslant\left(\int_G[\varphi(y)]^{\frac{\sigma}{1+\sigma}}\mathrm{d}y\right)^{\frac{1+\sigma}{\sigma}}\left(\int_G[k(x,y)^{-\sigma}\mathrm{d}y]^{-\frac{1}{\sigma}}\right)$$

$$\geqslant M_0^{-\frac{1}{\sigma}}\left(\int_G[\varphi(y)]^{\frac{1+\sigma}{\sigma}}\mathrm{d}y\right)^{\frac{1+\sigma}{\sigma}}=\text{const.}>0, \qquad (4\cdot44)$$

其中 $M_0=\sup\limits_{x\in G}\int_G[k(x,y)]^{-\sigma}\mathrm{d}y$. 由此易知，算子 A 对于 $C(G)$ 中的锥

$$P_0=\{\varphi\mid\varphi\in C(G),\varphi(x)\geqslant0\} \qquad (4\cdot45)$$

是强增的，并且是强次线性的，因此，根据定理 3.1 与定理 3.2 知，A 在 P_0 中至多有一个不动点．证完．

注意，若连续核 $k(x,y)$ 恒正，则 $k(x,y)$ 显然满足上述结论Ⅰ的条件(ⅰ)以及条件(4·43)(因为这时 $\min\limits_{(x,y)\in G\times G}k(x,y)>0$)；但有不少满足条件(ⅰ)及(4·43)的函数，它们可在 $G\times G$ 的某些点为零．例如，令 $G=[0,1]$，函数

$$k(x,y)=(x-y)^{\frac{2m}{2n-1}} \quad (m,n\text{ 为正整数})$$

就满足条件(ⅰ)及(4·43)(取 $\sigma=\dfrac{2n-1}{2m+1}$)，在斜线 $x=y$ 上为零．

结论Ⅱ 设(ⅰ)′非负连续核 $k(x,y)$ 满足 $\int_G k(x,y)\mathrm{d}x>0$(对任何 $y\in G$)；(ⅱ)′$a_i(x)\geqslant0$, $a_i(x)\in L$, $a_i>1(i=1,2,\cdots,n)$，并且诸 $a_i(x)$ 中有某 $a_{i_1}(x)$ 满足 $\inf\limits_{x\in G}a_{i_1}(x)>0$. 则方程(4·37)必有在 G 上不恒为零的非负连续解．

证 沿用上述结论Ⅰ证明中的符号，类似地可证 $A:P\to P$ 全连续，P 表 $C(G)$ 中的锥(4·38)式．取 R 充分大，使

$$R>\beta^{-\frac{a_{i_1}+1}{a_{i_1}-1}}\tau_1^{-\frac{1}{a_{i_1}-1}}(M\text{mes}G)^{\frac{a_{i_1}}{a_{i_1}-1}}, \qquad (4\cdot46)$$

其中 $\tau_1=\inf\limits_{x\in G}a_{i_1}(x)>0$. 我们证明

$$\varphi\in\partial P_R\Rightarrow A\varphi\not\leq\varphi. \tag{4·47}$$

设若存在 $\varphi_2\in\partial P_R$, 使 $A\varphi_2\leqslant\varphi_2$, 则

$$(\mathrm{mes}G)\|A\varphi_2\|_C\geqslant\int_G A\varphi_2(x)\mathrm{d}x$$

$$\geqslant\int_G\mathrm{d}x\int_G k(x,y)a_{i_1}(y)[\varphi_2(y)]^{a_{i_1}}\mathrm{d}y$$

$$\geqslant\beta\tau_1\int_G[\varphi_2(y)]^{a_{i_1}}\mathrm{d}y.$$

由一已知的不等式(见[45]143 页定理 192), 知

$$\left(\int_G[\varphi_2(x)]^{a_{i_1}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{a_{i_1}}}\geqslant(\mathrm{mes}G)^{\frac{1}{a_{i_1}}-1}\int_G\varphi_2(x)\mathrm{d}x,$$

而根据 $\varphi_2\in P$ 知

$$\int_G\varphi_2(x)\mathrm{d}x\geqslant\beta M^{-1}\|\varphi_2\|_C,$$

从而

$$R=\|\varphi_2\|_C\geqslant\|A\varphi_2\|_C\geqslant\beta^{a_{i_1}+1}\tau_1(M\mathrm{mes}G)^{-a_{i_1}}$$

$$\|\varphi_2\|_C^{a_{i_1}}=\beta^{a_{i_1}+1}\tau_1(M\mathrm{mes}G)^{-a_{i_1}}R^{a_{i_1}},$$

此显然与 R 的取法(4·46)矛盾, 故(4·47)式成立.

另一方面, 取 $0<r<R$ 很小, 使

$$M\sum_{i=1}^{n}\|a_i\|_L\cdot r^{a_i-1}<1. \tag{4·48}$$

我们证明

$$\varphi\in\partial P_r\Rightarrow A\varphi\not\geq\varphi. \tag{4·49}$$

若有 $\varphi_3\in\partial P_r$, 使 $A\varphi_3\geqslant\varphi_3$, 则 $A\varphi_3(x)\geqslant\varphi_3(x)$, 从而

$$r=\|\varphi_3\|_C\leqslant\|A\varphi_3\|_C\leqslant M\sum_{i=1}^{n}\|a_i\|_L\cdot\|\varphi_3\|_C^{a_i}$$

$$= M\sum_{i=1}^{n}\|a_i\|\cdot r^{a_i}$$

此与 r 的取法(4·48)式矛盾．因此(4·49)式成立．

由(4·47)式与(4·49)式，利用锥拉伸不动点定理(定理 4.3 条件(H_3))，即知 A 在 $P_R\setminus\overline{P}_r$ 中具有不动点．证完．

注 11 在结论Ⅱ的假设条件下，若更设条件(4·43)满足，则方程(4·37)具有惟一的在 G 上不恒为零的非负连续解．事实上，由(4·44)式易知，算子 A 对于 $C(G)$ 中的锥 P_0(见(4·45)式)是强增的，并且是强超线性的；于是，根据定理 3.1 与定理 3.5 知，A 在 P_0 中具有惟一的正不动点．证完．

另外，对核 $k(x,y)$ 的要求 $\int_G k(x,y)\mathrm{d}x>0(\forall y\in G)$ 可以减弱，参看〔141〕.

下面举出一个具体的例子．设 $k(x,y)=a(x)b(y)$，其中 $a(x)$ 与 $b(y)$ 皆在 G 上连续，恒正．又设 $f(x,u)=\sum_{i=1}^{n}a_i(x)u^{a_i}$，$a_i>0$，$a_i(x)\in L$，$a_i(x)\geqslant 0$，$a_i(x)$ 在 G 上不是几乎处处为零($i=1,2,\cdots,n$)．易知，此时方程(4·37)的正解必为 $\varphi(x)=\gamma a(x)$ 的形式，其中 $\gamma>0$ 满足

$$\gamma=\sum_{i=1}^{n}c_i\gamma^{a_i}, \tag{4·50}$$

这里

$$c_i=\int_G b(y)a_i(y)[a(y)]^{a_i}\mathrm{d}y>0\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

第一种情形：若 $a_i<1(i=1,2,\cdots,n)$．则(4·50)式为

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{c_i}{\gamma^{1-a_i}}=1. \tag{4·51}$$

由于函数 $g(\gamma)=\sum_{i=1}^{n}\frac{c_i}{\gamma^{1-a_i}}(0<\gamma<+\infty)$是严格减函数，并且 $\lim_{\gamma\to+0}g(\gamma)=+\infty$，$\lim_{\gamma\to+\infty}g(\gamma)=0$，故方程(4·51)具有惟一正解 $\gamma_0>0$；因此，方程(4·37)具有惟一正解 $\varphi(x)=\gamma_0 a(x)$；这正是上述结论 Ⅰ 及其后的注 10 所述的结论．

第二种情形：若 $a_i>1(i=1,2,\cdots,n)$，则(4·50)式为

$$\sum_{i=1}^{n}c_i\gamma^{a_i-1}=1. \tag{4·52}$$

由于函数 $h(\gamma)=\sum_{i=1}^{n}c_i\gamma^{a_i-1}(0<\gamma<+\infty)$是严格增函数，并且 $\lim_{\gamma\to+0}h(\gamma)=0$，$\lim_{\gamma\to+\infty}h(\gamma)=+\infty$，故方程(4·52)具有惟一正解 $\gamma^*>0$；因此方程(4·37)具有惟一正解 $\varphi(x)=\gamma^*a(x)$；这正是上述结论 Ⅱ 及其后的注 11 所述的结论．

定理 4.4(范数形式的锥拉伸与锥压缩不动点定理，见〔90〕) 设 Ω_1,Ω_2 是 E 中有界开集，$\theta\in\Omega_1$，$\bar{\Omega}_1\subset\Omega_2$，$A:P\cap(\bar{\Omega}_2\setminus\Omega_1)\to P$ 全连续．如果满足条件

(H_5) $\|Ax\|\leqslant\|x\|$，$\forall x\in P\cap\partial\Omega_1$；$\|Ax\|\geqslant\|x\|$，$\forall x\in P\cap\partial\Omega_2$(即范数锥拉伸)

或

(H_6) $\|Ax\|\leqslant\|x\|$，$\forall x\in P\cap\partial\Omega_2$；$\|Ax\|\geqslant\|x\|$，$\forall x\in P\cap\partial\Omega_1$(即范数锥压缩)．

那末，A 在 $P\cap(\bar{\Omega}_2\setminus\Omega_1)$中必具有不动点．

证 不妨设条件(H_5)满足(当(H_6)满足时证明类似)．将 A 延拓成映 $P\cap\bar{\Omega}_2$ 入 P 的全连续算子(仍记为 A)．可设 A 在 $P\cap\partial\Omega_1$ 与 $P\cap\partial\Omega_2$ 上均没有不动点(否则定理获证)．下证

$$Ax=\mu x,\quad x\in P\cap\partial\Omega_1\Rightarrow\mu<1. \tag{4·53}$$

事实上，若$\exists x_0 \in P \cap \partial\Omega_1$，$\mu_0 \geqslant 1$，使$Ax_0 = \mu_0 x_0$，则$\mu_0 > 1$(因已假定$Ax \neq x$，$\forall x \in P \cap \partial\Omega_1$)，从而$\|Ax_0\| = \mu_0 \|x_0\| > \|x_0\|$，此与$(H_5)$矛盾．故(4·53)式成立．于是根据引理4.1知

$$i(A, P \cap \Omega_1, P) = 1. \tag{4·54}$$

再证

$$Ax = \mu x, \quad x \in P \cap \partial\Omega_2 \Rightarrow \mu \overline{\in} (0,1]. \tag{4·55}$$

事实上，若$\exists x_1 \in P \cap \partial\Omega_2$，$0 < \mu_1 \leqslant 1$，使$Ax_1 = \mu_1 x_1$，则$0 < \mu_1 < 1$(因已假定$Ax \neq x$，$\forall x \in P \cap \partial\Omega_2$)，从而$\|Ax_1\| = \mu_1 \|x_1\| < \|x_1\|$，此与$(H_5)$矛盾，故(4·55)式成立．又显然，由$(H_5)$知

$$\inf_{x \in P \cap \partial\Omega_2} \|Ax\| \geqslant \inf_{x \in P \cap \partial\Omega_2} \|x\| > 0 \tag{4·56}$$

于是由(4·56)式与(4·55)式，利用引理4.3知

$$i(A, P \cap \Omega_2, P) = 0. \tag{4·57}$$

由(4·54)式与(4·57)式得

$$\begin{aligned} & i(A, P \cap (\Omega_2 \setminus \bar{\Omega}_1), P) \\ & = i(A, P \cap \Omega_2, P) - i(A, P \cap \bar{\Omega}_1, P) = -1 \neq 0, \end{aligned}$$

从而知A在$P \cap (\Omega_2 \setminus \bar{\Omega}_1)$中具有不动点．证完．

注12 不论E是有限维空间还是无穷维空间，定理4.4都成立．但若不是锥拉伸与锥压缩，而是整个区域的拉伸与压缩(按范数)，那末，只有当E是无穷维空间时才能保证具有不动点，参看第二章定理3.6及其后的注5.

注13 由定理4.4的证明可知，下述更一般的结论也成立：设Ω_1, Ω_2是E中的有界开集，$\theta \in \Omega_1$，$\bar{\Omega}_1 \subset \Omega_2$，$A: P \cap (\bar{\Omega}_2 \setminus \Omega_1) \to P$全连续．如果满足条件

(H_7) $\inf_{x \in P \cap \partial\Omega_2} \|Ax\| > 0$；$Ax = \mu x$，$x \in P \cap \partial\Omega_2 \Rightarrow \mu \geqslant 1$；

$Ax=\mu x, x\in P\cap\partial\Omega_1 \Rightarrow \mu\leqslant 1$,

或

(H_8) $\inf\limits_{x\in P\cap\partial\Omega_1}\|Ax\|>0$; $Ax=\mu x, x\in P\cap\partial\Omega_1\Rightarrow\mu\geqslant 1$;

$Ax=\mu x, x\in P\cap\partial\Omega_2\Rightarrow\mu\leqslant 1$,

那末，A 在 $P\cap(\bar{\Omega}_2\setminus\Omega_1)$ 中必有不动点（〔99〕中定理 1.2 和定理 1.3 证明了当 Ω_1,Ω_2 都是以 θ 为中心的球时，此一般性结论成立．但其证明方法不适用于一般区域 Ω_1 与 Ω_2）．

例 4.3 考察拟线性二阶常微分方程的两点边值问题

$$\begin{cases}\dfrac{d^2x}{dt^2}+f(x)=0, & 0\leqslant t\leqslant 1;\\ x(0)=x(1),\end{cases}\tag{4·58}$$

其中 $f(x)$ 在 $x\geqslant 0$ 上连续、非负且 $f(0)=0$．显然 $x(t)\equiv 0$ 是问题(4·58)的解．证明下面的结论（见〔155〕）：

结论 若

$$0\leqslant\overline{\lim_{x\to+0}}\frac{f(x)}{x}<8,\quad 24\sqrt{3}<\underline{\lim_{x\to+\infty}}\frac{f(x)}{x}\leqslant+\infty,\tag{4·59}$$

那末，问题(4·58)具有（属于 $C^2[0,1]$ 的）非负解 $x(t)$，满足 $x(t)>0$, $\forall\, 0<t<1$．

证 众所周知（例如参看〔100〕），问题(4·58)属于 $C^2[0,1]$ 的解等价于 Hammerstein 积分方程

$$x(t)=\int_0^1 k(t,s)f(x(s))ds=Ax(t)\tag{4·60}$$

属于 $C[0,1]$ 的解，其中 $k(t,s)$ 是对应的 Green 函数

$$k(t,s)=\begin{cases}t(1-s), & t\leqslant s;\\ s(1-t), & t>s.\end{cases}$$

令 $P=\{x(t)\mid x(t)\in C[0,1], x(t)\geqslant 0\}$．对于 $0<\varepsilon<\dfrac{1}{2}$，又令

$$P_\varepsilon=\left\{x(t)\,\middle|\,x(t)\in P,\ \min_{\frac{1}{2}-\varepsilon\leqslant t\leqslant\frac{1}{2}+\varepsilon}x(t)\geqslant\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)\|x\|_C\right\},$$

易知，P 与 P_ε 都是空间 $E=C[0,1]$ 中的锥，并且 $P_\varepsilon\subset P$．显然 $A:P\to P$ 全连续．

设 $x(t)\in P$．由于 $k(t,s)\leqslant s(1-s)$，故

$$\|Ax\|_C\leqslant\int_0^1 s(1-s)f(x(s))\mathrm{d}s. \tag{4·61}$$

另一方面，当 $\frac{1}{2}-\varepsilon\leqslant t\leqslant\frac{1}{2}+\varepsilon$ 时，有

$$k(t,s)=$$

$$\begin{cases}t(1-s)\geqslant\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)(1-s), & \text{当 } t\leqslant s \text{ 时；}\\ s(1-t)\geqslant s\left[1-\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)\right]=\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)s, & \text{当 } t>s \text{ 时．}\end{cases}$$

因此知

$$k(t,s)\geqslant\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)s(1-s),\quad\forall\,\frac{1}{2}-\varepsilon\leqslant t\leqslant\frac{1}{2}+\varepsilon,$$
$$0\leqslant s\leqslant 1$$

故

$$\min_{\frac{1}{2}-\varepsilon\leqslant t\leqslant\frac{1}{2}+\varepsilon}Ax(t)\geqslant\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)\int_0^1 s(1-s)f(x(s))\mathrm{d}s. \tag{4·62}$$

由(4·61)式与(4·62)式得

$$\min_{\frac{1}{2}-\varepsilon\leqslant t\leqslant\frac{1}{2}+\varepsilon}Ax(t)\geqslant\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)\|Ax\|_C,$$

即 $Ax(t)\in P_\varepsilon$，由此可知 $A(P)\subset P_\varepsilon$，从而更有

$$A(P_\varepsilon)\subset P_\varepsilon,\quad\forall\,0<\varepsilon<\frac{1}{2}. \tag{4·63}$$

由(4·59)式及 $f(0)=0$ 知 $\exists\, r>0$．使当 $0\leqslant x\leqslant r$ 时，恒有 $0\leqslant$

$f(x) \leqslant 8x$，从而，当 $x(t) \in P$，$\|x\|_C = r$，恒有

$$Ax(t) = \int_0^1 k(t,s) f(x(s)) \mathrm{d}s \leqslant 8 \int_0^1 k(t,s) x(s) \mathrm{d}s$$

$$\leqslant 8 \|x\|_C \int_0^1 k(t,s) \mathrm{d}s$$

$$= 8 \|x\|_C \left[\int_0^t s(1-t) \mathrm{d}s + \int_t^1 t(1-s) \mathrm{d}s \right]$$

$$= 4t(1-t) \|x\|_C \leqslant \|x\|_C, \quad \forall\, 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

故
$$\|Ax\|_C \leqslant \|x\|_C, \quad \forall\, x(t) \in P, \quad \|x\|_C = r. \tag{4·64}$$

另一方面，由(4·59)式知 $\exists\, \eta > 0$，使当 $x \geqslant \eta$ 时，恒有 $f(x) \geqslant 24\sqrt{3}x$．令

$$R_\varepsilon = \max\left\{ 2r,\ \eta\left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right)^{-1} \right\}. \tag{4·65}$$

于是 $R_\varepsilon > r$，并且当 $x(t) \in P_\varepsilon$，$\|x\|_C = R_\varepsilon$ 时，有

$$\min_{\frac{1}{2} - \varepsilon \leqslant t \leqslant \frac{1}{2} + \varepsilon} x(t) \geqslant \left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right) \|x\|_C = \left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right) R_\varepsilon \geqslant \eta,$$

从而

$$Ax\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^1 k\left(\frac{1}{2}, s\right) f(x(s)) \mathrm{d}s$$

$$\geqslant \int_{\frac{1}{2}-\varepsilon}^{\frac{1}{2}+\varepsilon} k\left(\frac{1}{2}, s\right) f(x(s)) \mathrm{d}s$$

$$\geqslant 24\sqrt{3} \int_{\frac{1}{2}-\varepsilon}^{\frac{1}{2}+\varepsilon} k\left(\frac{1}{2}, s\right) x(s) \mathrm{d}s$$

$$\geqslant 24\sqrt{3} \left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right) \|x\|_C \int_{\frac{1}{2}-\varepsilon}^{\frac{1}{2}+\varepsilon} k\left(\frac{1}{2}, s\right) \mathrm{d}s$$

$$= 24\sqrt{3} \left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right) \|x\|_C \left[\int_{\frac{1}{2}-\varepsilon}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} s \mathrm{d}s \right.$$

$$+\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\frac{1}{2}(1-s)\mathrm{d}s\Big]$$

$$=12\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)\varepsilon(1-\varepsilon)\|x\|_C,$$

故

$$\|Ax\|_C\geqslant 12\sqrt{3}\varepsilon(1-\varepsilon)\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)\|x\|_C,$$

$$\forall\, x(t)\in P_\varepsilon,\quad \|x\|=R_\varepsilon \tag{4·66}$$

易知函数 $\varphi(\varepsilon)=\varepsilon(1-\varepsilon)\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)$,当 $\varepsilon=\varepsilon_0=\frac{3-\sqrt{3}}{6}$时,达到它在$\left[0,\frac{1}{2}\right]$上的最大值 $\varphi(\varepsilon_0)=\frac{\sqrt{3}}{36}$. 于是,在(4·66)式中,取 $\varepsilon=\varepsilon_0$,得

$$\|Ax\|_C\geqslant\|x\|_C,\quad \forall\, x(t)\in P_{\varepsilon_0},\quad \|x\|=R_{\varepsilon_0}. \tag{4·67}$$

由(4·63)、(4·64)、(4·67)诸式,对于 $\Omega_1=\{x\mid \|x\|_C<r\}$, $\Omega_2=\{x\mid \|x\|_C<R_{\varepsilon_0}\}$以及 P_{ε_0}应用定理 4.4,即知 A 在$P_{\varepsilon_0}\cap(\bar{\Omega}_2\setminus\Omega_1)$中具有不动点 $x(t)$,于是 $x(t)\in P_{\varepsilon_0}$, $r\leqslant\|x\|_C\leqslant R_{\varepsilon_0}$. 由 $k(t,s)$的性质,显然有 $x(t)>0$, $\forall\, 0<t<1$. 证完 .

注 14 可以举出一些满足(4·59)式的初等函数,例如

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n}a_ix^i,\quad a_i\geqslant 0\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

且 $a_1<8$, $a_n>0$ $n>1$,

$$f(x)=\frac{42x^2(2-\cos x)}{1+x}$$

等 .

定理 4.5 设 Ω 是 E 的有界开集 . $\theta\in\Omega$ 设 $A:P\cap\bar{\Omega}\to P$ 全连续, $A\theta=\theta$,并且

$$\inf_{x\in P\cap\partial\Omega}\|Ax\|>0. \tag{4·68}$$

那末，A 在 $P\cap\partial\Omega$ 上必具有固有元，对应于正的固有值，即存在 $x_0\in P\cap\partial\Omega$ 及 $\mu_0>0$，使 $Ax_0=\mu_0x_0$.

证 令 $m=\sup\limits_{x\in P\cap\partial\Omega}\|x\|$，$\beta=\inf\limits_{x\in P\cap\partial\Omega}\|Ax\|$，取 $a>\frac{m}{\beta}$. 于是，若 $aAx=\mu x$，$x\in P\cap\partial\Omega$，那末 $\mu\|x\|=a\|Ax\|>\|x\|$，从而 $\mu>1$，故根据引理 4.3 知

$$i(aA,P\cap\Omega,P)=0. \tag{4·69}$$

令 $H(t,x)=atAx$. 如果 $H(t,x)\neq x$，$\forall x\in P\cap\partial\Omega$，$0\leqslant t\leqslant 1$，那末根据同伦不变性，得

$$i(aA,P\cap\partial\Omega,P)=i(\theta,P\cap\Omega,P)=1,$$

此与(4·69)式矛盾；因此，必有 $x_0\in P\cap\partial\Omega$，$0\leqslant t_0\leqslant 1$ 存在，使 $H(t_0,x_0)=x_0$，即 $at_0Ax_0=x_0$. 显然 $t_0\neq 0$（因 $x_0\in P\cap\partial\Omega$），故 $Ax_0=\mu_0x_0$，$\mu_0=\frac{1}{at_0}>0$. 证完.

注 15 对于 k－集压缩映象，也可得出和定理 4.5 相当的定理（参看〔101〕）.

例 4.4 考察和问题(4·58)对应的固有值问题：

$$\begin{cases}\mu\dfrac{d^2x}{dt^2}+f(x)=0, & 0\leqslant t\leqslant 1;\\ x(0)=x(1)=0,\end{cases} \tag{4·70}$$

其中仍设 $f(x)$ 在 $x\geqslant 0$ 上连续、非负且 $f(0)=0$. 我们证明下面的结论：

结论 若

$$0<\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}<+\infty \tag{4·71}$$

则存在 $R>0$，使对任何 $r>R$，问题(4·70)都有（属于 $C^2[0,1]$

的)解 $x_r(t)$ 及 $\mu_r>0$,满足 $x_r(t)>0$, $\forall\, 0<t<1$,且 $\|x_r\|_C=r$.

证 问题(4·70)属于 $C^2[0,1]$的解等价于积分方程

$$\mu x(t)=\int_0^1 k(t,s)f(x(s))\mathrm{d}s=Ax(t) \qquad (4\cdot 72)$$

属于 $C[0,1]$的解,其中 $k(t,s)$是例 4.3 中所述的 Green 函数.

任取 $0<\varepsilon<\frac{1}{2}$,和例 4.3 中一样,可知(4·63)式成立.由(4·71)式知$\exists\,\tau>0$ 及 $\eta>0$,使当 $x\geqslant\eta$ 时恒有 $f(x)\geqslant\tau x$.令 $R=\eta\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)^{-1}$,下证此 R 即合要求.$\forall\, r>R$,令 $\Omega_r=\{x(t)\mid\|x\|_C<r\}$,于是当 $x(t)\in P_\varepsilon\cap\partial\Omega_r$ 时有

$$\min_{\frac{1}{2}-\varepsilon\leqslant t\leqslant\frac{1}{2}+\varepsilon}x(t)\geqslant\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)\|x\|_C=\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)r>\eta,$$

从而

$$\begin{aligned}
Ax\left(\frac{1}{2}\right)&=\int_0^1 k\left(\frac{1}{2},s\right)f(x(s))\mathrm{d}s\\
&\geqslant\int_{\frac{1}{2}-\varepsilon}^{\frac{1}{2}+\varepsilon}k\left(\frac{1}{2},s\right)f(x(s))\mathrm{d}s\\
&\geqslant\tau\int_{\frac{1}{2}-\varepsilon}^{\frac{1}{2}+\varepsilon}k\left(\frac{1}{2},s\right)x(s)\mathrm{d}s\\
&\geqslant\tau\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)\|x\|_C\int_{\frac{1}{2}-\varepsilon}^{\frac{1}{2}+\varepsilon}k\left(\frac{1}{2},s\right)\mathrm{d}s\\
&=\frac{1}{2}\tau\varepsilon(1-\varepsilon)\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)r,
\end{aligned}$$

由此可知

$$\inf_{x(t)\in P_\varepsilon\cap\partial\Omega_r}\|Ax\|_C\geqslant\frac{1}{2}\tau\varepsilon(1-\varepsilon)\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)r>0.$$

根据定理 4.5 知,存在 $x_r(t)\in P_\varepsilon\cap\partial\Omega_r$ 及 $\mu_r>0$,使 $Ax_r(t)=\mu_r x_r(t)$.证完.

定理 4.6 设 Ω_1,Ω_2,是 E 中有界开集,$\theta\in\Omega_1,\bar{\Omega}_1\subset\Omega_2$,$A:P\cap(\Omega_2\setminus\Omega_1)\to P$ 全连续. 设 $u_0\in P\setminus\{\theta\}$,令

$$P_{u_0}=\{x\mid 存在\lambda>0,使\ x\geqslant\lambda u_0\}$$

如果满足条件

(H_9) $Ax\not\leqslant x,\ \forall x\in P_{u_0}\cap\partial\Omega_2;Ax\not\geqslant(1+\varepsilon)x,Ax\in P\cap\partial\Omega_1,\varepsilon>0$(即锥拉伸)

或

(H_{10}) $Ax\not\geqslant x,\ \forall x\in P_{u_0}\cap\partial\Omega_1;Ax\not\geqslant(1+\varepsilon)x,\ \forall x\in P\cap\partial\Omega_2,\varepsilon>0$(即锥压缩),

那末,A 在$P\cap(\bar{\Omega}_2\setminus\Omega_1)$中必具有不动点.

证 不妨设条件(H_9)满足(当条件(H_{10})满足时,证明类似). 可设 A 在$P\cap\partial\Omega_1$ 与 $P\cap\partial\Omega_2$ 上均无不动点(否则定理已获证). 下证定理 4.2 的条件(H_1)满足. 事实上,若有 $x_0\in P\cap\partial\Omega_2$ 及 $t_0\geqslant 0$ 存在,使 $x_0-Ax_0=t_0u_0$,则 $t_0>0$(因已设 $x\neq Ax,\ \forall x\in P\cap\partial\Omega_2$),从而 $x_0=t_0u_0+Ax_0\geqslant t_0u_0$,故 $x_0\in P_{u_0}\cap\partial\Omega_2$;又 $x_0=t_0u_0+Ax_0\geqslant Ax_0$,此与条件$(H_9)$矛盾. 另外,若有 $x_1\in P\cap\partial\Omega_1,\mu_1\geqslant 1$,使 $Ax_1=\mu_1x_1$,则 $\mu_1>1$(因已设 $x\neq Ax,\ \forall x\in P\cap\partial\Omega_1$),从而 $Ax_1=(1+\varepsilon_1)x_1,\varepsilon_1=\mu_1-1>0$,此与$(H_9)$矛盾. 由此可知,定理 4.2 的条件$(H_1)$满足. 于是根据定理 4.2 知,$A$ 在$P\cap(\Omega_2\setminus\bar{\Omega}_1)$中具有不动点. 证完.

注 16 定理4.6是[102]中主要结果定理 2 的改进. 显然 $P_{u_2}\subset P$,故定理 4.6 是定理 4.3 的改进. 从锥拉伸与锥压缩不动点定理的应用例子中不难看出,$Ax\not\geqslant x$ 是很容易检验的,而条件 $Ax\not\leqslant x$ 检验起来就比较困难. 因此,定理 4.6 的意义在于:将锥拉伸与锥压缩不动点定理中满足 $Ax\not\leqslant x$ 的范围从整

个 $P\cap\partial\Omega_2$（或 $P\cap\partial\Omega_1$）上减弱到只在其一部分 $P_{u_0}\cap\partial\Omega_2$（或 $P_{u_0}\cap\partial\Omega_1$）上，这在具体应用时是有利的．例如，取 $E=C[0,1]$，$P=\{x(t)\mid x(t)\in C[0,1],x(t)\geqslant0\}$，$u_0(t)\equiv1$，则 $P_{u_0}=\{x(t)\mid x(t)\in P,x(t)>0,\ \forall\,0\leqslant t\leqslant1\}$．很明显，对恒正的连续函数来检验条件 $Ax\not\leqslant x$，比对非负连续函数来检验 $Ax\not\leqslant x$，一般说来要简单、容易一些．

注 17 易知，当 P 是体锥时，可将条件（H_9）与（H_{10}）中的 P_{u_0} 换为 P°．事实上，取 $u_0\in P^\circ$，则易知 $P_{u_0}=P^\circ$．

例 4.5 考察非线性积分方程

$$x(t)=\int_{t-\tau}^{t}f(s,x(s))\mathrm{d}s=Ax(t),\qquad(4\cdot73)$$

此方程是某些传染病传播的数学模型（参看〔102〕、〔103〕），其中 $\tau>0$，$f(t,x)$ 是 t 的周期函数，$f(t,0)\equiv0$，需求方程(4·73)的非零周期解．

关于 $f(t,x)$，作下面四条假定：

（$H1$）$f(t,x)$ 连续，非负，$\forall\,-\infty<t<+\infty,x\geqslant0$；

（$H2$）$f(t,0)=0$，$\forall\,-\infty<t<+\infty$；存在 $\omega>0$，使 $f(t+\omega,x)=f(t,x)$，$\forall\,-\infty<t<+\infty,x\geqslant0$；

（$H3$）存在 $R>0$，使 $f(t,x)\leqslant\dfrac{R}{\tau}$，$\forall\,0\leqslant t\leqslant\omega,0\leqslant x\leqslant R$；

（$H4$）对于每个 $t\in(-\infty,+\infty)$，极限

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(t,x)}{x}=a(t)\qquad(4\cdot74)$$

存在有限，并且，对于每个 $k\in(0,1)$，都存在 $\varepsilon_k>0$，使

$$f(t,x)\geqslant ka(t),\quad\forall\,-\infty<t<+\infty,0\leqslant x\leqslant\varepsilon_k.\qquad(4\cdot75)$$

结论 设条件（$H1$）～（$H4$）满足，正整数 N 满足 $\frac{\omega}{N}\leqslant\frac{\tau}{2}$．

令 $I_j=\left[\frac{j-1}{N}\omega,\frac{j}{N}\omega\right], j=0,1,2,\cdots,N$. 如果

$$\prod_{j=1}^{N}\int_{I_j}a(s)\mathrm{d}s>1, \tag{4·76}$$

那末方程(4·73)具有不恒为零的非负的周期为 ω 的连续解 $x(t)(-\infty<t<+\infty)$.

证 首先注意,由 $(H1)\sim(H4)$ 知, $a(t)(-\infty<t<+\infty)$ 是非负的周期为 ω 的有界可测函数;因此,(4·76)式左端诸积分都存在有限．令

$E=\{x(t)\mid x(t)$是$-\infty<t<+\infty$上周期为 ω 的连续函数$\}$,

易知,按普通的函数运算以及范数

$$\|x\|=\sup_{-\infty<t<+\infty}|x(t)|=\max_{0\leqslant t\leqslant\omega}|x(t)|$$

E 成为 Banach 空间．令

$$P=\{x(t)\mid x(t)\in E,\ x(t)\geqslant 0,\ -\infty<t<+\infty\},$$

易知 P 是 E 中一个锥．容易证明, $A:P\to P$ 全连续(只需注意到, A 将 P 中有界集变为 P 中一族函数,它们在 $0\leqslant t\leqslant\omega$ 上一致有界且等度连续). 记 $T_R=\{x(t)\mid x(t)\in E,\|x\|<R\}$. 我们证明

$$Ax(t)\ngeq(1+\varepsilon)x(t),\quad \forall\, x(t)\in P\cap\partial T_R,\quad \varepsilon>0. \tag{4·77}$$

事实上,若存在 $x_0(t)\in P\cap\partial T_R$ 及 $\varepsilon_0>0$,使 $Ax_0(t)\geqslant(1+\varepsilon_0)x_0(t)$,则由 $(H3)$ 知

$$(1+\varepsilon_0)x_0(t)\leqslant Ax_0(t)=\int_{t-\tau}^{t}f(s,x_0(s))\mathrm{d}s$$

$$\leqslant\int_{t-\tau}^{t}\frac{R}{\tau}\mathrm{d}s=R,$$

从而 $(1+\varepsilon_0)\|x_0\|\leqslant R$, 即 $(1+\varepsilon_0)R\leqslant R$, 得出了矛盾,故(4·77)式成立．令 $u_0(t)\equiv 1$,则

$P_{u_0}=\{x(t)\mid x(t)\in E, x(t)>0, \forall -\infty<t<+\infty\}$. 取 $0<k<1$, 使

$$k^N\prod_{j=1}^{N}\int_{I_j}a(s)\mathrm{d}s>1. \tag{4·78}$$

再取 $0<r<R$, 使

$$f(t,x)\geqslant ka(t)x, \quad \forall -\infty<t<+\infty, \quad 0\leqslant x\leqslant r. \tag{4·79}$$

令 $T_r=\{x(t)\mid x(t)\in E, \ \|x\|<r\}$. 我们证明

$$Ax(t)\not\leqslant x(t), \ \forall\ x(t)\in P_{u_0}\cap\partial T_r. \tag{4·80}$$

事实上, 若存在 $x_1(t)\in P_{u_0}\cap\partial T_r$, 使 $Ax_1(t)\leqslant x_1(t)$. 由 $\frac{\omega}{N}\leqslant\frac{\tau}{2}$ 知, 当 $t\in I_j(j=1,2,\cdots,N)$ 时, 有 $J_{j-1}\subset[t-\tau,t]$, 从而, 注意到(4·79)式,

$$\begin{aligned}
\int_{I_j}a(t)x_1(t)\mathrm{d}t&\geqslant\int_{I_j}a(t)Ax_1(t)\mathrm{d}t\\
&=\int_{I_j}a(t)\mathrm{d}t\int_{t-\tau}^{t}f(s,x_1(s))\mathrm{d}s\\
&\geqslant\int_{I_j}a(t)\mathrm{d}t\int_{I_{j-1}}f(s,x_1(s))\mathrm{d}s\\
&\geqslant k\left(\int_{I_j}a(t)\mathrm{d}t\right)\cdot\left(\int_{I_{j-1}}a(s)x_1(s)\mathrm{d}s\right),\\
&\qquad (j=1,2,\cdots,N),
\end{aligned}$$

由此得

$$\begin{aligned}
\int_{I_N}a(t)x_1(t)\mathrm{d}t&\geqslant k^N\left(\prod_{j=1}^{N}\int_{I_j}a(t)\mathrm{d}t\right)\\
&\quad\cdot\left(\int_{I_0}a(t)x_1(t)\mathrm{d}t\right)\\
&=k^N\left(\prod_{j=1}^{N}\int_{I_j}a(t)\mathrm{d}t\right)\cdot\left(\int_{I_N}a(t)x_1(t)\mathrm{d}t\right).
\end{aligned} \tag{4·81}$$

易知$\int_{I_N} a(t)x_1(t)\mathrm{d}t>0$，因为如果$\int_{I_N} a(t)x_1(t)\mathrm{d}t=0$，则由$a(t)\geqslant 0, x_1(t)>0$知$a(t)=0$，$p.p$于$I_N$，从而$\int_{I_N} a(t)\mathrm{d}t=0$，此与(4·76)式矛盾．于是$\int_{I_N} a(t)x_1(t)\mathrm{d}t>0$，再由(4·81)式得

$$k^N\left(\prod_{j=1}^{N}\int_{I_j} a(t)\mathrm{d}t\right)\leqslant 1,$$

此与(4·78)式矛盾．由此可知，(4·80)式成立．

由(4·77)式与(4·80)式，利用定理 4.6(条件(H_{10})满足)，即知 A 在$P\cap(\overline{T}_R\setminus T_r)$中具有不动点．证完．

下面，利用 A 的沿锥P的导算子$A_+'(\theta)$与$A_+'(\infty)$的性质，来判断 A 的正不动点的存在性．

定义 4.1 设 P 是E 中一个锥．$A:P\to P$.

(ⅰ)设 $x_0\in P$. 若存在 $B:E\to E$ 线性有界，使

$$\lim_{h\in P,\ \|h\|\to 0}\frac{\|A(x_0+h)-Ax_0-Bh\|}{\|h\|}=0, \qquad (4\cdot 82)$$

则称 A 在**点**x_0 **处沿** P **可微**，B 称为A 在**点**x_0 **处沿锥** P **的导算子**，记为 $A_+'(x_0)$，即 $A_+'(x_0)=B$.

(ⅱ)若∃$B_1:E\to E$ 线性有界，使

$$\lim_{x\in P,\ \|x\|\to +\infty}\frac{\|Ax-B_1x\|}{\|x\|}=0, \qquad (4\cdot 83)$$

则称A 在**点**∞**处沿** P **可微**，B_1 称为 A 在**点**∞**处沿锥** P **的导算子**，记为 $A_+'(\infty)$，即 $A_+'=B_1$.

注 18 显然，条件(4·82)相当于

$$A(x_0+h)-Ax_0=Bh+\omega(x_0,h), \qquad (4\cdot 84)$$

其中 $\omega(x_0,h)=o(\|h\|)$(当 $h\in P,\|h\|\to 0$ 时).

引理 4.5 设 $A:P\to P$ 全连续．那末

(ⅰ)若 A 在点 $x_0\in P$ 处沿 P 可微,则 $A_+'(x_0)$ 将 P 中有界集变成 E 中相对紧集;

(ⅱ)若 A 在点 ∞ 处沿 P 可微,则 $A_+'(\infty)$ 将 P 中有界集变成 E 中相对紧集;

证 (ⅰ)由于 $A_+'(x_0)$ 是线性算子,故只需证明 $A_+'(x_0)$ 把 $\bar{P}_1=\{x\mid x\in P,\|x\|\leqslant 1\}$ 变成 E 中相对紧集．若不然,则存在 $h_i\in P,\|h_i\|\leqslant 1(i=1,2,\cdots)$ 及 $\varepsilon_0>0$,使

$$\|A_+'(x_0)h_i-A_+'(x_0)h_j\|\geqslant\varepsilon_0\quad(i\neq j).\qquad(4\cdot 85)$$

由于(4·82)式,存在 $\tau>0$,使当 $h\in P,\|h\|\leqslant\tau$ 时,恒有

$$\|A(x_0+h)-Ax_0-A_+'(x_0)h\|\leqslant\frac{\varepsilon_0}{3}\|h\|.$$

于是,当 $i\neq j$ 时有

$$\begin{aligned}&\|A(x_0+\tau h_i)-A(x_0+\tau h_j)\|\\=&\|[A(x_0+\tau h_i)-Ax_0-A_+'(x_0)(\tau h_i)]\\&-[A(x_0+\tau h_j)-Ax_0-A_+'(x_0)(\tau h_j)]\\&+\tau[A_+'(x_0)h_i-A_+'(x_0)h_j]\|\\\geqslant&\tau\|A_+'(x_0)h_i-A_+'(x_0)h_j\|\\&-\|A(x_0+\tau h_i)-Ax_0-A_+'(x_0)(\tau h_i)\|\\&-\|A(x_0+\tau h_j)-Ax_0-A_+'(x_0)(\tau h_j)\|\\\geqslant&\frac{\tau\varepsilon_0}{3},\end{aligned}$$

此与 A 的全连续矛盾．

(ⅱ)和(ⅰ)类似,若不然,则存在 $h_i\in P,\|h_i\|\leqslant 1(i=1,2,\cdots)$ 及 $\varepsilon_0>0$,使

$$\|A_+'(\infty)h_i - A_+'(\infty)h_j\| \geqslant \varepsilon_0 \quad (i \neq j) \tag{4·86}$$

易知 $\sigma = \inf\|h_i\| > 0$(因为若 $\inf\|h_i\| = 0$,则存在子列 $h_{i_k} \to \theta$,由 $A_+'(\infty)$ 的连续性知 $\|A_+'(\infty)h_{i_k} - A_+'(\infty)h_{i_s}\| \to 0\ (k, s \to \infty)$,此与(4·86)式矛盾). 由(4·83)式知,存在 $\rho > 0$,使当 $x \in P$, $\|x\| \geqslant \rho\sigma$ 时,恒有

$$\|Ax - A_+'(\infty)x\| < \frac{\varepsilon_0}{3}\|x\|.$$

于是,当 $i \neq j$ 时有

$$\begin{aligned}
&\|A(\rho h_i) - A(\rho h_j)\| \\
&= \|[A(\rho h_i) - A_+'(\infty)(\rho h_i)] \\
&\quad - [A(\rho h_j) - A_+'(\infty)(\rho h_j)] \\
&\quad + \rho[A_+'(\infty)h_i - A_+'(\infty)h_j]\| \\
&\geqslant \rho\|A_+'(\infty)h_i - A_+'(\infty)h_j\| - \|A(\rho h_i) \\
&\quad - A_+'(\infty)(\rho h_i)\| - \|A(\rho h_j) - A_+'(\infty)h_j\| \\
&\geqslant \frac{\rho\varepsilon_0}{3},
\end{aligned}$$

此与 A 的全连续矛盾 . 证完 .

引理 4.6 若锥 P 是再生的,那末必存在正整数 N,使任何 $x \in E$ 都可表为

$$x = u - v, \tag{4·87}$$

其中 $u \in P$, $v \in P$, $\|u\| \leqslant N\|x\|$, $\|v\| \leqslant (N+1)\|x\|$.

证 显然只需证明:存在 N,使对任何 $x \in E$,都存在 $u \in P$,满足 $x \leqslant u$, $\|u\| \leqslant N\|x\|$.

令 $E_n = \{x \mid \exists u \in P, 使\ x \leqslant u, \|u\| \leqslant n\|x\|\}\quad (n = 1, 2, \cdots)$.

由于 P 是再生的,故 $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$. 由于 Banach 空间是第二纲

集，故必有某 E_{n_1} 在某球壳 $T=\{x \mid r\leqslant\|x-x_0\|\leqslant R\}$ 中是稠密的．由于 P 是再生的，故 $-x_0=y_0-z_0$，y_0、$z_0\in P$，从而 $-x_0\leqslant y_0$．取正整数 n_2，使 $\|y_0\|\leqslant n_2\|x_0\|$．对任何 $x\in E_{n_1}\cap T$，存在 $u\in P$，使 $x\leqslant u$，$\|u\|\leqslant n_1\|x\|$，从而 $x-x_0\leqslant u+y_0\in P$，

$$\begin{aligned}\|u+y_0\| &\leqslant n_1\|x\|+n_2\|x_0\| \\ &\leqslant (n_1+n_2)\|x_0\|+n_1\|x-x_0\| \\ &\leqslant n_3\|x-x_0\|,\end{aligned}$$

其中 $n_3\geqslant\dfrac{(n_1+n_2)\|x_0\|}{r}+n_1$．此即表示 $x-x_0\in E_{n_3}$．因此，E_{n_3} 在球壳 $T_0=\{x \mid r\leqslant\|x\|\leqslant R\}$ 中是稠密的．但 $x\in E_{n_3}$ 时必有 $tx\in E_{n_3}$（$\forall t\geqslant 0$），因此 E_{n_3} 在整个 E 中是稠密的．

下证 $E=E_{3n_3}$．对任何 $x\in E$，需证 $x\in E_{3n_3}$．可设 $x\neq\theta$（因 $\theta\in E_{3n_3}$）．由于 E_{n_3} 的稠密性，$\exists\, x_1\in E_{n_3}$，使

$$\|x-x_1\|<\frac{1}{2}\|x\|$$

由 $x_1\in E_{n_3}$ 知 $\exists\, u_1\in P$，使

$$x_1\leqslant u_1,\quad \|u_1\|\leqslant n_3\|x_1\|;$$

同理，存在 $x_2\in E_{n_3}$，$u_2\in P$，使

$$\|x-x_1-x_2\|<\frac{1}{2^2}\|x\|,\quad x_2\leqslant u_2,\quad \|u_2\|\leqslant n_3\|x_2\|;$$

一直继续下去，一般地有

$$\|x-x_1-\cdots-x_k\|<\frac{1}{2^k}\|x\|,\quad x_k\leqslant u_k,$$

$$u_k\in P,\quad \|u_k\|\leqslant n_3\|x_k\|;$$

…………

显然 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}x_k=x$．由 $x_k=(x-x_1-\cdots-x_{k-1})-(x-x_1-\cdots-x_k)$ 知

$$\|x_k\| < \frac{1}{2^{k-1}}\|x\| + \frac{1}{2^k}\|x\| = \frac{3\|x\|}{2^k},$$

故

$$\sum_{k=1}^{\infty}\|u_k\| \leqslant n_3 \sum_{k=1}^{\infty}\|x_k\| \leqslant 3n_3\|x\| \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}$$
$$= 3n_3\|x\| < +\infty,$$

因此，$\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ 收敛．令 $u = \sum_{k=1}^{\infty} u_k$，显然 $u \in P$，$x \leqslant u$ 且

$$\|u\| = \left\|\sum_{k=1}^{\infty} u_k\right\| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\|u_k\| \leqslant 3n_3\|x\|.$$

由此可知，$x \in E_{3n_3}$．取 $N = 3n_3$，引理获证．证完．

引理 4.7 设 $A: P \to P$ 全连续，P 是再生的．那末

(ⅰ)′若 A 在点 $x_0 \in P$ 处沿 P 可微．则 $A_+'(x_0): E \to E$ 全连续；

(ⅱ)″若 A 在 ∞ 处沿 P 可微．则 $A_+'(\infty): E \to E$ 全连续．

证 由(4·87)式知

$$A_+'(x_0)x = A_+'(x_0)u - A_+'(x_0)v, \quad A_+'(\infty)x$$
$$= A_+'(\infty)u - A_+'(\infty)v,$$

于是由引理 4.6 与引理 4.5 即获证．证完．

引理 4.8 设 $A: P \to P$ 全连续，那末

(ⅰ)若 A 在零点 θ 处沿 P 可微，$A\theta = \theta$，则 $A_+'(\theta): P \to P$ 全连续；

(ⅱ)若 A 在点 ∞ 处沿 P 可微．则 $A_+'(\infty): P \to P$ 全连续．

证 (ⅰ)因 $A\theta = \theta$，故对 $x > \theta$，有

$$A_+'(\theta)x = \lim_{t \to +0}\frac{A(tx)}{t}$$

故 $A_+'(\theta)x \in P$．再由引理 4.5 知 $A_+'(\theta): P \to P$ 全连续．

(ⅱ)当 $x>\theta$ 时，由

$$A_+'(\infty)x=\lim_{t\to+\infty}\frac{A(tx)}{t}$$

即知 $A_+'(\infty)x\in P$，再由引理 4.5 知 $A_+'(\infty):P\to P$ 全连续．证完．

以下，用 P_l 表 $P\cap T_l$，$T_l=\{x\mid\|x\|<l\}$，$l>0$；显然 P_l 是 P 中有界开集．

引理 4.9 设 $A:P\to P$ 全连续，$A\theta=\theta$．设 A 在 θ 处沿 P 可微，并且 1 不是 $A_+'(\theta)$的对应于正固有元的固有值，那末

(ⅰ)若 $A_+'(\theta)$不具有大于 1 的对应于正固有元的固有值，则存在 $\tau>0$，使

$$i(A,P_r,P)=1\quad(\forall\,0<r\leqslant\tau);\tag{4·88}$$

(ⅱ)若 $A_+'(\theta)$具有大于 1 的对应于正固有元的固有值，则存在 $\tau>0$，使

$$i(A,P_r,P)=0\quad(\forall\,0<r\leqslant\tau).\tag{4·89}$$

证 易知

$$\alpha=\inf_{x\in P,\ \|x\|=1}\|x-A_+'(\theta)x\|>0.\tag{4·90}$$

事实上，若不然，则存在 $x_n\in P$，$\|x_n\|=1$，使 $x_n-A_+'(\theta)x_n\to\theta$；由引理 4.5 知存在子列$\{x_{n_k}\}$，使 $A_+'(\theta)x_{n_k}\to x^*$，从而 $x_{n_k}\to x^*\in P$，$\|x^*\|=1$，$x^*-A_+'(\theta)x^*=\theta$，此与假定矛盾．

由(4·90)式知

$$\|x-A_+'(\theta)x\|\geqslant\alpha\|x\|\quad(\forall\,x\in P).\tag{4·91}$$

今取 $\tau>0$，使

$$\|Ax-A_+'(\theta)x\|\leqslant\frac{\alpha}{2}\|x\|\quad(\forall\,x\in P,\ \|x\|\leqslant\tau).$$

于是，当$(t,x)\in[0,1]\times\partial P_r(0<r\leqslant\tau)$时，有

$$\|x-[tAx+(1-t)A_+'(\theta)x]\|$$
$$\geqslant\|x-A_+'(\theta)x\|-t\|Ax-A_+'(\theta)x\|$$
$$\geqslant\alpha\|x\|-\frac{\alpha}{2}\|x\|=\frac{\alpha r}{2}>0,$$

故由不动点指数的同伦不变性知

$$i(A,P_r,P)=i(A_+'(\theta),P_r,P)\quad(0<r\leqslant\tau).\quad(4\cdot92)$$

(ⅰ)由假定知，$A_+'(\theta)$满足(4·12)式，根据引理 4.1

$$i(A_+'(\theta),P_r,P)=1\quad(\forall\, 0<r<+\infty).\quad(4\cdot93)$$

由(4·92)式与(4·93)式即得(4·88)式．

(ⅱ)由假定，存在 $h\in P$，$\|h\|=1$，使 $A_+'(\theta)h=\lambda h$，$\lambda>1$．我们证明

$$x>\theta,\ t\geqslant0\Rightarrow x-A_+'(\theta)x\neq th.\quad(4\cdot94)$$

事实上，若存在 $x_0>0$，$t_0\geqslant0$，使 $x_0-A_+'(\theta)x_0=t_0h$．首先，由假定知 $t_0>0$；由引理 4.8 知 $A_+'(\theta)x_0\geqslant\theta$，从而 $x_0\geqslant t_0h$．令 $t^*=\sup\{t\mid x_0\geqslant th\}$，则 $0<t_0\leqslant t^*<+\infty$，$x_0\geqslant t^*h$，

$$x_0=A_+'(\theta)x_0+t_0h\geqslant A_+'(\theta)(t^*h)+t_0h=(\lambda t^*+t_0)h;$$

由于 $\lambda>1$，$\lambda t^*+t_0>t^*$，此显然与 t^* 的定义矛盾．故(4·94)式成立．因此，$A_+'(\theta)$满足(4·19)式，故根据引理 4.2 的系知

$$i(A_+'(\theta),P_r,P)=0\quad(\forall\, 0<r<+\infty).\quad(4\cdot95)$$

由(4·92)式与(4·95)式即得(4·89)式．证完．

引理 4.10 设 $A:P\to P$ 全连续，A 在点∞处沿 P 可微，并且 1 不是 $A_+'(\infty)$的对应于正固有元的固有值，那末

(ⅰ)′若$A_+'(\infty)$不具有大于 1 的对应于正固有元的固有值，则存在 $\sigma>0$，使

$$i(A,P_R,P)=1\quad(\forall\,\sigma\leqslant R<\infty);\quad(4\cdot96)$$

(ⅱ)′若$A_+'(\infty)$具有大于 1 的对应于正固有元的固有值，

则存在 $\sigma>0$，使

$$i(A,P_R,P)=0 \quad (\forall \sigma\leqslant R<+\infty). \tag{4·97}$$

证 和引理 4.9 的证明完全类似，从略．

定理 4.7 设 $A:P\to P$ 全连续，$A\theta=\theta$．设 A 在 θ 与 ∞ 处均沿 P 可微，并且 1 不是 $A_+'(\theta)$ 和 $A_+'(\infty)$ 的对应于正固有元的固有值．如果满足下面两个条件之一：

(H) $A_+'(\theta)$ 具有大于 1 的对应于正固有元的固有值，而 $A_+'(\infty)$ 不具有这种固有值；

$(H)'$ $A_+'(\infty)$ 具有大于 1 的对应于正固有元的固有值，而 $A_+'(\theta)$ 不具有这种固有值；

那末 A 具有正不动点．

证 在满足条件 (H) 的情形下，由引理 4.9 与引理 4.10 知可取 $0<r<R<+\infty$，使

$$i(A,P_r,P)=0,\quad i(A,P_R,P)=1,$$

从而

$$i(A,P_R\setminus\bar{P}_r,P)=i(A,P_R,P)-i(A,P_r,P)=1-0=1\neq 0;$$

同样，在满足条件 $(H)'$ 的情形下，可取 $0<r<R<+\infty$，使 $i(A,P_R\setminus\bar{P}_r,P)=i(A,P_R,P)-i(A,P_r,P)=1-0=1\neq 0$；因此，不论在哪种情形下，都推出 A 在 $P_R\setminus\bar{P}_r$ 中具有不动点．证完．

注 19 可以证明（参看〔97〕），对于严格集压缩映象，定理 4.7 也类似成立．

§5 多解定理

非线性算子方程存在多个解的问题，在理论上和应用上都

是有趣的,并为人们所注意(参看〔107〕~〔117〕以及〔71〕、〔79〕、〔9〕、〔96〕).

设 P 是实 Banach 空间 E 中一个锥．首先,由定理 4.3 与定理 4.4 立刻得到下面两个多解定理．

定理 5.1 设 $\Omega_1,\Omega_2,\Omega_3$ 是 E 中三个有界开集,$\theta\in\Omega_1$,$\bar{\Omega}_1\subset\Omega_2$,$\bar{\Omega}_2\subset\Omega_3$. 设 $A:P\cap(\bar{\Omega}_3\setminus\Omega_1)\to p$ 全连续．如果满足条件

$$Ax\nleq x,\quad \forall\, x\in P\cap\partial\Omega_1;\quad Ax\ngeq x,\quad \forall\, x\in P\cap\partial\Omega_2;$$

$$Ax\nleq x,\quad \forall\, x\in P\cap\partial\Omega_3,$$

那末,A 在$P\cap(\Omega_3\setminus\bar{\Omega}_1)$中至少具有两个不动点 x^* 与 x^{**},并且 $x^*\in P\cap(\Omega_2\setminus\bar{\Omega}_1)$,$x^{**}\in P\cap(\Omega_3\setminus\bar{\Omega}_2)$.

定理 5.2 设 $\Omega_1,\Omega_2,\Omega_3$ 是 E 中三个有界开集,$\theta\in\Omega_1$,$\bar{\Omega}_1\subset\Omega_2$,$\bar{\Omega}_2\subset\Omega_3$. 设 $A:P\cap(\bar{\Omega}_3\setminus\Omega_1)\to P$ 全连续．如果满足条件

$$\|Ax\|\geqslant\|x\|,\quad \forall\, x\in P\cap\partial\Omega_1;$$

$$\|Ax\|\leqslant\|x\|,\quad Ax\neq x,\quad \forall\, x\in P\cap\partial\Omega_2;$$

$$\|Ax\|\geqslant\|x\|,\quad \forall\, x\in P\cap\partial\Omega_3,$$

那末,A 在$P\cap(\bar{\Omega}_3\setminus\Omega_1)$中至少具有两个不动点 x^* 与 x^{**},并且 $x^*\in P\cap(\Omega_2\setminus\Omega_1)$,$x^{**}\in P\cap(\bar{\Omega}_3\setminus\bar{\Omega}_2)$.

例 5.1 考察一般多项式型 Hammerstein 积分方程(4·37),其中 $f(x,u)=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i(x)u^{\alpha_i}$, $\alpha_i>0(i=1,2,\cdots,n)$. 我们有下面的

结论 设(ⅰ)非负连续核 $k(x,y)$满足 $\int_G k(x,y)\mathrm{d}x>0$ (对任何 $y\in G$);(ⅱ)$a_i(x)\geqslant 0$, $a_i\in L(i=1,2,\cdots,n)$,且诸 a_i

中有 $a_{i_0}<1$ 及 $a_{i_1}>1$，使 $\inf\limits_{x\in G}a_{i_0}(x)>0$，$\inf\limits_{x\in G}a_{i_1}(x)>0$；(ⅲ) $\sum\limits_{i=1}^{n}\|a_i\|_L<M^{-1}$，这里 $M=\max\limits_{(x,y)\in G\times G}k(x,y)$. 则方程(4·37)至少具有两个在 G 上不恒为零的非负连续解.

证 考察 $C(G)$中的锥(4·38). 和例4.2结论Ⅰ中的证明一样，可证 $A:P\to P$ 全连续. 取 r，使

$$0<r<\min\left\{1,(\tau_0\beta)^{\frac{1}{1-a_{i_0}}}\right\},\tag{5·1}$$

其中 τ_0,β 的意义见例4.2结论Ⅰ的证明过程. 仿(4·40)式的证明过程可证(4·40)式也成立；取 R，使

$$R>\max\left\{1,\beta^{-\frac{a_{i_1}+1}{a_{i_1}-1}}\tau^{-\frac{1}{a_{i_1}-1}}(M\mathrm{mes}G)^{\frac{a_{i_1}}{a_{i_1}-1}}\right\},\tag{5·2}$$

其中 $\tau_1=\inf\limits_{x\in G}a_{i_1}(x)>0$. 仿(4·47)式之证可证这时(4·47)式也成立. 另外，我们证明

$$\varphi\in\partial P_1\Rightarrow A\varphi\ngeq\varphi.\tag{5·3}$$

其中 $P_1=T_1\cap P$，$T_1=\{\varphi\mid\varphi\in C(G),\|\varphi\|_C<1\}$. 事实上，若有 $\varphi_0\in\partial P_1$ 存在，使 $A\varphi_0\geqslant\varphi_0$，则

$$\begin{aligned}1&=\|\varphi_0\|_C\leqslant\|A\varphi_0\|_C\leqslant M\sum_{i=1}^{n}\|a_i\|_L\|\varphi_0\|_C^{a_i}\\&=M\sum_{i=1}^{n}\|a_i\|_L,\end{aligned}$$

此与假定(ⅲ)矛盾. 故(5·3)式成立.

由(4·40)式，(4·47)式以及(5·3)式，并注意到 $R>1>r>0$，应用定理5.1，取 $\Omega_1=T_r$，$\Omega_2=T_1$，$\Omega_3=T_R$，即知 A 在 $P_R\setminus\overline{P}_r$ 中至少具有两个不动点. 证完.

例5.2 考虑二阶拟线性常微分方程的两点边值问题：

$$\begin{cases}\dfrac{d^2x}{dt^2}+x^\alpha+x^\beta=0, & 0\leqslant t\leqslant 1;\\ x(0)=x'(1)=0,\end{cases}\tag{5·4}$$

其中 $\beta>1>\alpha>0$. 我们有下面的

结论 问题(5·4)具有两个非零解 $x_1(t)$ 与 $x_2(t)$(属于 $C^2[0,1]$),满足

$$x_1(t)>0,\ \ x_2(t)>0\ \ (\text{当 } 0<t\leqslant 1 \text{ 时}),\tag{5·5}$$

$$r<\max_{0\leqslant t\leqslant 1}x_1(t)<1<\max_{0\leqslant t\leqslant 1}x_2(t)<R,\tag{5·6}$$

其中

$$r=\left[\frac{\alpha^\alpha}{(\alpha+2)^{\alpha+2}}\right]^{\frac{1}{2(1-\alpha)}},\quad R=\left[\frac{(\beta+2)^{\beta+2}}{\beta^\beta}\right]^{\frac{1}{2(\beta-1)}}$$

证 众所周知(例如,参看[100]),问题(5·4)属于 $C^2[0,1]$ 的解等价于 Hammerstein 积分方程

$$x(t)=\int_0^1 G(t,s)\{[x(s)]^\alpha+[x(s)]^\beta\}ds\tag{5·7}$$

属于 $C[0,1]$的解,其中 $G(t,s)$表 Green 函数:

$$G(t,s)=\min\{t,s\}=\begin{cases}t, & t\leqslant s;\\ s, & t>s.\end{cases}$$

令 $P=\{x(t)\mid x(t)\in C[0,1],\ x(t)\geqslant 0\}$. 对 $0<\tau<1$, 又令

$$P_\tau=\{x(t)\mid x(t)\in C[0,1],\ x(t)\geqslant 0,\ \min_{\tau\leqslant t\leqslant 1}x(t)\geqslant\tau\|x\|_C\}.$$

易知 P 和 P_τ 都是 $C[0,1]$中的锥, $P_\tau\subset P$. 考察算子

$$Ax(t)=\int_0^1 G(t,s)\{[x(s)]^\alpha+[x(s)]^\beta\}ds.\tag{5·8}$$

显然, $A:P\to P$ 全连续(实际上 $A:P\to P\cap C^2[0,1]$). 当 $x(t)\in P$ 时,对任何 $0<\tau<1$, 有

$$\begin{aligned}
\min_{\tau\leqslant t\leqslant 1} Ax(t) &= \int_0^1 G(\tau,s)\{[x(s)]^\alpha+[x(s)]^\beta\}\mathrm{d}s \\
&= \int_0^\tau s\{[x(s)]^\alpha+[x(s)]^\beta\}\mathrm{d}s \\
&\quad + \int_\tau^1 \tau\{[x(s)]^\alpha+[x(s)]^\beta\}\mathrm{d}s \\
&\geqslant \tau\Big(\int_0^\tau s\{[x(s)]^\alpha+[x(s)]^\beta\}\mathrm{d}s \\
&\quad + \int_\tau^1 s\{[x(s)]^\alpha+[x(s)]^\beta\}\mathrm{d}s\Big) \\
&= \tau\int_0^1 s\{[x(s)]^\alpha+[x(s)]^\beta\}\mathrm{d}s \\
&= \tau\int_0^1 G(1,s)\{[x(s)]^\alpha+[x(s)]^\beta\}\mathrm{d}s \\
&= \tau\|Ax\|_C
\end{aligned}$$

故 $A(P)\subset P_\tau$；当然更有 $A(P_\tau)\subset P_\tau$.

用 S_ρ 表 $C[0,1]$中的球面 $\{x\mid\|x\|_C=\rho\}$，则当 $x\in P\cap S_1$ 时，有

$$\begin{aligned}
\|Ax\|_C &= \int_0^1 G(1,s)\{[x(s)]^\alpha+[x(s)]^\beta\}\mathrm{d}s \\
&= \int_0^1 s\{[x(s)]^\alpha+[x(s)]^\beta\}\mathrm{d}s \\
&\leqslant (\|x\|_C^\alpha+\|x\|_C^\beta)\int_0^1 s\mathrm{d}s \\
&= 1 = \|x\|_C
\end{aligned} \tag{5·9}$$

下证

$$Ax\neq x\quad(\text{当 } x\in P\cap S_1 \text{ 时}). \tag{5·10}$$

事实上，若存在 $x^*\in P\cap S_1$，使 $Ax^*=x^*$，则由(5·9)式知

$$\int_0^1 s\{[x^*(s)]^\alpha+[x^*(s)]^\beta\}\mathrm{d}s=1,$$

从而

$$\int_0^1 s\{(1-[x^*(s)]^\alpha)+(1-[x^*(s)]^\beta)\}\mathrm{d}s=0;$$

由此可知 $x^*(s)\equiv 1\quad(0\leqslant s\leqslant 1)$，此与

$$x^*(0)=Ax^*(0)=\int_0^1 G(0,s)\{[x^*(s)]^\alpha+[x^*(s)]^\beta\}\mathrm{d}x=0$$

矛盾．故(5·10)式成立．

当 $x(t)\in P_\tau$ 时，有

$$\begin{aligned}\|Ax\|_C &= \int_0^1 G(1,s)\{[x(s)]^\alpha+[x(s)]^\beta\}\mathrm{d}s\\ &= \int_0^1 s\{[x(s)]^\alpha+[x(s)]^\beta\}\mathrm{d}s\\ &\geqslant \int_\tau^1 s\{[x(s)]^\alpha+[x(s)]^\beta\}\mathrm{d}s\\ &\geqslant (\tau^\alpha\|x\|_C^\alpha+\tau^\beta\|x\|_C^\beta)\int_\tau^1 s\mathrm{d}s\\ &= \frac{1}{2}(1-\tau^2)(\tau^\alpha\|x\|_C^\alpha+\tau^\beta\|x\|_C^\beta).\end{aligned}\tag{5·11}$$

易知，函数 $h_1(\tau)=(1-\tau^2)\tau^\alpha$ 与 $h_2(\tau)=(1-\tau^2)\tau^\beta$ 分别在点 $\tau=\tau_1=\left(\frac{\alpha}{\alpha+2}\right)^{\frac{1}{2}}$ 与点 $\tau=\tau_2=\left(\frac{\beta}{\beta+2}\right)^{\frac{1}{2}}$ 处达到它们在 $0\leqslant\tau\leqslant 1$ 上的最大值．当 $x\in P_{\tau_2}\cap S_R$ 时（R 的定义见(5·6)式)，由(5·11)式知

$$\|Ax\|_C>\frac{1}{2}(1-\tau_2^2)\tau_2^\beta\|x\|_C^\beta=\frac{1}{2}\left(1-\frac{\beta}{\beta+2}\right)\cdot\left(\frac{\beta}{\beta+2}\right)^{\frac{\beta}{2}}\cdot R^\beta$$

$$=\frac{1}{\beta+2}\left(\frac{\beta}{\beta+2}\right)^{\frac{\beta}{2}}\cdot\left[\frac{(\beta+2)^{\beta+2}}{\beta^\beta}\right]^{\frac{\beta}{2}}\cdot R=R=\|x\|_C\tag{5·12}$$

而当 $x\in P_{\tau_2}\cap S_1$ 时，由(5·9)式知 $\|Ax\|_C\leqslant\|x\|_C$．于是根据定理 4.4 知，存在 $x_2\in P_{\tau_2}$，$1\leqslant\|x_2\|_C<R$，使 $Ax_2=x_2$．再由(5·

10)式知，$\|x_2\|_C\neq 1$，故 $1<\|x_2\|_C<R$.

同理，当 $x\in P_{\tau_1}\cap S_r$ 时（r 的定义见(5·6)式），由(5·11)式知

$$\|Ax\|_C>\frac{1}{2}(1-\tau_1^2)\tau_1^\alpha\|x\|_C^\alpha=\frac{1}{2}\left(1-\frac{\alpha}{\alpha+2}\right)\cdot\left(\frac{\alpha}{\alpha+2}\right)^{\frac{\alpha}{2}}\cdot r^\alpha$$

$$=\frac{1}{\alpha+2}\left(\frac{\alpha}{\alpha+2}\right)^{\frac{\alpha}{2}}\left[\frac{\alpha^\alpha}{(\alpha+2)^{\alpha+2}}\right]^{-\frac{1}{2}}\cdot r=r=\|x\|_C, \qquad (5\cdot 13)$$

而当 $x\in P_{\tau_1}\cap S_1$ 时由(5·9)式知 $\|Ax\|_C\leqslant\|x\|_C$. 于是，也根据定理 4.4 知存在 $x_1\in P_{\tau_1}$，$r<\|x_1\|_C\leqslant 1$ 使 $Ax_1=x_1$. 再由(5·10)式知 $\|x_1\|_C\neq 1$. 故 $r<\|x_1\|_C<1$.

最后证明(5·5)式. 由于 $x_1(t)\geqslant 0, \neq 0$；故当 $0<t\leqslant 1$ 时，有

$$x_1(t)=Ax_1(t)=\int_0^1 G(t,s)\{[x_1(s)]^\alpha+[x_1(s)]^\beta\}\mathrm{d}s$$

$$=\int_0^1 s\{[x_1(s)]^\alpha+[x_1(s)]^\beta\}\mathrm{d}s$$

$$+t\int_t^1\{[x_1(s)]^\alpha+[x_1(s)]^\beta\}\mathrm{d}s>0.$$

同理可知 $x_2(t)>0$ $(0<t\leqslant 1$ 时). 证完.

引理 5.1 设 X 是实 Banach 空间 E 的一个收缩核，X_1 是 X 的一个有界凸收缩核，U 是 X 的非空开集且 $U\subset X_1$. 又设 $A: X_1\to X$ 全连续，$A(X_1)\subset X_1$，并且 A 在 $X_1\setminus U$ 上没有不动点，则必有 $i(A,U,X)=1$.

证 由于 Hausdorff 空间的收缩核一定是闭集，故 X_1 是 X 中闭集，从而 $\overline{U}\subset X_1$（实际上，由于 X 又是 E 中闭集，故 X_1 是 E 中闭集）. 于是根据定理 4.1(iv)知

$$i(A,U,X)=i(A,U,X_1). \qquad (5\cdot 14)$$

由于 U 是X 的(相对)开集,而 $U\subset X_1\subset X$,故 U 也是X_1 的相对开集．由假定,A 在$X_1\setminus U$ 上没有不动点,于是根据定理 4.1(Ⅴ)知

$$i(A,X_1,X_1)=i(A,U,X_1). \tag{5·15}$$

取 $x_0\in U\subset X_1$,令

$$h(t,x)=tx_0+(1-t)Ax.$$

显然(注意 X_1 的凸性),$h:[0,1]\times X_1\to X_1$ 全连续．由此,并注意到 X_1 本身作为 X_1 的开集,其边界是空集,根据不动点指数的同伦不变性及正规性,得

$$i(A,X_1,X_1)=i(x_0,X_1,X_1)=1. \tag{5·16}$$

由(5·14)、(5·15)、(5·16)三式,即得 $i(A,U,X)=1$. 证完．

系 设 X 是实 Banach 空间 E 中一个非空有界凸闭集,A:$X\to X$ 全连续．则 $i(A,X,X)=1$.

证 在引理 5.1 中,取 $U=X_1=X$ 即获证．

定理 5.3(见〔78〕) 设实 Banach 空间 E 中体锥 P 是正规的,$y_1,z_1,y_2,z_2\in E$ 满足$y_1<z_1<y_2<z_2$. 又设 $A:[y_1,z_2]\to E$ 全连续、强增,并且

$$y_1\leqslant Ay_1,\quad Az_1<z_1,\quad y_2<Ay_2,\quad Az_2\leqslant z_2,$$

那末,A 在$[y_1,z_2]$中至少有三个不动点 x_1,x_2,x_3,满足 $y_1\leqslant x_1\ll z_1$, $y_2\ll x_2\leqslant z_2$, $y_2\not\leqslant x_3\not\leqslant z_1$.

证 令 $X=[y_1,z_2]$, $X_1=[y_1,z_1]$,$X_2=[y_2,z_2]$. 则 X,X_1,X_2 都是 E 中非空有界凸闭集(图 3－5·1),从而都是 E 的收缩核,由于 $X_1\subset X\subset E$, $X_2\subset X\subset E$,故 X_1 与 X_2 都是 X 的收缩核．由定理 2.1 知,A 在$[y_1,z_1]$中具有最大不动点 x_1:$Ax_1=x_1$,$y_1\leqslant x_1\leqslant z_1$. 显然 $x_1<z_1$,从而由 A 的强增性知,y_1

$\leqslant x_1 = Ax_1 \ll Az_1 < z_1$，故 x_1 是 X_1 在 X 中的内点．于是 X_1 在 X 中的内点集 U_1 非空，$U_1 \subset X_1$ 且 A 在 $X_1 \setminus U_1$ 中没有不动点．于是，注意到 U_1 是 X 中开集以及

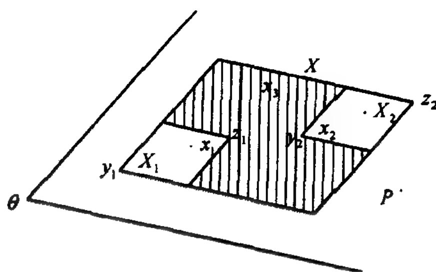


图 3-5·1

$A(X_1) \subset X_1$，应用引理 5.1 知

$$i(A, U_1, X) = 1.$$

同理可证 A 在 $[y_2, z_2]$ 中具有最小不动点 x_2，它满足 $y_2 \ll x_2 \leqslant z_2$，它是 X_2 在 X 中的内点．于是 X_2 在 X 中的内点集 U_2 非空，U_2 是 X 中开集，$U_2 \subset X_2$，A 在 $X_2 \setminus U_2$ 中没有不动点，$A(X_2) \subset X_2$ 从而

$$i(A, U_2, X) = 1.$$

根据不动点指数的可加性，得

$$i(A,X,X) = i(A,U_1,X) + i(A,U_2,X) + i(A,X \setminus (\overline{U_1} \cup \overline{U_2}),X).$$

由引理 5.1 系得 $i(A,X,X) = 1$，由此可知

$$i(A, X \setminus (\overline{U_1} \cup \overline{U_2}), X) = 1 - 1 - 1 = -1 \neq 0.$$

从而 A 在 $X \setminus (\overline{U_1} \cup \overline{U_2})$ 中具有不动点 x_3．注意到 $\overline{U_1} \cup \overline{U_2} = X_1 \cup X_2$，即知 $y_2 \not\leqslant x_3 \not\leqslant z_1$．证完．

系　设定理 5.3 的条件满足，则 A 在 $[y_1, z_2]$ 中至少有三个不动点 x_1^*, x_2^*, x_3^*，满足 $x_1^* \ll x_2^* \ll x_3^*$．

证　由定理 2.1 知 A 在 $X = [y_1, z_2]$ 中具有最大不动点 x_3^* 与最小不动点 x_1^*．由于 A 在 X 中至少具有三个不动点（根

据定理 5.3)，故必 $x_3^* \neq x_1^*$，而且 A 在$[y_1, z_2]$中还具有另一个不动点 x_2^*．从而 $x_1^* < x_2^* < x_3^*$．由 A 的强增性得 $Ax_1^* \ll Ax_2^* \ll Ax_3^*$，即 $x_1^* \ll x_2^* \ll x_3^*$．证完．

注 1 类似地可证下述一般结论：设 E 中体锥 P 是正规的，$y_i, z_i \in E(i=1,2,\cdots,m)$满足

$$y_1 < z_1 < y_2 < z_2 < \cdots < y_m < z_m.$$

又设 $A:[y_1, z_m] \to E$ 全连续、强增，并且满足

$$y_1 \leqslant Ay_1,\quad Az_1 < z_1,\quad y_2 < Ay_2,\quad Az_2 < z_2, \cdots, y_m < Ay_m,$$
$$Az_m \leqslant z_m.$$

则 A 在$[y_1, z_m]$中至少具有 $2m-1$ 个不动点 $x_1, x_2, \cdots, x_{2m-1}$，满足

$$y_1 \leqslant x_1 \ll z_1,\quad y_2 \ll x_2 \ll z_2,\quad y_{m-1} \ll x_{m-1} \ll z_{m-1},$$
$$y_m \ll x_m \leqslant z_m;\quad y_{i+1} \not\leqslant x_{m+i} \not\leqslant z_i \quad (i=1,2,\cdots,m-1).$$

显然，在 $m>2$ 时，上述条件是比较严厉的，一般算子不易满足．

下面，将定理 5.3 应用于积分方程以及半线性椭圆型偏微分方程(参看[79])．

例 5.3 考察 Hammerstrin 积分方程

$$\varphi(x) = \int_G k(x,y) f(y, \varphi(y)) \mathrm{d}y = A\varphi(x), \qquad (5\cdot17)$$

其中 G 表 R^N 中某有界闭域．

结论 设 $k(x,y) \in C(G\times G)$，$k(x,y)>0((x,y)\in G\times G)$，$f(x,u)\in C(G\times[a,b])$，$a\geqslant 0$．又设对任何 $x\in G$，(x,u)关于 u 在$[a,b]$上是严格增的，并且存在 $c,d(a<c<d<b)$满足

$$mf(x,a)\geqslant a,\quad Mf(x,c)<c,\quad mf(x,d)>d$$

$$Mf(x,b) \leqslant b \qquad (\forall x \in G),$$

其中 $m = \min\limits_{x \in G} \int_G k(x,y)\mathrm{d}y$, $M = \max\limits_{x \in G} \int_G k(x,y)\mathrm{d}y$.

那末方程(5·17)必至少具有三个 G 上连续解 $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$,满足 $a \leqslant \varphi_i(x) \leqslant b (i=1,2,3)$,并且

$$a \leqslant \varphi_1(x) < c, \quad d < \varphi_2(x) \leqslant b, \quad (\forall x \in G),$$

$$\min_{x \in G} \varphi_3(x) < d, \quad \max_{x \in G} \varphi_3(x) > c$$

证 令 $E = C(G)$, $P = \{\varphi \mid \varphi \in C(G), \ \varphi(x) \geqslant 0\}$. 则 P 是E 中一个正规的体锥. 令 $\psi_1(x) \equiv a$, $\psi_2(x) \equiv c$, $\psi_3(x) \equiv d$, $\psi_4(x) \equiv b$. 显然, $A:[\psi_1, \psi_4] \to C(G)$全连续. 由所设条件易知:当 $\varphi < \psi$(即 $\varphi(x) \leqslant \psi(x)$, $\varphi(x) \not\equiv \psi(x)$)时,必有 $A\varphi \ll A\psi$(即 $A\varphi(x) < A\psi(x)$),因此 A 是强增的. 另外,我们有

$$A\psi_1(x) = \int_G k(x,y) f(y,a)\mathrm{d}y \geqslant \frac{a}{m} \int_G k(x,y)\mathrm{d}y \geqslant a$$
$$= \psi_1(x),$$

$$A\psi_2(x) = \int_G k(x,y) f(y,c)\mathrm{d}y < \frac{c}{M} \int_G k(x,y)\mathrm{d}y \leqslant c$$
$$= \psi_2(x)$$

同理可知

$$A\psi_3(x) > \psi_3(x) \quad A\psi_4(x) \leqslant \psi_4(x).$$

故定理 5.3 的全部条件满足. 因此, A 在$[\psi_1, \psi_4]$中至少具有三个不动点 $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$,满足 $\psi_1 \leqslant \varphi_1 \ll \psi_2$, $\psi_3 \ll \varphi_2 \leqslant \psi_4$, $\psi_3 \not\leqslant \varphi_3 \not\leqslant \psi_2$. 证完.

例 5.4 给定一致椭圆型算子

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u,$$

即设存在常数 $\mu_0 > 0$,使对一切 $x \in \bar{\Omega}$(Ω 表 R^N 中某有界凸区

域，$\partial\Omega\in C^{2+\mu}$，$0<\mu<1$)，一切 $\xi=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_N)\in R^N$，皆有 $\sum_{i,j}^{N}a_{ij}(x)\xi_i\xi_j\geqslant\mu_0|\xi|^2$，这里，设 $a_{ij}(x)=a_{ji}(x)$，$a_{ij}(x)$，$b_i(x)$，$c(x)$，都属于 $C^\mu(\bar{\Omega})$，且 $c(x)\geqslant0$. 设 $\beta=(\beta_1,\cdots,\beta_N)$是$\partial\Omega$ 上属于$C^{1+\mu}$的向量场，且满足 $\beta\cdot n>0$(n 表$\partial\Omega$ 上的向外法线单位向量，$\beta\cdot n$ 表两向量β与n 的内积). 给定边界算子 B:

$$Bu=bu+\delta\beta\cdot\mathrm{grad}u=b(x)u+\delta\sum_{i=1}^{N}\beta_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i},$$

其中 $b(x)\in C^{1+\mu}(\partial\Omega)$，并且假定是下面三种情况之一：(ⅰ)$\delta=0$，且 $b(x)\equiv1$(这时 B 叫做 Dirichlet 边界算子)；(ⅱ)$\delta=1$，且 $b(x)\equiv0$(这时 B 叫做 Neumann 边界算子，这时要求 $c(x)>0$)；(ⅲ)$\delta=1$，且 $b(x)>0$(这时 B 叫做斜微商边界算子).

考察边值问题：

$$\begin{cases}Lu=f(x,u), & x\in\Omega;\\ Bu=0, & x\in\partial\Omega,\end{cases}\tag{5·18}$$

其中 $f(x,u)\in C^1(\bar{\Omega}\times R^1)$. 函数 $v=v(x)\in C^{2+\mu}(\bar{\Omega})$叫做问题(5·18)的一个下解，如果它满足

$$\begin{cases}Lv\leqslant f(x,v), & x\in\Omega;\\ Bv\leqslant0, & x\in\partial\Omega.\end{cases}$$

同样，函数 $w=w(x)\in C^{2+\mu}(\bar{\Omega})$叫做问题(5·18)的一个上解，如果它满足

$$\begin{cases}Lw\geqslant f(x,w), & x\in\Omega;\\ Bw\geqslant0, & x\in\partial\Omega.\end{cases}$$

如果问题(5·18)的一个下(上)解本身不是(5·18)的解，则称它是问题(5·18)的一个严格下(上)解. 另外，用 $e=e(x)\in C^{2+\mu}(\bar{\Omega})$表线性边值问题

$$\begin{cases} Lu = 1, & x \in \Omega; \\ Bu = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

的惟一解(注意, $e(x) > 0 \quad \forall x \in \Omega$).

结论 如果存在问题(5·18)的下解 $v_1(x)$, 上解 $w_2(x)$, 严格上解 $w_1(x)$, 严格下解 $v_2(x)$以及常数 $\gamma > 0$, 使

$$\begin{cases} -\gamma e(x) \leqslant v_1(x) \leqslant w_1(x) \leqslant v_2(x) \leqslant w_2(x) \leqslant \gamma e(x), \\ v_1(x) \not\equiv w_1(x), \quad w_1(x) \not\equiv v_2(x), \quad v_2(x) \not\equiv w_2(x) \end{cases} \tag{5·19}$$

那末, 边值问题(5·18)至少有三个解 $u_i(x) \in C^{2+\mu}(\bar{\Omega})$ $(i = 1, 2, 3)$, 满足

$$v_1(x) \leqslant u_1(x) < u_2(x) < u_3(x) \leqslant w_2(x), \quad \forall x \in \Omega. \tag{5·20}$$

证 首先, 我们可假定 $f(x, u)$关于 u 在 $-\gamma M \leqslant u \leqslant \gamma M$ 上是严格增的, 这里 $M = \max\limits_{x \in \bar{\Omega}} e(x)$. 事实上, 因 $f(x, u) \in C^1(\bar{\Omega} \times R^1)$, 故必存在常数 $\omega > 0$, 使

$$f(x, u) - f(x, v) > -\omega(u, v) \quad \forall x \in \bar{\Omega},$$
$$-\gamma M \leqslant v < u \leqslant \gamma M,$$

于是函数 $f_\omega(x, u) = f(x, u) + \omega u$ 在 $-\gamma M \leqslant u \leqslant \gamma M$ 上关于 u 是严格增的, 并且边值问题(5·18)等价于边值问题

$$\begin{cases} (L + \omega) u = f_\omega(x, u), & x \in \Omega; \\ Bu = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{5·21}$$

同时, 显然 $u = u(x)$是问题(5·18)的下(上)解, 当且仅当 $u(x)$是(5·21)的下(上)解. 因此, 代替(5·18), 只须考察问题(5·21)即可.

根据椭圆型方程理论(见〔94〕、〔79〕)知, 对任何 $v \in C^\mu(\bar{\Omega})$, 线性边值问题

$$\begin{cases} Lu = v, & x \in \Omega; \\ Bu = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

具有惟一解 $u = Kv \in C^{2+\mu}(\bar{\Omega})$，并且线性有界算子 $K: C^{\mu}(\bar{\Omega}) \to C^{2+\mu}(\bar{\Omega})$可连续延拓成映 $E = C(\bar{\Omega})$入 $E_e = \{u \in C(\bar{\Omega}) \mid \exists \lambda > 0, -\lambda e(x) \leqslant u(x) \leqslant \lambda e(x)\}$的线性全连续算子，而且还是 e-正的（参看〔79〕引理 5.3）．由定理 1.4 知，E_e 是 Banach 空间且嵌入算子：$E_e \to E$ 是有界的．显然，算子 $\mathbf{f}$ 映$[v_1, w_2] \subset E$ 入 E 连续、有界，而且是严格增的（已假定 $f(x, u)$关于 u 在 $-\gamma M \leqslant u \leqslant \gamma M$ 上是严格增的），并且由(5·19)式知 $v_1, w_1, v_2, w_2 \in E_e$，由此可知，把算子 $K\mathbf{f}$ 视为映$[v_1, w_2] \subset E_e$ 入 E_e 的算子时是全连续的，而且是强增的（关于锥 $P_e = E_e \cap P$，$P = \{u \in E \mid u(x) \geqslant 0\}$）．

因 v_1 是下解，由 K 的定义并注意到 $\mathbf{f}v_1 \in C^{\mu}(\bar{\Omega})$知

$$\begin{cases} L(v_1 - K\mathbf{f}v_1) \leqslant 0, & x \in \Omega; \\ B(v_1 - K\mathbf{f}v_1) \leqslant 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

从而根据极大值原理（见〔78〕）知，$v_1 \leqslant K\mathbf{f}v_1$．同理 $K\mathbf{f}w_1 \leqslant w_1$, $v_2 \leqslant K\mathbf{f}v_2$, $K\mathbf{f}w_2 \leqslant w_2$．但由假定，$w_1 \neq K\mathbf{f}w_1$, $v_2 \neq K\mathbf{f}v_2$，因此 $K\mathbf{f}w_1 < w_1$, $v_2 < K\mathbf{f}v_2$．根据定理 5.3 的系知，算子 $K\mathbf{f}$ 在$[v_1, w_2]$中具有三个不动点 $u_i (i = 1, 2, 3)$，满足 $v_1 \leqslant u_1 \ll u_2 \ll u_3 \leqslant w_2$．由此可知(5·20)式成立．下证 $\mathbf{f}u_i \in C^{\mu}(\bar{\Omega})$, $(i = 1, 2, 3)$．事实上，因 K 映$C(\bar{\Omega})$入 $C^{1+\lambda}$，λ 是满足 $0 < \lambda < 1$ 的任何数（见〔79〕，〔78〕），故 $u_i = K\mathbf{f}u_i \in C^{1+\lambda}(\bar{\Omega}) \subset C^{\mu}(\bar{\Omega})$，从而有 $\mathbf{f}u_i \in C^{\mu}(\bar{\Omega})$．同此可知 $u_i = K\mathbf{f}u_i \in C^{2+\mu}(\bar{\Omega})$，而且是问题(5·18)的解．证完．

定理 5.3 讨论的是强增算子．下面两个定理将不假定算子

是增的．

设 P 是实 Banach 空间 E 中一个锥，$P_r=\{x\in P\mid \|x\|<r\}$，则$\partial P_r=\{x\in P\mid \|x\|=r\}$，$\bar{P}_r=\{x\in P\mid \|x\|\leqslant r\}$．考虑 P 上一个非负连续凹泛函 $\alpha(x)$，即 $\alpha:P\to[0,+\infty)$连续，并且满足

$$\alpha(tx+(1-t)y)\geqslant t\alpha(x)+(1-t)\alpha(y),$$

$$\forall\, x,y\in P,\ 0\leqslant t\leqslant 1.$$

以下恒用 $P(\alpha,a,b)$表集$\{x\mid x\in P, a\leqslant\alpha(x), \|x\|\leqslant b\}$，这里 $0<a<b$．易知 $P(\alpha,a,b)$是有界凸闭集．

定理 5.4(见[114]) 设 $A:\bar{P}_c\to\bar{P}_c$ 全连续，且存在 P 上非负连续凹泛函 $\alpha(x)$，满足 $\alpha(x)\leqslant\|x\|(\forall x\in\bar{P}_c)$．又设存在 $0<d<a<b\leqslant c$，满足

(i) $\{x\mid x\in P(\alpha,a,b),\ \alpha(x)>a\}\neq\varnothing$，并且当 $x\in P(\alpha,a,b)$时，恒有 $\alpha(Ax)>a$；

(ii)当 $x\in\bar{P}_d$ 时恒有$\|Ax\|<d$；

(iii)当 $x\in P(\alpha,a,c)$且$\|Ax\|>b$ 时，恒有 $\alpha(Ax)>a$．

那末，A 在$\bar{P}_c$ 中至少有三个不动点．

证 令 $U_1=\{x\mid x\in\bar{P}_c,\|x\|<d\}$，$U_2=\{x\mid x\in P(\alpha,a,c),\alpha(x)>a\}$．显然(注意到$\alpha(x)\leqslant\|x\|$)，$U_1$ 与 U_2 是$\bar{P}_c$ 中两个互不相交的非空有界凸开集(图 3－5·2)．由(ii)知 $A(\bar{U}_1)\subset U_1$，于是根据引理 5.1 知

$$i(A,U_1,\bar{P}_c)=1. \tag{5·22}$$

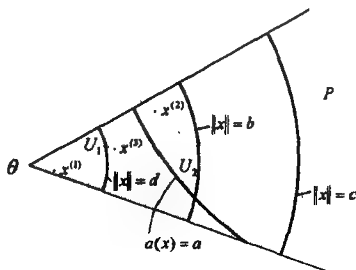


图 3－5·2

下证当 $x\in\partial U_2$ 时 $Ax\neq x$. 事实上若有 $x_0\in\partial U_2$, 使 $Ax_0=x_0$, 则 $\alpha(x_0)=a$, 且或是 $x_0\in P(\alpha,a,b)$, 或是 $\|x\|>b$. 若 $x_0\in P(\alpha,a,b)$, 由条件(ⅰ)知 $\alpha(x_0)=\alpha(Ax_0)>a$, 矛盾; 若 $\|x\|>b$, 则 $\|Ax_0\|=\|x_0\|>b$, 于是由条件(ⅲ)(注意到 $x_0\in P(\alpha,a,c)$), 得到 $\alpha(x_0)=\alpha(Ax_0)>\alpha$, 也矛盾. 因此当 $x\in\partial U_2$ 时, $Ax\neq x$, 故 $i(A,U_2,\overline{P}_c)$ 有意义.

取 $z_0\in P(\alpha,a,b)$, 使 $\alpha(z_0)>a$. 令

$$h(t,x)=tz_0+(1-t)Ax.$$

显然, $h:[0,1]\times\overline{U}_2\to\overline{P}_c$ 全连续. 如果有 $(t_0,x_0)\in[0,1]\times\partial U_2$, 使 $h(t_0,x_0)=x_0$, 则 $\alpha(x_0)=a$. 若 $\|Ax_0\|>b$, 则由条件(ⅲ)知, $\alpha(Ax_0)>a$ 从而

$$\begin{aligned}\alpha(x_0)&=\alpha(h(t_0,x_0))=\alpha(t_0z_0+(1-t_0)Ax_0)\\&\geqslant t_0\alpha(z_0)+(1-t_0)\alpha(Ax_0)>a,\end{aligned}$$

矛盾; 若 $\|Ax_0\|\leqslant b$, 则

$$\begin{aligned}\|x_0\|&=\|t_0z_0+(1-t_0)Ax_0\|\\&\leqslant t_0\|z_0\|+(1-t_0)\|Ax_0\|\leqslant b,\end{aligned}$$

从而 $x_0\in P(\alpha,a,b)$, 于是由条件(ⅰ)知 $\alpha(Ax_0)>a$, 因此

$$\begin{aligned}\alpha(x_0)&=\alpha(t_0z_0+(1-t_0)Ax_0)\\&\geqslant t_0\alpha(z_0)+(1-t_0)\alpha(Ax_0)>a,\end{aligned}$$

也矛盾. 由此可知当 $(t,x)\in[0,1]\times\partial U_2$ 时, 恒有 $h(t,x)\neq x$; 于是由不动点指数的同伦不变性得

$$i(A,U_2,\overline{P}_c)=i(z_0,U_2,\overline{P}_c)=1. \tag{5·23}$$

另外, 根据引理 5.1 的系, 可知

$$i(A,\overline{P}_c,\overline{P}_c)=1. \tag{5·24}$$

于是由不动点指数的可加性, 并注意到(5·22)～(5·24)式, 得到

$$i(A,\bar{P}_c\setminus(\overline{U_1\cup U_2}),\bar{P}_c)$$
$$=i(A,\bar{P}_c,\bar{P}_c)-i(A,U_1,\bar{P}_c)-i(A,U_2,\bar{P}_c)$$
$$=1-1-1=-1.$$

由此可知,存在 $x^{(1)}\in U_1$, $x^{(2)}\in U_2$, $x^{(3)}\in\bar{P}_c\setminus(\overline{U_1\cup U_2})$,使 $Ax^{(i)}=x^{(i)}(i=1,2,3)$. 证完.

定理 5.5(见[114]) 设 $A:\bar{P}_c\to P$ 全连续,并且存在 P 上非负连续凹泛函 $\alpha(x)$,满足 $\alpha(x)\leqslant\|x\|(\forall x\in\bar{P}_c)$. 又设存在 $0<d<a<c$,满足

(i)′ $\{x\mid x\in P(\alpha,a,c),\alpha(x)>a\}\neq\varnothing$ 且当 $x\in P(\alpha,a,c)$时,恒有 $\alpha(Ax)>a$;

(ii)′当 $x\in\bar{P}_d$ 时,恒有 $\|Ax\|<d$;

(iii)′当 $x\in\bar{P}_c$ 且 $\|Ax\|>c$ 时,恒有 $\alpha(Ax)>\frac{a}{c}\|Ax\|$. 那末,$A$ 在 $\bar{P}_c$ 中至少有两个不动点.

证 令 $U_1=\{x\in P_c\mid\|x\|<d\}$. 和定理 5.4 一样,可证(5·22)式成立,从而 A 在 U_1 中具有不动点 x_1. 为证 A 在 $\bar{P}_c$ 中还有另一不动点,作辅助算子 B 如下:

$$Bx=\begin{cases}Ax, & \text{当 } x\in\bar{P}_c,\ \|Ax\|\leqslant c \text{ 时};\\ \dfrac{cAx}{\|Ax\|}, & \text{当 } x\in\bar{P}_c,\ \|Ax\|>c \text{ 时}.\end{cases}$$

显然,B 映 $\bar{P}_c$ 入 $\bar{P}_c$ 全连续. 下证 B 满足定理 5.4 的全部条件(取 $b=c$). 首先当 $x\in\bar{P}_d$ 时,$\|Bx\|=\|Ax\|<d$;当 $x\in P(\alpha,a,c)$时,若$\|Ax\|\leqslant c$,则 $\alpha(Bx)=\alpha(Ax)>a$,若$\|Ax\|>c$,则(注意到条件(iii)′)

$$\alpha(Bx)=\alpha\left(\frac{cAx}{\|Ax\|}\right)=\alpha\left(\frac{c}{\|Ax\|}Ax+\left(1-\frac{c}{\|Ax\|}\right)\theta\right)$$

$$\geqslant \frac{c}{\|Ax\|}\alpha(Ax)+\left(1-\frac{c}{\|Ax\|}\right)\alpha\theta$$

$$\geqslant \frac{c}{\|Ax\|}\alpha(Ax) > \frac{c}{\|Ax\|}\cdot\frac{a}{c}\cdot\|Ax\| = a.$$

由此可知 B 满足定理 5.4 的全部条件(取 $b=c$). 根据定理 5.4 的证明过程可知, B 具有不动点 $x_3 \in \bar{P}_c \setminus (\overline{U_1 \cup U_2})$, 这里 $U_2 = \{x \mid x \in P(\alpha, a, c),\ \alpha(x) > a\}$. 显然 $\overline{U_1 \cup U_2} = \bar{U}_1 \cup \bar{U}_2 = \bar{P}_d \cup P(\alpha, a, c)$, 故 $\alpha(x_3) < a$. 若 $\|Ax_3\| > c$, 则必

$$\alpha > \alpha(x_3) = \alpha(Bx_3) = \alpha\left(\frac{cAx_3}{\|Ax_3\|}\right)$$

$$\geqslant \frac{c}{\|Ax_3\|}\alpha(Ax_3) > \frac{c}{\|Ax_3\|}\cdot\frac{a}{c}\|Ax_3\| = a,$$

矛盾. 因此 $\|Ax_3\| \leqslant c$, 从而 $Ax_3 = Bx_3 = x_3$. 证完.

例 5.5 将定理 5.4 和定理 5.5 应用于二阶拟线性常微分方程两点边值问题:

$$\begin{cases} x'' + f(x) = 0, & 0 \leqslant t \leqslant 1; \\ x(0) = x'(1) = 0, \end{cases} \tag{5·25}$$

可得下面的

结论 设存在 $0 < d < a$, 满足

(ⅰ) 当 $0 \leqslant x \leqslant 2a$ 时, $f(x)$ 连续且有 $f(x) \geqslant 0$;

(ⅱ) 当 $0 \leqslant x \leqslant d$ 时, $f(x) < 2d$;

(ⅲ) 当 $a \leqslant x \leqslant 2a$ 时, $f(x) \geqslant 4a$.

那末, 边值问题(5·25)至少具有两个非负解(属于 $C^2[0,1]$); 若将条件(ⅰ)换为条件:

(ⅰ)* 当 $0 \leqslant x < +\infty$ 时, $f(x)$ 连续, $f(x) \geqslant 0$, 并且

$$\overline{\lim_{x \to +\infty}} \frac{f(x)}{x} < 2,$$

而条件(ⅱ)与(ⅲ)不变, 则问题(5·25)至少具有三个非负解(属

于 $C^2[0,1]$).

证 众所周知，问题(5·25)属于 $C^2[0,1]$的解等价于积分方程

$$x(t)=\int_0^1 G(t,s)f(x(s))\mathrm{d}s$$

属于 $C[0,1]$的解，其中 $G(t,s)$表函数：$G(t,s)=\min\{t,s\}$，即是说，等价于积分算子

$$Ax=\int_0^1 G(t,s)f(x(s))\mathrm{d}s \tag{5·26}$$

在空间 $C[0,1]$中的不动点．令 $P=\{x(t)\mid x(t)\in C[0,1],x(t)\geqslant 0\}$，$\alpha(t)=\min\limits_{\frac{1}{2}\leqslant t\leqslant 1}x(t)$，显然 $\alpha(x)$是 P 上一个非负连续凹泛函，并且满足 $\alpha(x)\leqslant\|x\|$ $(\forall x\in P)$.

先设条件(ⅰ)、(ⅱ)、(ⅲ)满足，这时满足定理 5.5 的全部条件(取 $c=2a$)．首先 $A:\overline{P}_{2a}\to P$ 全连续，并且 $\{x\mid x\in P(\alpha,a,2a),\alpha(x)>a\}\neq\varnothing$，当 $x\in P(\alpha,a,2a)$时，有

$$\begin{aligned}\alpha(Ax)&=\min_{\frac{1}{2}\leqslant t\leqslant 1}\int_0^1 G(t,s)f(x(s))\mathrm{d}s\\&=\int_0^1 G\left(\frac{1}{2},s\right)f(x(s))\mathrm{d}s>\int_{\frac{1}{2}}^1 G\left(\frac{1}{2},s\right)f(x(s))\mathrm{d}s\\&=\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x(s))\mathrm{d}s\geqslant\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^1 4a\,\mathrm{d}s=a,\end{aligned}$$

故定理 5.5 的条件(ⅰ)′满足．至于条件(ⅱ)′满足是显然的，因为当 $x\in\overline{P}_d$ 时，有

$$\begin{aligned}\|Ax\|&=\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\int_0^1 G(t,s)f(x(s))\mathrm{d}s\\&=\int_0^1 G(1,s)f(x(s))\mathrm{d}s=\int_0^1 sf(x(s))\mathrm{d}s\end{aligned}$$

$$< \int_0^1 s \cdot 2d \cdot \mathrm{d}s = d.$$

现设 $x \in \overline{P}_{2a}$ 且 $Ax \neq \theta$，于是有

$$\alpha(Ax) = \int_0^1 G\left(\frac{1}{2}, s\right) f(x(s))\mathrm{d}s$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} sf(x(s))\mathrm{d}s + \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x(s))\mathrm{d}s$$

$$> \frac{1}{2}\left[\int_0^{\frac{1}{2}} sf(x(s))\mathrm{d}s + \int_{\frac{1}{2}}^1 sf(x(s))\mathrm{d}s\right]$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 sf(x(s))\mathrm{d}s = \frac{1}{2}\int_0^1 G(1, s)f(x(s))\mathrm{d}s$$

$$= \frac{1}{2}\|Ax\|. \tag{5·27}$$

从而 $\alpha(Ax) > \frac{a}{2a}\|Ax\|$，故条件(Ⅲ)′满足；因此根据定理 5.5 知 A 在 $\overline{P}_{2a}$ 中至少有两个不动点．

现设条件(ⅰ)*，(ⅱ)，(ⅲ)满足．由条件(ⅰ)* 知存在 $0 < \sigma < 2$ 及 $\tau > 0$，使当 $x \geqslant \tau$ 时有 $f(x) \leqslant \sigma x$．令 $\beta = \max\limits_{0 \leqslant x \leqslant \tau} f(x)$，于是

$$0 \leqslant f(x) \leqslant \sigma x + \beta \quad (0 \leqslant x < +\infty). \tag{5·28}$$

取 $r > \max\left\{\frac{\beta}{2-\sigma}, 2a\right\}$．下证 5.4 的全部条件满足(取 $b = 2a$，$c = r$)．首先，当 $x \in \overline{P}_r$ 时，则(5·28)式知

$$\|Ax\| = \int_0^1 G(1, s)f(x(s))\mathrm{d}s = \int_0^1 sf(x(s))\mathrm{d}s$$

$$\leqslant \int_0^1 s(\sigma(x(s)) + \beta)\mathrm{d}s \leqslant \frac{1}{2}(\sigma\|x\| + \beta)$$

$$\leqslant \frac{1}{2}(\sigma r + \beta) < r,$$

从而 $Ax \in P_r$；因此 $A: \overline{P}_r \to \overline{P}_r$ 全连续．前面已证明 $\{x \mid x \in P$

$(\alpha, a, 2a)$, $\alpha(x)>a\}\neq\phi$ 且当 $x\in P(\alpha, a, 2a)$时, 必有 $\alpha(Ax)>a$, 故定理 5.4 的条件(i)满足. 定理 5.4 的条件(ii)(即 $x\in\bar{P}_d\Rightarrow\|Ax\|<d$)前面已证满足.

显然, 当 $x\in P$ 且 $Ax\neq\theta$ 时(5·27)式也成立. 从而若 $\|Ax\|>2a$, 则 $\alpha(Ax)>\frac{1}{2}\|Ax\|>a$, 从而定理 5.4 的条件(iii)也满足. 根据定理 5.4 知, A 在 $\bar{P}_r$ 中至少具有三个不动点. 证完.

注意, 在上述结论中, 没有假定 $f(x)$是增函数.

§6 Hilbert 投影距离法

设 P 是实 Banach 空间 E 中一个体锥. 对于 $x, y\in P^\circ$, 令

$$M\left(\frac{x}{y}\right)=\inf\{\lambda\mid x\leqslant\lambda y\},\quad m\left(\frac{x}{y}\right)=\sup\{\mu\mid \mu y\leqslant x\}.$$

显然

$$0<m\left(\frac{x}{y}\right)\leqslant M\left(\frac{x}{y}\right),\text{并且 } m\left(\frac{x}{y}\right)y\leqslant x\leqslant M\left(\frac{x}{y}\right)y.$$

Hilbert **投影距离**的定义为

$$\rho(x, y)=\ln\left\{M\left(\frac{x}{y}\right)\Big/m\left(\frac{x}{y}\right)\right\}.\tag{6·1}$$

(参看〔119〕~〔121〕,〔165〕). 易知 $\rho(x, y)$是 P°上的一个拟距离, 即满足

(i) $x\in P^\circ\Rightarrow\rho(x, x)=0$;

(ii) $x, y\in P^\circ\Rightarrow\rho(y, x)=\rho(x, y)$;

(iii) $x, y, z\in P^\circ\Rightarrow\rho(x, y)\leqslant\rho(x, z)+\rho(z, y)$.

另外易知

(iv) $x, y \in P^{\circ}$, $\lambda > 0$, $\mu > 0 \Rightarrow \rho(\lambda x, \mu y) = \rho(x, y)$;

(v) $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = \lambda y$, 其中 $\lambda > 0$.

令 $P_1 = P^{\circ} \cap S_1$, 其中 $S_1 = \{x \mid x \in E, \|x\| = 1\}$. 于是由(V)知$(P_1, \rho)$是一个距离空间.

引理 6.1 设范数关于 P 是单调的(即 $0 \leqslant x \leqslant y \Rightarrow \|x\| \leqslant \|y\|$), 则 $\forall x, y \in P_1$, 有

(i) $0 < m\left(\frac{x}{y}\right) \leqslant 1 \leqslant M\left(\frac{x}{y}\right) < +\infty$;

(ii) $\|x - y\| \leqslant 2(e^{\rho(x, y)} - 1)$.

证 (i) 因 $m\left(\frac{x}{y}\right) y \leqslant x \leqslant M\left(\frac{x}{y}\right) y$, 利用范数关于 P 的单调性得

$$m\left(\frac{x}{y}\right)\|y\| \leqslant \|x\| \leqslant M\left(\frac{x}{y}\right)\|y\|, \text{即 } m\left(\frac{x}{y}\right) \leqslant 1 \leqslant M\left(\frac{x}{y}\right).$$

(ii) 由 $m\left(\frac{x}{y}\right) y \leqslant x \leqslant M\left(\frac{x}{y}\right) y$ 知, $0 \leqslant x - m\left(\frac{x}{y}\right) y \leqslant \left[M\left(\frac{x}{y}\right) - m\left(\frac{x}{y}\right)\right] y$, 从而根据范数关于 P 的单调性得

$$\left\|x - m\left(\frac{x}{y}\right) y\right\| \leqslant \left[M\left(\frac{x}{y}\right) - m\left(\frac{x}{y}\right)\right] \cdot \|y\|.$$

从而(注意(i))

$$\begin{aligned}
\|x - y\| &\leqslant \left\|x - m\left(\frac{x}{y}\right) y\right\| + \left\|m\left(\frac{x}{y}\right) y - y\right\| \\
&\leqslant \left[M\left(\frac{x}{y}\right) - m\left(\frac{x}{y}\right)\right]\|y\| + \left[1 - m\left(\frac{x}{y}\right)\right]\|y\| \\
&\leqslant 2\left[M\left(\frac{x}{y}\right) - m\left(\frac{x}{y}\right)\right] \cdot \|y\| \\
&= 2\left[M\left(\frac{x}{y}\right) \Big/ m\left(\frac{x}{y}\right) - 1\right] m\left(\frac{x}{y}\right) \\
&\leqslant 2\left[M\left(\frac{x}{y}\right) \Big/ m\left(\frac{x}{y}\right) - 1\right] = 2(e^{\rho(x, y)} - 1).
\end{aligned}$$

证完．

引理 6·2 设范数关于 P 是单调的，则(P_1,ρ)是完备的距离空间．

证 设$\{x_n\}\subset P_1$，使 $\rho(x_n,x_m)\to 0(m,n\to\infty)$．由引理 6.1(ⅰ)知 $M\left(\frac{x_n}{x_m}\right)\to 1$，$m\left(\frac{x_n}{x_m}\right)\to 1(n,m\to\infty)$，任给 $\varepsilon>0$，取 $0<\varepsilon'<1$，使 $\ln\frac{1+\varepsilon'}{1-\varepsilon'}<\varepsilon$．于是存在 N，使当 $n>N$，$m>N$ 时，恒有

$$1-\varepsilon'<m\left(\frac{x_n}{x_m}\right)\leqslant 1,\ \ 1\leqslant M\left(\frac{x_n}{x_m}\right)<1-\varepsilon'.$$

于是

$$(1-\varepsilon')x_m\leqslant x_n\leqslant(1+\varepsilon')x_m\quad(n>N,\ \ m>N).\tag{6·2}$$

另一方面，由引理 6.1(ⅱ)知$\|x_n-x_m\|\to 0$，故 $x_n\to x^*\in E$，$\|x^*\|=1$．在(6·2)式中令 $n\to\infty$取极限(保持 m 固定)，得

$$(1-\varepsilon')x_m\leqslant x^*\leqslant(1+\varepsilon')x_m\quad(m>N).\tag{6·3}$$

由此可知 $x^*\in P^\circ$，从而 $x^*\in P_1$；由(6·3)式知

$$m\left(\frac{x^*}{x_m}\right)\geqslant 1-\varepsilon',\ \ M\left(\frac{x^*}{x_m}\right)\leqslant 1+\varepsilon'\quad(m>N),$$

从而当 $m>M$ 时，有

$$\rho(x^*,x_m)=\ln\left[M\left(\frac{x^*}{x_m}\right)\Big/m\left(\frac{x^*}{x_m}\right)\right]\leqslant\ln\frac{1+\varepsilon'}{1-\varepsilon'}<\varepsilon.$$

故 $\rho(x^*,x_m)\to 0\ (m\to\infty)$．证完．

定理 6·1 设范数关于 P 是单调的，$A:P^\circ\to P^\circ$是正 p 齐次的，$0<|p|<1$(即 $A(\lambda x)=\lambda^p Ax$，$\forall\ x\in P^\circ$，$\lambda>0$)，并且 A 是增的(若 $0<p<1$)或减的(若 $-1<p<0$)．那末，A 在 P°中必具有惟一的不动点 x^*．

证　先设$0<p<1$,下证

$$\rho(Ax,Ay)\leqslant p\rho(x,y),\quad \forall\, x,y\in P^{\circ}. \tag{6·4}$$

事实上,由 $m\left(\frac{x}{y}\right)y\leqslant x\leqslant M\left(\frac{x}{y}\right)y$,根据 A 是增的和正 p 齐次的假定知

$$\left[m\left(\frac{x}{y}\right)\right]^{p}Ay\leqslant Ax\leqslant\left[M\left(\frac{x}{y}\right)\right]^{p}Ay$$

从而

$$M\left(\frac{Ax}{Ay}\right)\leqslant\left[M\left(\frac{x}{y}\right)\right]^{p},\quad m\left(\frac{Ax}{Ay}\right)\geqslant\left[m\left(\frac{x}{y}\right)\right]^{p},$$

故

$$\rho(Ax,Ay)=\ln\left[M\left(\frac{Ax}{Ay}\right)\Big/m\left(\frac{Ax}{Ay}\right)\right]$$

$$\leqslant p\ln\left[M\left(\frac{x}{y}\right)\Big/m\left(\frac{x}{y}\right)\right]=p\rho(x,y).$$

现令 $A_1x=\frac{Ax}{\|Ax\|}$,则 $A_1:P_1\to P_1$,并且当 $x,y\in P_1$ 时,有

$$\rho(A_1x,A_1y)=\rho\left(\frac{Ax}{\|Ax\|},\frac{Ay}{\|Ay\|}\right)$$
$$=\rho(Ax,Ay)\leqslant p\rho(x,y).$$

于是,A_1 是映 P_1 入 P_1 的压缩映象．根据引理 6.2,(P_1,ρ)是完备的,从而由压缩映象原理知,A_1 在 P_1 中具有惟一不动点 x_1. 令 $x^*=\|Ax_1\|^{\frac{1}{1-p}}x_1$,下证 x^* 是 A 在P°中惟一不动点．事实上,显然 $x^*\in P^{\circ}$,并且

$$Ax^*=\|Ax_1\|^{\frac{p}{1-p}}Ax_1=\|Ax_1\|^{\frac{p}{1-p}+1}A_1x_1=x^*.$$

另外,若 $y^*\in P^{\circ}$,使 $Ay^*=y^*$,则由(6·4)式知

$$\rho(x^*,y^*)=\rho(Ax^*,Ay^*)\leqslant p\rho(x^*,y^*),$$

从而 $\rho(x^*,y^*)=0$,因此 $x^*=\lambda y^*$,$\lambda>0$. 于是

$$x^* = Ax^* = A(\lambda y^*) = \lambda^p A y^* = \lambda^p y^*,$$

由此得 $\lambda = 1, x^* = y^*$.

再设 $-1 < p < 0$. 对 $x, y \in P^\circ$, 由

$$m\left(\frac{x}{y}\right)y \leqslant x \leqslant M\left(\frac{x}{y}\right)y,$$

根据 A 是减的和正 p 齐次的假定知

$$\left[M\left(\frac{x}{y}\right)\right]^p Ay \leqslant Ax \leqslant \left[m\left(\frac{x}{y}\right)\right]^p Ay,$$

从而

$$\rho(Ax, Ay) \leqslant \ln\left\{\left[m\left(\frac{x}{y}\right)\right]^p \Big/ \left[M\left(\frac{x}{y}\right)\right]^p\right\}$$

$$= (-p)\ln\left[M\left(\frac{x}{y}\right)\Big/ m\left(\frac{x}{y}\right)\right] = |p|\rho(x, y). \qquad (6\cdot5)$$

令 $A_1 x = \dfrac{Ax}{\|Ax\|}$. 可证 $A_1: P_1 \to P_1$, 满足

$$\rho(A_1 x, A_1 y) \leqslant |p|\rho(x, y), \quad \forall x, y \in P_1.$$

于是根据压缩映象原理可知, A_1 在 P_1 中具有惟一不动点 x_1.

令 $x^* = \|Ax_1\|^{\frac{1}{1-p}} x_1$, 可证 x^* 是 A 在 P° 中的惟一不动点. 证完.

注 1 定理 6.1 中不需要假定 A 是全连续的. 另外, 由于使用的是压缩映象原理, A 的不动点 x^* 可按一定的迭代过程求出.

例 6.1 将定理 6.1 应用于下面的非线性积分方程

$$\varphi(x) = \int_G k(x, y)[\varphi(y)]^p \mathrm{d}y, \qquad (6\cdot6)$$

其中 G 表 R^N 中某有界闭域, 即得下面的

结论 设 $0 < |p| < 1$, $k(x, y)$ 在 $G \times G$ 上非负连续, 且

$\int_G k(x,y)\mathrm{d}y>0$(对任何 $x\in G$);那末,积分方程(6·6)在 G 上具有惟一的恒正的连续解.

证 令 $E=C(G)$, $P=\{\varphi\mid\varphi\in C(G),\ \varphi(x)\geqslant 0\}$. 考察算子

$$A\varphi(x)=\int_G k(x,y)[\varphi(y)]^p\mathrm{d}y. \qquad (6\cdot 7)$$

若 $\varphi\in P^{\circ}$,即 $m=\min\limits_{x\in G}\varphi(x)>0$. 令 $M=\max\limits_{x\in G}\varphi(x)$,则

$$A\varphi(x)=\int_G k(x,y)[\varphi(y)]^p\mathrm{d}y$$
$$\geqslant\begin{cases} m^p\int_G k(x,y)\mathrm{d}y>0, & \text{若 } 0<p<1;\\ M^p\int_G k(x,y)\mathrm{d}y>0, & \text{若 } -1<p<0.\end{cases}$$

故 $A\varphi\in P^{\circ}$. 因此 $A:P^{\circ}\to P^{\circ}$. 显然 A 是正 p 齐次的,并且当 $0<p<1$ 时 A 是增的,而当 $-1<p<0$ 时 A 是减的. 再注意到范数关于 p 是单调的,根据定理 6.1 即知 A 在 P° 中具有惟一的不动点. 证完.

注 2 本节内容参看〔119〕及〔120〕. 还可利用投影距离法来讨论当 $p=-1$ 时,积分方程(6·6)恒正解的存在惟一性,这时对核 $k(x,y)$ 的假定要加强为:$k(x,y)>0$, $\forall(x,y)\in G\times G$(参看〔121〕).

和本章内容有关的一些值得研究的问题,参看〔118〕.

第四章　单调映象

对于非线性全连续算子方程，常可用拓扑度理论来研究它的解．但应用上出现的有些非线性算子不是全连续的，而是所谓单调算子(映象)．这时，常可用单调映象的理论来研究这类方程的解．单调映象理论是近二十多年发展起来的(参看〔124〕～〔132〕)，是非线性泛函分析的重要分支之一，它在非线性偏微分方程、非线性积分方程以及 Banach 空间微分方程等方面都有应用．

§1　单调映象的概念

设 E 是实 Banach 空间，E^* 是 E 的共轭空间．对 $x\in E, f\in E^*$，记$(f,x)=f(x)$.

定义 1.1　设 $D\subset E$，映象 $T:D\to E^*$．如果满足条件

$$(Tx-Ty,x-y)\geqslant 0\quad \forall x,y\in D, \tag{1·1}$$

则称 T 是**单调映象(算子)**．若更设(1·1)式中的等号仅当 $x=y$ 时成立，则称 T 是**严格单调映象**．

注 1　集 $G\subset E\times E^*$ 叫做是**单调集**，如果满足：

$$(y_1-y_2,x_1-x_2)\geqslant 0,\quad \forall [x_1,y_1],[x_2,y_2]\in G. \tag{1·2}$$

于是，显然，对映象 $T:D\to E^*$，它是单调映象的充要条件是它的图象 $G(T)=\{[x,y]\mid x\in D, y=Tx\}$ 是空间 $E\times E^*$ 中的单调集．

注 2 很明显,(ⅰ)若 $T_1:D\to E^*$, $T_2:D\to E^*$,都是单调映象,则 $T_1+T_2:D\to E^*$ 也是单调映象;(ⅱ)若 $T:D\to E^*$ 是单调映象,$\lambda\geqslant 0$,则 $\lambda T:D\to E^*$ 也是单调映象 .(ⅲ)对于线性算子 $T:D\to E^*$, T 单调$\Leftrightarrow(Tx,x)\geqslant 0$, $\forall x\in D$.

例 1.1 设 $f:R^1\to R^1$ 是增函数,即 $-\infty<x_1<x_2<+\infty \Rightarrow f(x_1)\leqslant f(x_2)$(注意,$f$ 不必连续),则 f 是单调映象 . 事实上,$(R^1)^*=R^1$,且

$$(f(x_1)-f(x_2),x_1-x_2)=(f(x_1)-f(x_2))(x_1-x_2)\geqslant 0,$$
$$\forall x_1,x_2\in R^1.$$

又显然,若 $f:R^1\to R^1$ 是严格增函数,即 $-\infty<x_1<x_2<+\infty \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$,则 f 是严格单调映象 .

例 1.2 设 H 是实 Hilbert 空间,$A:H\to H$ 是非扩张映象,即

$$\|Ax-Ay\|\leqslant\|x-y\|,\quad \forall x,y\in H.$$

则 $T=I-A:H\to H$ 必是单调映象 . 事实上,我们有

$$(Tx-Ty,x-y)=\|x-y\|^2-(Ax-Ay,x-y)$$
$$\geqslant\|x-y\|^2-\|Ax-Ay\|\cdot\|x-y\|\geqslant 0,\quad \forall x,y\in H.$$

例 1.3 先简要地介绍一下 Sobolev 空间的概念(参看〔37〕,〔135〕,〔130〕,〔123〕). 设 Ω 是 R^n 中某有界区域 . 令

$$C_0^\infty(\Omega)=\{\varphi\mid\varphi \text{在}\Omega\text{ 内无穷次连续可微,且 }\varphi\text{ 具有紧支集 }\subset\Omega\}.$$

φ 的支集 $\text{supp}\varphi=\overline{F}$, $F=\{x\mid x\in\Omega,\varphi(x)\neq 0\}$. 令

$$L_{\text{loc}}^1(\Omega)=\{\varphi\mid\varphi\text{ 在 }\Omega\text{ 上局部可积,即 }\varphi\text{ 在 }\Omega\text{ 的任一闭子域上均 Lebesgue 可积}\}.$$

记 $D^\alpha=D_1^{\alpha_1}D_2^{\alpha_2}\cdots D_n^{\alpha_n}=\dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}$, $D_i=\dfrac{\partial}{\partial x_i}$, $D_i^{\alpha_i}=\dfrac{\partial^{\alpha_i}}{\partial x_i^{\alpha_i}}$,

$\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$, $|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$, $\alpha_i\geqslant 0$. 我们使用的是广义(弱)微商,即:设 $u\in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$,若 $v\in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$满足

$$\int_\Omega u(x)D^\alpha\varphi(x)\mathrm{d}x=(-1)^{|\alpha|}\int_\Omega v(x)\varphi(x)\mathrm{d}x,$$

$$\forall\,\varphi\in C_0^\infty(\Omega),\tag{1·3}$$

则称 v 是 u 的广义(弱)α 阶微商:$v=D^\alpha u=\dfrac{\partial^{|\alpha|}u}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}$(注意,(1·3)式左端 $D^\alpha\varphi(x)$为普通微商). 显然,当 $u\in C^{|\alpha|}(\Omega)$时,广义 α 阶微商与普通微商一致. 因此,广义微商是普通微商的推广. 设 m 是正整数,$1\leqslant p<+\infty$. 令

$$W^{m,p}(\Omega)=\{u\mid u\in L^p(\Omega),D^\alpha u\in L_p(\Omega),1\leqslant|\alpha|\leqslant m\},$$

在其中引入范数

$$\|u\|_{m,p}=\Big(\sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m}\|D^\alpha u\|_p^p\Big)^{\frac{1}{p}}$$

$$=\Big(\sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m}\int_\Omega|D^\alpha u(x)|^p\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{p}},\tag{1·4}$$

可证 $W^{m,p}(\Omega)$是可分的 Banach 空间,称为 **Sobolev 空间**. 若 $1<p<+\infty$, $W^{m,p}(\Omega)$还是自反的,一致凸的. 显然,$C_0^\infty(\Omega)\subset W^{m,p}(\Omega)$. $C_0^\infty(\Omega)$在 $W^{m,p}(\Omega)$中的完备化空间记为 $W_0^{m,p}(\Omega)$,它是 $W^{m,p}(\Omega)$的一个闭子空间. 空间 $W_0^{m,p}(\Omega)$的共轭空间记为 $W^{-m,p'}(\Omega)$,这里$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p'}=1$. 常记 $H^m(\Omega)=W^{m,2}(\Omega)$,它是一个 Hilbert 空间,其中内积为

$$(u,v)_m=\sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m}\int_\Omega D^\alpha u(x)\cdot D^\alpha v(x)\mathrm{d}x,$$

$$\forall\,u,v\in H^m(\Omega).\tag{1·5}$$

又记 $H_0^m(\Omega)=W_0^{m,2}(\Omega)$,它是 $H^m(\Omega)$的一个闭子空间.

在空间 $W_0^{m,p}(\Omega)$中，范数

$$\|u\|_{m,p}^* = \left(\sum_{|\alpha|=m}\int_\Omega |D^\alpha u(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \tag{1·6}$$

与按(1·4)式定义的范数$\|u\|_{m,p}$是等价的．因此，在 $H_0^m(\Omega)$中可取

$$(u,v)_m^* = \sum_{|\alpha|=m}\int_\Omega D^\alpha u(x)\cdot D^\alpha v(x)\mathrm{d}x, \quad \forall\, u,v\in H_0^m(\Omega) \tag{1·7}$$

作内积，以代替按(1·5)式定义的内积$(u,v)_m$．

考察由下式定义的伪 Laplace 映象 $T: W_0^{1,p}\to W^{-1,p'}(\Omega)$，$P\geqslant 2, \frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$：

$$(Tu,v) = \int_\Omega \sum_{i=1}^n |D_i u(x)|^{p-2}D_i u(x)\cdot D_i v(x)\mathrm{d}x,$$

$$\forall\, u,v\in W_0^{1,p}(\Omega).$$

我们证明 T 是单调映象．

取 $W_0^{1,p}(\Omega)$中的等价范数(见(1·6)式)$\|u\|_{1,p}^* = \left(\sum_{i=1}^n \|D_i u\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}}$．由 Hölder 不等式，有

$$\begin{aligned}|(Tu,v)| &\leqslant \sum_{i=1}^n\int_\Omega |D_i u(x)|^{p-1}\cdot|D_i v(x)|\mathrm{d}x\\ &\leqslant \sum_{i=1}^n \|D_i u\|_p^{p-1}\cdot\|D_i v\|_p\\ &\leqslant \left(\sum_{i=1}^n\|D_i u\|_p^p\right)^{\frac{1}{p'}}\cdot\left(\sum_{i=1}^n\|D_i v\|_p^{p}\right)^{\frac{1}{p}}\\ &= (\|u\|_{1,p}^*)^{p-1}\cdot\|v\|_{1,p}^*,\end{aligned}$$

故对于固定的 $u\in W_0^{1,p}(\Omega)$，Tu 是 $W_0^{1,p}(\Omega)$上的线性连续泛

函，即 $Tu \in W^{-1,p'}(\Omega)$，因此 $T: W_0^{1,p}(\Omega) \to W^{-1,p'}(\Omega)$．此外，由上式并注意到 $(Tu, u) = \int_\Omega \sum_{i=1}^n |D_i u(x)|^p dx = \sum_{i=1}^n \|D_i u\|_p^p = (\|u\|_{1,p}^*)^p$，得知

$$
\begin{aligned}
(Tu - Tv, u - v) &= (Tu, u) + (Tv, v) - (Tu, v) \\
&\quad - (Tv, u) \geqslant (\|u\|_{1,p}^*)^p + (\|v\|_{1,p}^*)^p \\
&\quad - (\|u\|_{1,p}^*)^{p-1} \cdot \|v\|_{1,p}^* \\
&\quad - (\|v\|_{1,p}^*)^{p-1} \cdot \|u\|_{1,p}^* = [(\|u\|_{1,p}^*)^{p-1} \\
&\quad - (\|v\|_{1,p}^*)^{p-1}] \cdot [\|u\|_{1,p}^* \\
&\quad - \|v\|_{1,p}^*] \geqslant 0 \quad \forall u, v \in W_0^{1,p}(\Omega),
\end{aligned}
$$

故 T 是单调映象．证完．

单调映象的概念，可以推广到多值映象（集值映象）．以下用 2^{E^*} 表空间 E^* 的一切子集所成的集．对于多值映象 $T: E \to 2^{E^*}$，记

$D(T) = \{x \mid x \in E, Tx \neq \emptyset\}$ 为 T 的**有效域**；

$R(T) = \{y \mid y \in Tx, x \in D(T)\}$ 为 T 的**值域**；

$G(T) = \{[x, y] \mid [x, y] \in E \times E^*, x \in D(T), y \in Tx\}$ 为 T 的**图象**．注意，多值映象 $T: E \to 2^{E^*}$ 的逆映象 T^{-1} 一定存在，它也是多值映象：$T^{-1}: E^* \to 2^E$，它的定义如下：

$$T^{-1}y = \{x \mid x \in E, y \in Tx\}, \quad \forall y \in E^*.$$

在多值映象的范围内逆映象一定存在，这对讨论问题带来许多方便之处．显然，单值映象是多值映象的特例（当 $x \in D(T)$ 时，Tx 由 E^* 中的一个元素构成）．以后，单值映象就简称为“映象”．有的作者，例如〔130〕，把单值映象称为“算子”，多值映象称为“映象”．

定义 1.2 对于多值映象 $T:E\to 2^{E^*}$(当然也包括单值映象),

(i)如果值域 $R(T)=E^*$,则称 T 是**满射的**;

(ii)如果 T 把 $D(T)$ 中任何有界集 S 映成 E^* 中的有界集(即 $T(S)=\{y\mid y\in Tx, x\in S\}$ 在 E^* 中有界). 则称 T 是**有界的**.

(iii)给定 $x_0\in E$. 若存在 x_0 在 E 中的某邻域 $U(x_0)$,使 $U(x_0)\cap D(T)\neq\varnothing$,且 $T(U(x_0)\cap D(T))=\{y\mid y\in Tx, x\in U(x_0)\cap D(T)\}$ 在 E^* 中有界,则称 T 在 x_0 处是**局部有界的**.

显然,若 T 有界,则它在 E 中每一点都局部有界;但反之不成立.

定义 1.3 单调集合 $M\subset E\times E^*$,如果不是 $E\times E^*$ 中任何单调集合的真子集,则称集合 M 是**极大单调的**. 多值映象 $T:E\to 2^{E^*}$ 叫做是**单调的**,如果它的图象 $G(T)$ 是 $E\times E^*$ 中的单调集合;T 叫做**极大单调的**,如果它的图象 $G(T)$ 是 $E\times E^*$ 中的极大单调集合.

注 3 从定义可知

(i)多值映象 $T:E\to 2^{E^*}$ 单调的充要条件是:$(f-g, x-y)\geqslant 0$, $\forall x, y\in D(T), f\in Tx, g\in Ty$.

(ii)设多值映象 $T:E\to 2^{E^*}$ 是单调的,则 T 极大单调的充要条件是:$(f-g, x-y)\geqslant 0$, $\forall y\in D(T), g\in Ty \Rightarrow x\in D(T)$ 且 $f\in Tx$.

(iii)若 E 是自反的,则多值映象 $T:E\to 2^{E^*}$ 单调(极大单

调)的充要条件是 $T^{-1}: E^* \to 2^E = 2^{E^{**}}$ 单调(极大单调).

例 1.4 设 $f: R^1 \to R^1$ 是增函数，且至少在某一点不连续，则 f 是单调映象，但不是极大单调的(把 f 视为多值映象)，因为 f 的图象 $G(f) = \{[x, y] \mid x \in R^1, y = f(x)\}$ 显然是单调集 $M = \{[x, y] \mid x \in R^1, f(x-0) \leqslant y \leqslant f(x+0)\}$ 的真子集.

又，按 $Tx = [f(x-0), f(x+0)]$ 定义的多值映象 $T: R^1 \to 2^{R^1}$ 显然是极大单调的.

例 1.5 设 H 是实 Hilbert 空间. 证明：多值映象 $T: H \to 2^H$ 单调的充要条件是

$$\|x - y + t(f - g)\| \geqslant \|x - y\|,$$
$$\forall x, y \in H, \quad f \in Tx, \quad g \in Ty, \quad t > 0.$$

证 必要性：设 T 单调，则 $\forall x, y \in H, f \in Tx, g \in Ty, t > 0$，有

$$\begin{aligned} &\|x - y + t(f - g)\|^2 \\ &= \|x - y\|^2 + 2t(f - g, x - y) + t^2\|f - g\|^2 \geqslant \|x - y\|^2, \end{aligned}$$

故 $\|x - y + t(f - g)\| \geqslant \|x - y\|$.

充分性：设上述不等式满足，则

$$(f - g, x - y) + \frac{1}{2}t\|f - g\|^2 \geqslant 0, \quad \forall t > 0.$$

令 $t \to +0$ 取极限，即得 $(f - g, x - y) \geqslant 0$, $\forall x, y \in H, f \in Tx$, $g \in Ty$. 证完.

以下，空间 E^* 中元素的(强)收敛记为 $f_n \to f$ (即 $\|f_n - f\| \to 0$)，弱收敛记为 $f_n \rightharpoonup f$ (即对任何 $F \in E^{**}$，有 $F(f_n) \to F(f)$)，弱*收敛记为 $f_n \rightharpoonup f$ (即对任何 $x \in E$，有 $f_n(x) \to f(x)$).

显然，$f_n \to f \Rightarrow f_n \rightharpoonup f \Rightarrow f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$；当 E 自反时，$f_n \rightharpoonup f \Leftrightarrow f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$.

定义 1.4 设 $D \subset E$，映象 $T: D \to E^*$.

(i) 设 $x_0 \in D$. 若 $x_n \in D$, $x_n \to x_0 \Rightarrow Tx_n \rightharpoonup Tx_0$，则称 T 在 x_0 处是**次连续的**(demicontinuous)；若 T 在 D 中每一点都次连续，则称 **T 在 D 上次连续**.

(ii) 设 $x_0 \in D$. 若 $h \in E$, $t_n > 0$, $x_0 + t_n h \in D$, $t_n \to 0 \Rightarrow T(x_0 + t_n h) \rightharpoonup Tx_0$，则称 T 在 x_0 处是**半连续的**(hemicontinuous)；若 T 在 D 中每一点都半连续，则称 **T 在 D 上半连续**.

注 4 显然，T 在 x_0 处次连续 $\Rightarrow T$ 在 x_0 处半连续；T 在 x_0 处次连续 $\Rightarrow T$ 在 x_0 处局部有界.

很明显，次连续意即从 E 中强拓扑到 E^* 弱拓扑连续；半连续意即从 E 中线段的强拓扑到 E^* 中的弱 * 拓扑是连续的.

引理 1.1 设 $D \subset E$，映象 $T: D \to E^*$，$x_0 \in D$. 则 T 在 x_0 处次连续的充要条件是 $\forall x_n \in D$, $x_n \to x_0$，必存在 $\{x_n\}$ 的子列 $\{x_{n_i}\}$，使 $Tx_{n_i} \rightharpoonup Tx_0$.

证 必要性显然，下证充分性. 设 $x_n \in D$, $x_n \to x_0$，需证 $Tx_n \rightharpoonup x_0$. 用反证法，若 $Tx_n \rightharpoonup Tx_0$ 不成立，则存在 $F_0 \in E^{**}$，使 $F_0(Tx_n)$ 不收敛于 $F_0(Tx_0)$. 于是，存在 $\varepsilon_0 > 0$ 及的 $\{x_n\}$ 子列 $\{x_{n_k}\}$，使

$$\left| F_0(Tx_{n_k}) - F_0(Tx_0) \right| \geqslant \varepsilon_0 \quad \{k = 1, 2, \cdots\}$$

不妨设 $\left| F_0(Tx_{n_k}) - F_0(Tx_0) \right| \to c$, $(k \to \infty)$, $\varepsilon_0 \leqslant c \leqslant +\infty$（否则取某子列即可）. 由此，显然可知 Tx_{n_k} 的任何子列都不可能弱收敛于 Tx_0，此与假定矛盾. 证完.

引理 1.2 设 D 是 E 中某线性集，映象 $T: D \to E^*$ 是线性的，那末，T 在 D 上次连续 $\Rightarrow T$ 在 D 上连续.

证 只需证 T 在零点 θ 连续．用反证法．设 T 在 θ 点处不连续，则必存在 $\varepsilon_0>0$ 及 $\{x_n\}\subset D$，$x_n\to\theta$，使 $\|Tx_n\|\geqslant\varepsilon_0(n=1,2,\cdots)$．令 $t_n=\|x_n\|^{-\frac{1}{2}}$，$z_n=t_nx_n$，则 $t_n\to+\infty$，$\|z_n\|=\|x_n\|^{\frac{1}{2}}\to 0$．由于 T 在 θ 处次连续，故 $Tz_n\rightharpoonup T\theta=\theta$，故 $\|Tz_n\|$ 有界．但 $\|Tz_n\|=t_n\|Tx_n\|\geqslant\varepsilon_0 t_n\to+\infty$，此与 $\|Tz_n\|$ 有界矛盾．证完．

引理 1.3 设 $x_n\in E$，$x_n\to\theta$；$f_n\in E^*$，$\|f_n\|\to+\infty$．那末，对于任意给定的 $r>0$，必存在 $z\in\overline{B}(\theta,r)=\{x\mid x\in E,\|x\|\leqslant r\}$ 及子列 $\{x_{n_i}\}$ 与 $\{f_{n_i}\}$，使

$$\lim_{i\to\infty}(f_{n_i},x_{n_i}-z)=-\infty. \tag{1·8}$$

证 用反证法．若结论不成立，则存在 $r_0>0$，使对任何 $z\in\overline{B}(\theta,r_0)$，都存在常数 c_z，使 $(f_n,x_n-z)\geqslant c_z(n=1,2,3\cdots)$．令

$$F_k=\{u\mid u\in\overline{B}(\theta,r_0),(f_n,x_n-u)\geqslant -k,n=1,2,3\cdots\}.$$

于是 $\overline{B}(\theta,r_0)=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}F_k$，又，显然 F_k 是闭集．由于 $\overline{B}(\theta,r_0)$ 本身是一个完备的距离空间，故它是第二纲集，从而诸 F_k 中至少有一个(设为 F_{k_0})不是稀疏集，从而存在 $y_0\in E$，$\|y_0\|<r_0$ 及 $0<r<r_0-\|y_0\|$，使 $F_{k_0}\supset\overline{B}(y_0,r)$．将两式

$$(f_n,x_n-u)\geqslant -k_0,\quad n=1,2,\cdots,\quad \forall\, u\in\overline{B}(y_0,r)$$

$$(f_n,x_n+y_0)\geqslant c,\quad n=1,2,\cdots(\text{这里已记 } c=c_{-y_0})$$

相加，得

$$(f_n,2x_n+y_0-u)\geqslant c-k_0,$$

$$n=1,2,\cdots,\quad \forall\, u\in\overline{B}(y_0,r) \tag{1·9}$$

取 n_0，使当 $n\geqslant n_0$ 时 $\|x_n\|\leqslant\frac{r}{4}$．于是，当 $n\geqslant n_0$，$\|v\|\leqslant\frac{r}{2}$ 时，

元素 $u=2x_n+y_0-v$ 必属于$\bar{B}(y_0,r)$,因此,由(1·9)式知

$$(f_n,v)\geqslant c-k_0,\quad \forall\, n\geqslant n_0,\quad \|v\|\leqslant\frac{r}{2}. \tag{1·10}$$

在(1·10)式中以 $-v$ 代 v,得

$$(f_n,v)\leqslant k_0-c,\quad \forall\, n\geqslant n_0,\quad \|v\|\leqslant\frac{r}{2}. \tag{1·11}$$

由(1·10)式与(1·11)式知$\{\|f_n\|\}$是有界的,此与假定$\|f_n\|\to+\infty$矛盾.证完.

定理 1.1 设多值映象 $T:E\to 2^{E^*}$ 是单调的,那末 T 在$D(T)$的每一个内点处是局部有界的.

证 设 T 在某$x_0\in\operatorname{Int}D(T)$($\operatorname{Int}D(T)$表 $D(T)$的内点集)不是局部有界的.不妨设 $x_0=\theta$(因为在平移 $T_0x=T(x+x_0)$下单调性不变:$\forall\, x,y\in D(T_0)$,$f\in T_0x=T(x+x_0)$,$g\in T_0y=T(y+x_0)$,恒有$(f-g,x-y)=(f-g,(x+x_0)-(y+x_0))\geqslant 0$).于是,存在$\{x_n\}\subset D(T)$,$x_n\to\theta$,及$\{f_n\}$,$f_n\in Tx_n$,使$\|f_n\|\to+\infty$.根据引理 1.3,可取 $r>0$,使$\bar{B}(\theta,r)\subset D(T)$,并且存在 $z\in\bar{B}(\theta,r)$以及子列$\{x_{n_i}\}$与$\{f_{n_i}\}$,使(1·8)式成立.根据 T 的单调性,对 $g\in Tz$,有

$$(f_{n_i},x_{n_i}-z)\geqslant(g,x_{n_i}-z)\geqslant-\|g\|(\alpha+\|z\|),$$
$$i=1,2,\cdots,$$

其中 $\alpha=\sup\limits_n\|x_n\|$,此显然与(1·8)式矛盾.证完.

系 设多值映象 $T:E\to 2^{E^*}$是单调的,那末,对每个 $x\in\operatorname{Int}D(T)$,$Tx$ 都是E^*中的有界集.

注 5 在 $D(T)$的边界点处,多值单调映象 T 可能不是局部有界的(参看〔130〕).

定理 1.2 设 E 是自反的，$D\subset E$，映象 $T:D\to E^*$ 是单调的．那末，T 在 $x_0\in \mathrm{Int}D$ 半连续⇒T 在 x_0 处次连续．

证 设 $x_n\in D$, $x_n\to x_0$，根据定理 1.1 知，$\{Tx_n\}$ 是 E^* 中的有界集．由于 E 是自反的，故 E^* 也是自反的，存在子列 $\{x_{n_i}\}\subset\{x_n\}$ 及 $f\in E^*$，使 $Tx_{n_i}\rightharpoonup f$. 根据 T 的单调性，在不等式$(Tx_{n_i}-Ty, x_{n_i}-y)\geqslant 0(y\in D)$中令 $i\to\infty$ 取极限，得

$$(f-Ty, x_0-y)\geqslant 0 \quad \forall y\in D. \tag{1·12}$$

因 $\mathrm{Int}D$ 是开集，故对任何 $u\in E$，可取 $t_n>0$, $t_n\to 0$，使 $z_n=x_0+t_nu\in D(n=1,2,\cdots)$. 在(1·12)式中取 $y=z_n$，得

$$(f-T(x_0+t_nu), u)\leqslant 0, \quad n=1,2,\cdots;$$

令 $n\to\infty$ 取极限，注意到 T 在 x_0 处的半连续性，得

$$(f-Tx_0, u)\leqslant 0, \quad \forall u\in E. \tag{1·13}$$

由(1·13)式根据的 u 任意性，得 $f-Tx_0=\theta$，即 $f=Tx_0$. 于是 $Tx_{n_i}\rightharpoonup Tx_0$. 最后，根据引理 1.1 即知 T 在 x_0 处次连续．证完．

系 设 E 自反．则对于单调映象 $T:E\to E^*$，T 在 E 上次连续与 T 在 E 上半连续是等价的；特别地，对于单调线性映象 $T:E\to E^*$，T 在 E 上连续⇔T 在 E 上次连续⇔T 在 E 上半连续．

§2 单调映象的满射性

引理 2.1(Eberlein－Šmulian 定理) 设 E 是实 Banach 空间，$M\subset E$. 则下述两结论等价：

(ⅰ)M 是弱序列紧的，即对于 M 中任何序列 $\{x_n\}$，都存

在子列 $\{x_{n_i}\}$ 及 $x_0 \in M$，使 $x_{n_i} \rightharpoonup x_0$；

（ii）M 是弱紧的，即任何一族弱开集（即弱闭集的余集）$\{G_\xi\}$ 若满足 $\bigcup_\xi G_\xi \supset M$，都必存在有限个 G_{ξ_i}（$i=1,2,\cdots,N$），使 $\bigcup_{i=1}^N G_{\xi_i} \supset M$.

证 证明见〔40〕430 页定理 V.6·1. 从略 .

系 设 E 是自反的，M 是 E 中一个有界的弱闭集 . 设给定一族弱闭集 $\{F_\xi\}$（$\xi \in \beta$），满足 $F_\xi \subset M$（$\forall \xi \in \beta$）. 如果对于族 $\{F_\xi\}$ 中任何有限个 F_{ξ_i}（$i=1,2,\cdots,m$）都有 $\bigcap_{i=1}^m F_{\xi_i} \neq \varnothing$，那末必有 $\bigcap_{\xi \in \beta} F_\xi \neq \varnothing$.

证 用反证法 . 假定 $\bigcap_{\xi \in \beta} F_\xi = \varnothing$. 令 $G_\xi = E \setminus F_\xi$，则 G_ξ 是弱开集 . 由于

$$M \subset E = E \setminus \bigcap_{\xi \in \beta} F_\xi = \bigcup_{\xi \in \beta} (E \setminus F_\xi) = \bigcup_{\xi \in \beta} G_\xi,$$

而由假定 M 有界、弱闭，知 M 是弱序列紧的，从而根据引理 2.1知 M 是弱紧的，因此，存在有限个 G_{ξ_i}（$i=1,2,\cdots,m$），使

$$M \subset \bigcup_{i=1}^m G_{\xi_i} = \bigcup_{i=1}^m (E \setminus F_{\xi_i}) = E \setminus \bigcap_{i=1}^m F_{\xi_i} \qquad (2\cdot1)$$

由此可知，必有 $\bigcap_{i=1}^m F_{\xi_i} = \varnothing$（因若存在 $x_0 \in \bigcap_{i=1}^m F_{\xi_i}$，则 $x_0 \in M$，$x_0 \overline{\in} E \setminus \bigcap_{i=1}^m F_{\xi_i}$，此与(2·1)式矛盾），此与假设矛盾 . 证完 .

定理 2.1（单调映象的锐角原理） 设 E 自反，映象 $T: E \to E^*$ 半连续、单调 . 又设对于某 $r>0$，有

$$(Tx, x) \geqslant 0, \quad \forall x \in \partial \Omega_r, \qquad (2\cdot2)$$

其中 $\Omega_r = \{x \mid x \in E, \|x\| < r\}$. 那末方程 $Tx = \theta$ 在 $\bar{\Omega}_r$ 中必有解 .

证 显然,$\bar{\Omega}_r$ 是E 中有界弱闭集. 对每一个 $x\in E$, 令 $F_x = \{y \mid y\in\bar{\Omega}_r, (Tx, x-y)\geqslant 0\}$. 很明显, F_x 是弱闭集且 $F_x\subset \bar{\Omega}_r(\forall x\in E)$. 下证, 对任意有限个 $F_{x_1},\cdots,F_{x_m}$, 都有 $\bigcap_{i=1}^{m} F_{x_i}\neq \phi$. 事实上, 用 E_0 表 $x_1,\cdots,x_m$ 在E 中张成的子空间, 设 E_0 的维数是 $n(n\leqslant m)$, $z_1,\cdots,z_n$ 是E_0 的一组基. 今定义映象 V: $E_0\to E_0$ 如下:

$$Vx=(Tx, z_1)z_1+\cdots+(Tx, z_n)z_n,\quad \forall x\in E_0. \tag{2·3}$$

由假定 T 半连续, 根据定理 1.2 的系知 T 次连续, 从而 $V: E_0\to E_0$ 是连续映象. 令 $\Omega_{r,0}=E_0\cap\Omega_r=\{x\mid x\in E_0, \|x\|<r\}$. 我们证明 $Vx=\theta$ 在 $\bar{\Omega}_{r,0}$中必有解. 事实上, 若 $\theta\overline{\in} V(\bar{\Omega}_{r,0})$, 则 Brouwer 度 $\deg_n(V, \Omega_{r,0}, \theta)=0$, 但显然 $\deg_n(I, \Omega_{r,0}, \theta)=1$, 因此, V 与I 在$\Omega_{r,0}$上不同伦, 从而存在 $x_0\in\partial\Omega_{r,0}$及 $0<t_0<1$, 使 $t_0Vx_0+(1-t_0)x_0=\theta$, 即 $Vx_0=-s_0x_0$, $s_0=\dfrac{1-t_0}{t_0}>0$, 亦即

$$(Tx_0, z_1)z_1+\cdots+(Tx_0, z_n)z_n=-s_0x_0. \tag{2·4}$$

用 Tx_0 作用两端, 并注意到$(Tx_0, x_0)\geqslant 0$(因为 $x_0\in\partial\Omega_{r,0}\subset\partial\Omega_r$), 得

$$(Tx_0, z_1)^2+\cdots+(Tx_0, z_n)^2=-s_0(Tx_0, x_0)\leqslant 0$$

由此可知$(Tx_0, z_j)=0(j=1,2,\cdots,n)$, 从而, 由(2·4)式知 $x_0=\theta$, 此与 $x_0\in\partial\Omega_{r,0}(\|x_0\|=r)$矛盾. 于是证明了 $Vx=\theta$ 在 $\bar{\Omega}_{r,0}$中必有解 x^*. 故$(Tx^*, z_j)=0(j=1,2,\cdots,n)$. 由于 $\{z_i\}$是E_0 的基, 故$(Tx^*, z)=0$ 对一切 $z\in E_0$ 成立, 特别地 $(Tx^*, x_i)=0(i=1,2,\cdots,m)$, $(Tx^*, x^*)=0$, 于是注意到 T 的单调性, 得

$$(Tx_i, x_i - x^*) = (Tx_i - Tx^*, x_i - x^*) \geqslant 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, m),$$

因此 $x^* \in F_{x_i}(i = 1, 2, \cdots, m)$，故 $\bigcap_{i=1}^{m} F_{x_i} \neq \varnothing$ 获证 .

于是，根据引理 2.1 的系知 $\bigcap_{x \in E} F_x \neq \varnothing$. 设 $y^* \in \bigcap_{x \in E} F_x$. 显然 $y^* \in \bar{\Omega}_r$. 下证 $Ty^* = \theta$. 事实上，对一切 $x \in E$，皆有

$$(Tx, x - y^*) \geqslant 0. \tag{2·5}$$

对任何 $h \in E$，取 $t_n > 0, t_n \to 0$，并在(2·5)式中取 $x = y^* + t_n h$，得

$$(T(y^* + t_n h), h) \geqslant 0, \quad n = 1, 2, \cdots; \tag{2·6}$$

在(2·6)式中令 $n \to \infty$ 取极限，注意到 T 的半连续性，得 $(Ty^*, h) \geqslant 0$. 再根据 h 的任意性，即得 $Ty^* = \theta$. 证完 .

定理 2.2(Minty - Browder)　设 E 自反，映象 $T: E \to E^*$ 半连续、单调 . 又设 T 是强制的，即满足

$$\lim_{\|x\| \to +\infty} \frac{(Tx, x)}{\|x\|} = +\infty \tag{2 · 7}$$

那末，T 必满射，即 $T(E) = E^*$.

证　任给 $f \in E^*$，根据(2 · 7) 式，可取 $r > 0$ 充分大，使在 E 中球面 $\|x\| = r$ 上恒有

$$(Tx - f, x) \geqslant \|x\| \left\{ \frac{(Tx, x)}{\|x\|} - \|f\| \right\} \geqslant 0. \tag{2 · 8}$$

考察映象 $T_1 x = Tx - f, \forall x \in E$，显然 $T_1: E \to E^*$，也是半连续的，单调的 . 于是，对映象 T_1 与球 $\Omega_r = \{x | x \in E, \|x\| < r\}$ 应用定理 2.1(注意(2 · 8) 式)，即知存在 $x^* \in \bar{\Omega}_r$，使 $Tx^* - f = \theta$，即 $Tx^* = f$. 由此可知，T 满射 .

系　设 H 是实 Hilbert 空间，$T: H \to H$ 半连续、单调、强制(即满足(2 · 7) 式)，则 T 满射，即 $T(H) = H$.

定理 2.3(强单调映象)　设 E 自反,映象 $T:E\to E^*$ 半连续,且满足强单调条件:

$$(Tx-Ty,x-y)\geqslant\alpha(\|x-y\|)\cdot\|x-y\|,\quad \forall x,y\in E,\tag{2·9}$$

其中 $\alpha(0)=0,\alpha(t)>0(\forall t>0);\lim\limits_{t\to+\infty}\alpha(t)=+\infty$.

那末,T 是满射的,而且是一一对应的(即对任何 $f\in E^*$,方程 $Tx=f$ 在 E 中具有惟一解).

证　同于第二章定理 1.15 的证明(引用上述定理 2.2),从略.

系 1　在定理 2.3 的条件下,若更设映象 $T:E\to E^*$ 是连续的,函数 $\alpha(t)$ 在 $0<t<+\infty$ 上是连续的,那末,T 是 E 与 E^* 之间的同胚映象.

证　同于第二章定理 1.15 的系的证明,从略.

系 2　设 E 自反,映象 $T:E\to E^*$ 连续,且存在常数 $c>0$,使

$$(Tx-Ty,x-y)\geqslant c\|x-y\|^2,\quad \forall x,y\in E,\tag{2·10}$$

那末,T 是 E 与 E^* 之间的同胚映象.

证　在系 1 中取 $\alpha(t)=ct$ 即获证.

系 3　设 E 自反,映象 $T:E\to E^*$ 在 E 中每一点 Fréchet 可微,且存在常数 $c>0$,使

$$(T'(x)h,h)\geqslant c\|h\|^2,\quad \forall x,h\in E,\tag{2·11}$$

那末,T 是 E 与 E^* 之间的同胚映象.

证　T Fréchet 可微蕴涵 T 连续.又,对 $x,y\in E$,对函数 $\varphi(t)=(T(y+t(x-y)),x-y)$ 应用中值公式并注意(2·11)式知

$$\begin{aligned}(Tx-Ty,x-y)&=\varphi(1)-\varphi(0)=\varphi'(\theta)\\&=(T'(y+\theta(x-y))(x-y),x-y)\end{aligned}$$

$\geqslant c\|x-y\|^2, \quad 0<\theta<1,$

故(2·10)式满足．于是，由系 2 即获证．

注 1　定理 2.2 与定理 2.3 显然是第二章定理 1.14 与定理 1.15 在无穷维空间(特别地，Hilbert 空间)的推广．Minty－Browder 定理(定理 2.2)是单调算子的基本定理之一，它具有许多应用．

定理 2.4　设定理 2.3 的条件满足，并且函数 $\alpha(t)$ 在 $0<t<+\infty$ 上连续．又设 T 是某泛函 f 的梯度：$T=\mathrm{grad}f$(即存在泛函 $f:E\to R^1$，f 在 E 中每一点均具有有界线性的 Gâteaux 微分，且 $f'(x)=Tx$，$\forall x\in E$)，那末(ⅰ) $Tx=\theta$ 在 E 中具有惟一解 x^*；(ⅱ) $f(x)$ 在 E 中有下界，令 $d=\inf\limits_{x\in E}f(x)$，则 $f(x^*)=d$，$f(x)>f(x^*)$，$\forall x\neq x^*$；(ⅲ)若 $x_n\in E$ 使 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=d$(即 x_n 是极小化序列)，那末必有 $\|x_n-x^*\|\to 0(n\to\infty)$.

证　(ⅰ)由定理 2.3 推出．下证(ⅱ)与(ⅲ)．取 $R>0$，使当 $t>R$ 时恒有 $\alpha(t)>2\|T\theta\|$．于是，根据第一章公式(3·95)知：$\forall x\in E$，有

$$\begin{aligned} f(x)-f(\theta) &= \int_0^1 (T(tx),x)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \frac{1}{t}(T(tx)-T\theta, tx)\mathrm{d}t+(T\theta,x) \\ &\geqslant \int_0^1 \frac{1}{t}\cdot\alpha(t\|x\|)\cdot t\|x\|\mathrm{d}t+(T\theta,x) \\ &\geqslant \|x\|\cdot\left(\int_0^1 \alpha(t\|x\|)\mathrm{d}t-\|T\theta\|\right). \end{aligned} \tag{2·12}$$

于是，当 $\|x\|>2R$ 时，有

$$f(x)-f(\theta)\geqslant\|x\|\cdot\left(\int_{\frac{1}{2}}^1\alpha(t\|x\|)\mathrm{d}t-\|T\theta\|\right)$$

$$> \|x\| \cdot \left(\int_{\frac{1}{2}}^{1} (2\|T\theta\|)\mathrm{d}t - \|T\theta\|\right) = 0;$$

而当$\|x\| \leqslant 2R$时，由(2·12)式，有

$$f(x) - f(\theta) \geqslant -\|x\| \cdot \|T\theta\| \geqslant -2R\|T\theta\|.$$

由此可知

$$f(x) \geqslant f(\theta) - 2R\|T\theta\| = \text{const}. \quad \forall x \in E,$$

因此，$f(x)$有下界．令$d = \inf\limits_{x \in E} f(x)$，并设$x_n \in E$满足$\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = d$．下证$\{x_n\}$是基本列，即$\lim\limits_{n, m \to \infty} \|x_n - x_m\| = 0$．事实上，若不然，则存在$\varepsilon_0 > 0$及$\{x_n\}$的两子列$\{x_{n_i}\}$与$\{x_{m_i}\}$，使

$$\left\|x_{n_i} - x_{m_i}\right\| \geqslant \varepsilon_0, \quad \forall i = 1, 2, 3, \cdots. \tag{2·13}$$

由于$\alpha(t)$在$0 < t < +\infty$上连续，$\alpha(t) > 0$，$\forall t > 0$，并且$\alpha(t) \to +\infty (t \to +\infty)$，故$\tau_0 = \inf\limits_{t \geqslant \frac{\varepsilon_0}{2}} \alpha(t) > 0$．现取$i_0$，使当$i > i_0$时恒有

$$f(x_{n_i}) < d + \frac{1}{16}\varepsilon_0\tau_0, \quad f(x_{m_i}) < d + \frac{1}{16}\varepsilon_0\tau_0.$$

由于$f\left(\dfrac{x_{n_i} + x_{m_i}}{2}\right) \geqslant d$，故

$$\frac{1}{2}f(x_{n_i}) + \frac{1}{2}f(x_{m_i}) - f\left(\frac{x_{n_i} + x_{m_i}}{2}\right)$$

$$< d + \frac{1}{16}\varepsilon_0\tau_0 - d = \frac{1}{16}\varepsilon_0\tau_0, \quad \forall i > i_0. \tag{2·14}$$

我们有(对于$x, y \in E$)

$$\frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(y) - f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{2}\left[f(x) - f\left(\frac{x+y}{2}\right)\right]$$

$$+ \frac{1}{2}\left[f(y) - f\left(\frac{x+y}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(T\left(\frac{x+y}{2} + t\,\frac{x-y}{2}\right), \frac{x-y}{2}\right)\mathrm{d}t$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{2}\int_0^1\left(T\left(\frac{x+y}{2}+t\frac{y-x}{2}\right),\frac{y-x}{2}\right)\mathrm{d}t\\
&=\frac{1}{4}\int_0^1\frac{1}{t}\left(T\left(\frac{x+y}{2}+t\frac{x-y}{2}\right)\right.\\
&\quad-T\left(\frac{x+y}{2}+t\frac{y-x}{2}\right),\left(\frac{x+y}{2}+t\frac{x-y}{2}\right)\\
&\quad\left.-\left(\frac{x+y}{2}+t\frac{y-x}{2}\right)\right)\mathrm{d}t\\
&\geqslant\frac{1}{4}\int_0^1\alpha(t\|x-y\|)\cdot\|x-y\|\mathrm{d}t\\
&=\frac{1}{4}\|x-y\|\int_0^1\alpha(t\|x-y\|)\mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

在此式中令 $x=x_{n_i}, y=x_{m_i}$，并注意到(2·13)式，得

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}f(x_{n_i})+\frac{1}{2}f(x_{m_i})-f\left(\frac{x_{n_i}+x_{m_i}}{2}\right)\\
&\geqslant\frac{1}{4}\|x_{n_i}-x_{m_i}\|\cdot\int_0^1\alpha(t\|x_{n_i}-x_{m_i}\|)\mathrm{d}t\\
&\geqslant\frac{1}{4}\varepsilon_0\int_{\frac{1}{2}}^1\alpha(t\|x_{n_i}-x_{m_i}\|)\mathrm{d}t\\
&\geqslant\frac{1}{4}\varepsilon_0\int_{\frac{1}{2}}^1\tau_0\mathrm{d}t=\frac{1}{8}\varepsilon_0\tau,\quad(i=1,2,\cdots),
\end{aligned}
$$

此式显然与(2·14)式矛盾．由此可知 $\{x_n\}$ 是基本列．根据 E 的完备性知，存在 $x^*\in E$，使 $\|x_n-x^*\|\to0(n\to\infty)$．我们有

$$
\begin{aligned}
f(x_n)&=f(x^*)+\int_0^1(T(x^*+t(x_n-x^*)),x_n-x^*)\mathrm{d}t\\
&=f(x^*)+\int_0^1(T(x^*+t(x_n-x^*))-Tx^*,x_n-x^*)\mathrm{d}t\\
&\quad+(Tx^*,x_n-x^*)\\
&\geqslant f(x^*)+\int_0^1\alpha(t\|x_n-x^*\|)\cdot\|x_n-x^*\|\mathrm{d}t\\
&\quad+(Tx^*,x_n-x^*)
\end{aligned}
$$

$$\geqslant f(x^*) + (Tx^*, x_n - x^*),\quad n = 1, 2, \cdots.$$

两端令 $n\to\infty$ 取极限, 得 $d\geqslant f(x^*)$. 故 $f(x^*)=d$. 即 f 在 x^* 达到最小值. 考察函数 $\varphi(t)=f(x^*+th)$. 由于 $\varphi(t)$ 在 $t=0$ 时达到极(小)值, 又因为

$$\varphi'(0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(x^*+th)-f(x^*)}{t}=D[f(x^*)h],$$

故由 $\varphi'(0)=0$ 知 $D[f(x^*)h]=0$, $\forall h\in E$. 注意到 f 在 x^* 处具有有界线性的 Gâteaux 微分, 故必有 $f'(x^*)=\theta$. 由 $f'(x^*)=Tx^*$, 知 $Tx^*=\theta$. 易知 $f(x)>f(x^*)=d$, $\forall x\neq x^*$. 事实上, 若有 $x_0\neq x^*$, 使 $f(x_0)=d$, 则 f 在 x_0 处也达到极小值, 从而有 $Tx_0=f'(x_0)=\theta$. 于是方程 $Tx=\theta$ 在 E 中至少有两个解, 此与结论(ⅰ)矛盾. 证完.

例 2.1 设 Ω 为 $R^N(N>2)$ 中有界锥形区域(参看[135]). 考察二阶半线性椭圆型算子的 Dirichlet 问题:

$$\begin{cases} -\Delta u=f(x,u), & x\in\Omega;\\ u|_{\partial\Omega}=0. \end{cases}\tag{2·15}$$

结论 若(ⅰ) $f(x,u)$ $(x\in\Omega,\ -\infty<u<+\infty)$ 满足 Caratheodory 条件, 并且对于固定的 $x\in\Omega$, $f(x,u)$ 是 u 的减函数, 即 $u_1<u_2$ 时恒有 $f(x,u_1)\geqslant f(x,u_2)$; (ⅱ) 存在 $0<\sigma\leqslant\frac{N+2}{N-2}$, 使

$$|f(x,u)|\leqslant a(x)+b|u|^{\sigma},\ a(x)\in L_{\frac{2N}{N+2}}(\Omega),\ b>0.\tag{2·16}$$

那末, Dirichlet 问题(2·15)在空间 $H_0^1(\Omega)$ 中具有惟一广义解(弱解) $u^*(x)$; 并且 $H_0^1(\Omega)$ 上的泛函

$$\varphi(u(x))=\int_{\Omega}\left\{\frac{1}{2}Du(x)\cdot Du(x)-F(x,u(x))\right\}\mathrm{d}x\tag{2·17}$$

(其中 $F(x,u)=\int_0^u f(x,v)\mathrm{d}v$)有下界;若 $u_n(x)\in H_0^1(\Omega)$使

$$\lim_{n\to\infty}\varphi(u_n(x))=d=\inf_{u(x)\in H_0^1(\Omega)}\varphi(u(x)),$$

则必有$\|u_n-u^*\|_{1,2}\to 0$.

证 提醒一下(参看〔94〕),所谓 $u(x)\in H_0^1(\Omega)$是问题(2·15)的广义解(亦称弱解),是指 $u(x)$满足

$$\int_\Omega \{Du(x)\cdot Dv(x)-f(x,u(x))v(x)\}\mathrm{d}x=0,$$

$$\forall\, v(x)\in C_0^\infty(\Omega). \qquad (2\cdot 18)$$

这里 $D=\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_N}\right)$, $Du\cdot Dv=\sum_{i=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}$,其中都是 Sobolev 意义下的广义微商(参看例 1.3). 易知,若 $u(x)$是古典解(即 $u\in C(\bar{\Omega})\cap C^2(\Omega)$且满足(2·15)),则它必满足(2·18)式,即必是广义解. 故广义解是古典解的推广.

令 $$a(u,v)=\int_\Omega [Du\cdot Dv-f(x,u)v]\mathrm{d}x,$$

$$\forall\, u,v\in H_0^1(\Omega). \qquad (2\cdot 19)$$

先证 $a(u,v)$有意义. 今在 $H_0^1(\Omega)$中,可把范数与内积取成(参看例 1.3)

$$\|u\|_{1,2}=\left(\int_\Omega Du\cdot Du\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}=\left\{\int_\Omega\left[\sum_{i=1}^N\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2\right]\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$(u,v)_1=\int_\Omega Du\cdot Dv\,\mathrm{d}x=\int_\Omega\sum_{i=1}^N\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\mathrm{d}x.$$

因 $N>2$,根据嵌入定理(例如,见〔94〕、〔135〕),$W^{1,2}(\Omega)\hookrightarrow L_{\frac{2N}{N-2}}(\Omega)$,故 $u,v\in L_{\frac{2N}{N-2}}(\Omega)$,且存在常数 $c>0$,使

$$\|u\|_{\frac{2N}{N-2}}\leqslant c\|u\|_{1,2}\quad \forall\, u\in W^{1,2}(\Omega). \qquad (2\cdot 20)$$

由(2·16)式知，Немыкций 算子 $\mathbf{f}u(x)=f(x,u(x))$ 映 $L_{\frac{2N}{N-2}}(\Omega)$ 入 $L_{\frac{2N}{N+2}}(\Omega)$ 连续有界，由此可知，积分 $\int_\Omega f(x,u)v\mathrm{d}x$ 存在($\forall u,v\in H_0^1(\Omega)$)，因此 $a(u,v)$ 有意义，并且 $\forall u,v\in H_0^1(\Omega)$，有

$$
\begin{aligned}
|(u,v)| &\leqslant \|u\|_{1,2}\cdot\|v\|_{1,2}+\|\mathbf{f}u\|_{\frac{2N}{N+2}}\cdot\|v\|_{\frac{2N}{N-2}} \\
&\leqslant (\|u\|_{1,2}+c\|\mathbf{f}u\|_{\frac{2N}{N+2}})\|v\|_{1,2},
\end{aligned}
\tag{2·21}
$$

故对固定的 $u\in H_0^1(\Omega)$，$a(u,\cdot)$ 是 $H_0^1(\Omega)$ 上的有界线性泛函，因此，根据 Hilbert 空间上有界线性泛函的 Riesz 表示定理，存在惟一的 $w\in H_0^1(\Omega)$，使

$$
a(u,v)=(w,v)_1,\quad \forall v\in H_0^1(\Omega). \tag{2·22}
$$

令 $Tu=w$，则映象 $T:H_0^1(\Omega)\to H_0^1(\Omega)$，且

$$
a(u,v)=(Tu,v)_1,\quad \forall u,v\in H_0^1(\Omega). \tag{2·23}
$$

由于 $C_0^\infty(\Omega)$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中稠密，故显然 $u\in H_0^1(\Omega)$ 是(2·15)的广义解，当且仅当 $Tu=\theta$. 因此，需要证明 $Tu=\theta$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中具有惟一的解．我们验证定理 2.4 的全部条件满足．

先验证 T 的连续性．设 $\|u_n-u\|_{1,2}\to 0$ ($u_n,u\in H_0^1(\Omega)$). 于是，由(2·20)式知 $\|u_n-u\|_{\frac{2N}{N-2}}\to 0$. 由(2·20)式与(2·23)式，并注意到 $\mathbf{f}$ 的连续性，得

$$
\begin{aligned}
\|Tu_n-Tu\|_{1,2} &= \sup_{\|v\|_{1,2}=1}(Tu_n-Tu,v)_1 \\
&= \sup_{\|v\|_{1,2}=1}[a(u_n,v)-a(u,v)] \\
&\leqslant \sup_{\|v\|_{1,2}=1}\left[\left|\int_\Omega D(u_n-u)\cdot Dv\mathrm{d}x\right|\right. \\
&\quad \left.+\left|\int_\Omega [f(x,u_n)-f(x,u)]v\mathrm{d}x\right|\right]
\end{aligned}
$$

$$\leqslant \sup_{\|v\|_{1,2}=1}\Big[\|u_n-u\|_{1,2}\cdot\|v\|_{1,2}$$

$$+\|\mathbf{f}u_n-\mathbf{f}u\|_{\frac{2N}{N+2}}\cdot\|v\|_{\frac{2N}{N-2}}\Big]$$

$$\leqslant\|u_n-u\|_{1,2}+c\|\mathbf{f}u_n-\mathbf{f}u\|_{\frac{2N}{N+2}}\to 0$$

$$(n\to\infty).$$

故 T 的连续性获证．再证 T 是强单调的．事实上，利用 $f(x,u)$是关于 u 的减函数知：对于 $u,v\in H_0^1(\Omega)$，有

$$(Tu-Tv,u-v)_1=a(u,u-v)-a(v,u-v)$$

$$=\int_\Omega\{D(u-v)\cdot D(u-v)-[f(x,u)-f(x,v)](u-v)\}\mathrm{d}x$$

$$\geqslant\int_\Omega D(u-v)\cdot D(u-v)\mathrm{d}x=\|u-v\|_{1,2}^2,$$

由此可知，(2·9)式满足，其中 $\alpha(t)=t$ 是连续函数．于是，根据定理 2.3 知方程 $Tx=\theta$ 在$H_0^1(\Omega)$中具有惟一解 u^*．

下面证明 T 是泛函(2·17)式的梯度：$T=\mathrm{grad}\varphi$．首先，对 $u\in H_0^1(\Omega)$，$\varphi(u)$有意义，这是因为

$$|\varphi(u)|=\left|\int_\Omega\left\{\frac{1}{2}Du\cdot Du+f(x,\theta u)u\right\}\mathrm{d}x\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\|u\|_{1,2}^2+\|f(\theta u)\|_{\frac{2N}{N+2}}\cdot\|u\|_{\frac{2N}{N-2}}$$

$$<+\infty,\qquad 0\leqslant\theta(x)\leqslant 1.$$

对于 $u,h\in H_0^1(\Omega)$，有

$$\varphi(u+h)-\varphi(u)-(Tu,h)_1$$

$$=\int_\Omega\left\{\frac{1}{2}D(u+h)\cdot D(u+h)-\frac{1}{2}Du\cdot Du-Du\cdot Dh\right\}\mathrm{d}x$$

$$-\int_\Omega\{uF(x,u+h)-F(x,u)-f(x,u)h\}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int_\Omega Dh\cdot Dh\,\mathrm{d}x-\int_\Omega\{f(x,u+\theta^*h)-f(x,u)\}h\,\mathrm{d}x,$$

其中 $0\leqslant\theta^*(x)\leqslant1$，由此，注意到(2·20)式以及算子 $\mathbf{f}$ 的连续性，知

$$\frac{1}{\|h\|_{1,2}}\cdot|\varphi(u+h)-\varphi(u)-(Tu,h)_1|$$

$$\leqslant\frac{1}{\|h\|_{1,2}}\left\{\frac{1}{2}\|h\|_{1,2}^2+\|\mathbf{f}(u+\theta^*h)-\mathbf{f}u\|_{\frac{2N}{N+2}}\cdot\|h\|_{\frac{2N}{N-2}}\right\}$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\|h\|_{1,2}+c\|\mathbf{f}(u+\theta^*h)-\mathbf{f}u\|_{\frac{2N}{N+2}}\to0,$$

当 $\|h\|_{1,2}\to0$ 时．

故 φ 在 u 处 Fréchet 可微且 $\varphi'(u)=Tu$，即 $T=\mathrm{grad}\varphi$．于是，根据定理 2.4，所述结论全部获证．证完．

注 2 若更设 Ω 是 L 型区域(参看[135])，对任何 $R>0$，$f(x,u)$ 在 $\Omega\times[-R,R]$ 上关于 x，u 满足 Lipschitz 条件，并且(2·16)式中的 $a(x)$ 在 Ω 上有界，$0<\sigma<\dfrac{N+2}{N-2}$，那末，Dirichlet 问题(2·15)在空间 $H_0^1(\Omega)$ 中的广义解 u 必是古典解(实际上，u 属于某 $C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$，$0<\alpha<1$ 参看[8])．于是，这时，Dirichlet 问题(2·15)的古典解存在惟一．

例 2.2 设 Ω 是 R^N 中有界锥形区域．现考察一般的 $2m$ 阶($m\geqslant1$)散度型微分算子

$$Au=\sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m}(-1)^{|\alpha|}\cdot D^\alpha A_\alpha(x,u,\cdots,D^mu),\quad(2\cdot24)$$

其中函数 $A_\alpha(x,u,\cdots,w)$ 满足 Caratheodory 条件，即对几乎所有的 $x\in\Omega$，A_α 关于 $u,\cdots,w$ ($u,\cdots,w\in R^1$)连续，且对每一组 $u,\cdots,w$，A_α 关于 x 在 Ω 上可测．设 V 是 $H^m(\Omega)$ 的一个闭子空间，满足 $H_0^m(\Omega)\subset V\subset H^m(\Omega)$．显然，$V$ 是一个 Hilbert 空

间．

设 $f\in L_2(\Omega)$．如果函数 $u\in V$，使得

$$\int_\Omega \sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m} A_\alpha(x,u,\cdots,D^m u)D^\alpha v\,\mathrm{d}x=\int_\Omega fv\,\mathrm{d}x,$$

$$\forall\, v\in V, \tag{2·25}$$

则称 u 是方程 $Au=f$ 对应于子空间 V 的边值问题的广义解(弱解)(参看〔129〕、〔130〕)．

结论 设(ⅰ)存在 $r\geqslant 0$ 上的非负连续函数 $g(r)$，使

$$|A_\alpha(x,u,\cdots,D^m u)|\leqslant g(\|u\|_{m,2})\cdot\Big\{\sum_{0\leqslant|\beta|\leqslant m}|D^\beta u|+1\Big\}$$

$$\forall\, u\in V,\ 0\leqslant|\alpha|\leqslant m; \tag{2·26}$$

(ⅱ)存在 $c>0$，使

$$\sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m}\int_\Omega [A_\alpha(x,u,\cdots,D^m u)-A_\alpha(x,v,\cdots,D^m v)]$$

$$\cdot D^\alpha(u-v)\mathrm{d}x\geqslant c\|u-v\|_{m,2},\quad \forall\, u,v\in V. \tag{2·27}$$

这里的范数 $\|\cdot\|_{m,2}$ 是指按(1·4)式(令 $p=2$)定义的范数．那末，对于任何 $f\in L_2(\Omega)$，方程 $Au=f$ 对应于子空间 V 的边值问题的广义解存在惟一．

证 令

$$a(u,v)=\int_\Omega \sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m} A_\alpha(x,u,\cdots,D^m u)D^\alpha v\,\mathrm{d}x,$$

$$\forall\, u,v\in V.$$

根据(2·26)式，利用 Hölder 不等式，易知 $a(u,v)$ 有意义，并且

$$|a(u,v)|\leqslant g_1(\|u\|_{m,2})\cdot\|v\|_{m,2}, \tag{2·28}$$

其中 $g_1(r)$ 是 $r\geqslant 0$ 上的某非负连续函数．于是，对固定的 $u\in V$，$a(u,\cdot)$ 是 V 上的有界线性泛函，从而存在惟一的 $w\in V$，使

$$a(u, v) = (w, v)_m, \quad \forall v \in V,$$

其中$(\cdot, \cdot)_m$ 是按(1·5)式定义的内积．令 $Tu = w$,则映象 T: $V \to V$,且满足

$$a(u, v) = (Tu, v)_m, \quad \forall v \in V. \qquad (2 \cdot 29)$$

任给 $f \in L_2(\Omega)$,记$\langle f, v \rangle = \int_\Omega fv\mathrm{d}x, \quad \forall v \in V$. 由于

$$|\langle f, v \rangle| \leqslant \|f\|_{L_2} \cdot \|v\|_{L_2} \leqslant \|f\|_{L_2} \cdot \|v\|_{m,2},$$

$$\forall v \in V,$$

故$\langle f, \cdot \rangle$是 V 上的有界线性泛函,因此,存在惟一的 $w_f \in V$,使

$$\langle f, v \rangle = (w_f, v)_m, \quad \forall v \in V. \qquad (2 \cdot 30)$$

由于(2·25)式即是 $a(u, v) = \langle f, v \rangle, \quad \forall v \in V$,故根据(2·29)式与(2·23)式即知:(2·25)式成立$\Leftrightarrow Tu = w_f$. 如果证明了 T 是半连续的强单调映象,那末,根据定理 2.3 知 T 满射(即 $T(V) = V$),而且是一一对应的,因此,满足 $Tu = w_f$(对于固定的 $f \in L_2(\Omega)$的 $u \in V$ 存在惟一,方程 $Au = f$ 对应于 V 的边值问题的广义解存在惟一,从而所述结论获证．下面只须证明 T 半连续、强单调．

先证 T 次连续(从而半连续). 设 $u_n, u \in V$, $\|u_n - u\|_{m,2} \to 0$. 于是$\{\|u_n\|_{m,2}\}$有界,从而根据(2·26)式易知

$$\int_\Omega |A_\alpha(x, u_n, \cdots, D^m u_n)|^2 \mathrm{d}x \leqslant a = \mathrm{const},$$

$$\forall 0 \leqslant |\alpha| \leqslant m. \qquad (2 \cdot 31)$$

由于$\|u_n - u\|_{m,2} \to 0$,故存在$\{u_n\}$的子列$\{u_{n_k}\}$,使

$$D^\alpha u_{n_k} \to D^\alpha u, \quad p.p. \text{ 于 } \Omega, \quad \forall 0 \leqslant |\alpha| \leqslant m. \qquad (2 \cdot 32)$$

再根据 A_α 函数满足 Caratheodory 条件,知

$$A_\alpha(x, u_{n_k}, \cdots, D^m u_{n_k}) \to A_\alpha(x, u, \cdots, D_m u),$$

$$p.p. \text{ 于 } \Omega, \quad \forall\, 0 \leqslant |\alpha| \leqslant m. \tag{2·33}$$

任给 $h \in L_2(\Omega)$，对可测集 $\omega \subset \Omega$，注意到(2·31)式与(2·33)式及实变函数论中的 Fatou 引理，有

$$\int_\Omega \left| A_\alpha(x, u_{n_k}, \cdots, D^m u_{n_k}) h - A_\alpha(x, u, \cdots, D^m u) h \right| \mathrm{d}x$$

$$\leqslant \left(\int_\Omega \left| A_\alpha(x, u_{n_k}, \cdots, D^m u_{n_k}) - A_\alpha(x, u, \cdots, D_m u) \right|^2 \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\cdot \left(\int_\Omega |h|^2 \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant 2\sqrt{a} \left(\int_\Omega |h|^2 \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall\, k = 1, 2, \cdots. \tag{2·34}$$

由(2·33)式与(2·34)式，利用实变函数论中的 Vitali 定理，知

$$\int_\Omega A_\alpha(x, u_{n_k}, \cdots, D^m u_{n_k}) h \mathrm{d}x \to \int_\Omega A_\alpha(x, u, \cdots, D^m u) h \mathrm{d}x,$$

$(k \to \infty)$，$\forall\, 0 \leqslant |\alpha| \leqslant m$.

由此可知

$$a(u_{n_k}, v) \to a(u, v), \quad (k \to \infty), \ \forall\, v \in V,$$

即 $(Tu_{n_k}, v)_m \to (Tu, v)_m$，$\forall\, v \in V$；换句话说，$Tu_{n_k} \rightharpoonup Tu$．于是，根据引理 1.1 知 T 次连续．

至于 T 的强单调性，可直接从(2·29)式与(2·27)式得出：

$$(Tu - Tv, u - v)_m = (Tu, u - v)_m - (Tv, u - v)_m$$

$$= a(u, u - v) - a(v, u - v)$$

$$= \sum_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant m} \int_\Omega [A_\alpha(x, u, \cdots, D^m u) - A_\alpha(x, v, \cdots, D^m v)]$$

$$\cdot D^\alpha(u - v) \mathrm{d}x$$

$$\geqslant c \| u - v \|_{m,2}, \quad \forall\, u, v \in V.$$

证完．

例 2.3 考察 Hammerstein 积分方程

$$u(x)=\int_G k(x,y)f(y,u(y))\mathrm{d}y, \tag{2·35}$$

其中 G 是 R^N 中某可测集，$0<\mathrm{mes}G\leqslant+\infty$.

结论 设(ⅰ)$k(x,y)$是对称核，且线性积分算子

$$Ku(x)=\int_\Omega k(x,y)u(y)\mathrm{d}y \tag{2·36}$$

映 $L_2(G)$入 $L_2(G)$，并且是非负算子，即

$$(Ku,u)=\int_G\int_G k(x,y)u(x)u(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\geqslant 0$$

$$\forall u(x)\in L_2(G)$$

(但不假定 K 全连续).

(ⅱ)$f(x,u)(x\in G,\ -\infty<u<+\infty)$满足 Caratheodory 条件，并满足

a)存在 $b>0$ 及 $a(x)\in L_2(G)$，使

$|f(x,u)|\leqslant a(x)+b|u|$, $\forall x\in G\ p.p.$, $-\infty<u<+\infty$；再设 $f(x,u)$满足下面两条件 b)与 b')之一：

b)$f_u{}'(x,u)\leqslant M=\mathrm{const}$, $\forall x\in G\ p.p.$, $-\infty<u<+\infty$，其中 $M<\|K\|^{-1}$；

b')对于 $x\in G\ p.p.$, $f(x,u)$是 u 的减函数，即 $f(x,u_1)\geqslant f(x,u_2)$, $\forall -\infty<u_1<u_2<+\infty$(不要求 $f_u{}'(x,u)$存在).

那末方程(2·35)在 $L_2(G)$中具有惟一解.

证 首先，由假定知 $K:L_2(G)\to L_2(G)$是单调算子，从而根据定理 1.1 知 K 在$L_2(G)$中每个点处都是局部有界的，注意到 K 是线性的，知 K 有界，从而连续；再注意到 $k(x,y)$是对称核，即知 K 是有界自共轭算子，而且是非负算子．将方程(2·35)写为

$$u=K\mathbf{f}u, \tag{2·37}$$

其中 f 是 Немыкций 算子：$\mathbf{f}u = f(x, u(x))$. 由条件 a)知，$\mathbf{f}$：$L_2(G) \to L_2(G)$连续、有界．用 $K^{\frac{1}{2}}$表 K 的正平方根(它也是映 $L_2(G)$入 $L_2(G)$的非负算子)．我们证明：方程(2·37)在 $L_2(G)$中具有惟一解的充分必要条件是方程

$$u = K^{\frac{1}{2}}\mathbf{f}K^{\frac{1}{2}}u \tag{2·38}$$

在 $L_2(G)$中有惟一解．事实上，若方程(2·38)在 $L_2(G)$中具有惟一解 u^*，则 $u^* = K^{\frac{1}{2}}\mathbf{f}K^{\frac{1}{2}}u^*$，从而 $K^{\frac{1}{2}}u^* = K\mathbf{f}K^{\frac{1}{2}}u^*$，故 $v^* = K^{\frac{1}{2}}u^* \in L_2(G)$是方程(2·37)的解．现设 v_*是方程(2·37)在 $L_2(G)$中的任一解，即 $v_* = K\mathbf{f}v_*$，从而 $K^{\frac{1}{2}}\mathbf{f}v_* = K^{\frac{1}{2}}\mathbf{f}K\mathbf{f}v_*$，故 $u_* = K^{\frac{1}{2}}\mathbf{f}v_*$是方程(2·38)在 $L_2(G)$中的解．根据方程(2·38)解的惟一性，得 $u_* = u^*$，从而 $v^* = K^{\frac{1}{2}}u^* = K^{\frac{1}{2}}u_* = K\mathbf{f}v_* = v_*$．故方程(2·37)在 $L_2(G)$中的解存在惟一；反之，若方程(2·37)在 $L_2(G)$中具有惟一解 v_*，前面已述，这时 $u_* = K^{\frac{1}{2}}\mathbf{f}v_*$是方程(2·38)在 $L_2(G)$中的解．现设 u^*是方程(2·38)在 $L_2(G)$中任一解，这时 $v^* = K^{\frac{1}{2}}u^*$是方程(2·37)在 $L_2(G)$中的解．根据惟一性假定知 $v^* = v_*$，从而 $u^* = K^{\frac{1}{2}}\mathbf{f}K^{\frac{1}{2}}u^* = K^{\frac{1}{2}}\mathbf{f}v^* = u_*$，故方程(2·38)在 $L_2(G)$中的解存在惟一．

于是，只需证明方程(2·38)在 $L_2(G)$中存在惟一的解，这又相当于方程 $Tx = \theta$ 在 $L_2(G)$中具有惟一解，其中 $T = I - K^{\frac{1}{2}}\mathbf{f}K^{\frac{1}{2}}$．显然 $T: L_2(G) \to L_2(G)$连续，故根据定理 2.3，只需证明 T 是强单调即可．对于 $u, v \in L_2(G)$，我们有

$$(Tu - Tv, u - v) = (u - K^{\frac{1}{2}}\mathbf{f}K^{\frac{1}{2}}u - v + K^{\frac{1}{2}}\mathbf{f}K^{\frac{1}{2}}v, u - v)$$

$$= \| u - v \|^2 - (\mathbf{f}K^{\frac{1}{2}}u - \mathbf{f}K^{\frac{1}{2}}v,\ K^{\frac{1}{2}}u - K^{\frac{1}{2}}v). \tag{2·39}$$

当条件 b)满足时，有

$$(\mathbf{f}K^{\frac{1}{2}}u - \mathbf{f}K^{\frac{1}{2}}v, K^{\frac{1}{2}}u - K^{\frac{1}{2}}v) = \int_G [f(x, K^{\frac{1}{2}}u(x))$$

$$- f(x, K^{\frac{1}{2}}v(x))]\cdot[K^{\frac{1}{2}}u(x) - K^{\frac{1}{2}}v(x)]\mathrm{d}x$$

$$= \int_G f'_u(x, \xi(x))[K^{\frac{1}{2}}u(x) - K^{\frac{1}{2}}v(x)]^2\mathrm{d}x$$

$$\leqslant M\int_G [K^{\frac{1}{2}}u(x) - K^{\frac{1}{2}}v(x)]^2\mathrm{d}x$$

$$= M(\| K^{\frac{1}{2}} \|\cdot\| u - v \|)^2 = M\| K \|\cdot\| u - v \|^2,$$

其中 $K^{\frac{1}{2}}u(x)\leqslant\xi(x)\leqslant K^{\frac{1}{2}}v(x)$. 于是，再注意到(2·39)式，得

$$(Tu - Tv, u - v)\geqslant(1 - M\cdot\| K \|)\| u - v \|^2,$$

$$1 - M\| K \| > 0,$$

故 T 是强单调的.

当条件 b')满足时，有

$$[f(x, K^{\frac{1}{2}}u(x)) - f(x, K^{\frac{1}{2}}v(x))]$$

$$\cdot[K^{\frac{1}{2}}u(x) - K^{\frac{1}{2}}v(x)]\leqslant 0,\ p.p.,$$

故有

$$\int_G [f(x, K^{\frac{1}{2}}u(x)) - f(x, K^{\frac{1}{2}}v(x))]$$

$$\cdot[K^{\frac{1}{2}}u(x) - K^{\frac{1}{2}}v(x)]\mathrm{d}x\leqslant 0,$$

于是，再注意到(2·39)式，得

$$(Tu - Tv, u - v)\geqslant\| u - v \|^2,$$

故 T 也是强单调的. 证完.

注3 可以举出一些具体的函数 $f(x, u)$ 来，例如(设 $\mathrm{mes}G < +\infty$)

$$f(x, u) = a(x)\sin u + bu,$$

其中 $a(x)$在 G 上有界可测,且$\sup\limits_{x\in G}|a(x)| + b < \|K\|^{-1}$,就满足条件 a)与 b),而函数

$$f(x, u) = a(x) - bu^{\frac{1}{3}}$$

其中 $a(x)\in L_2(G), b>0$,就满足条件 a)与 b′).

§3 多值极大单调映象的满射性

引理 3.1 若 $T:E\to E^*$ 半连续、单调,则 T 必是极大单调的.

证 设 $x\in E, f\in E^*$,使

$$(f - Ty, x - y)\geqslant 0,\quad \forall\, y\in E. \tag{3·1}$$

需证 $f = Tx$. 用反证法. 若 $f\neq Tx$,则存在 $z\in E$,使$(f - Tx, z)\neq 0$. 不失一般性,可设$(f - Tx, z)>0$(否则以 $-z$ 代 z 即可). 在(3·1)式中,取 $y = y_t = x + tz, t>0$,得$(f - Ty_t, z)\leqslant 0$. 令 $t\to +0$,注意 T 的半连续性,得$(f - Tx, z)\leqslant 0$,此与$(f - Tx, z)>0$ 矛盾. 证完.

定义 3.1 设 E 是实 Banach 空间. 如果对于任何 $x, y\in E, \|x\| = \|y\| = 1, x\neq y$,都有

$$\|(1-t)x + ty\|<1,\quad \forall\, 0<t<1, \tag{3·2}$$

则称 E 是**严格凸**的. 条件(3·2)的几何意义是:E 中单位球面上的弦,除两个端点外,都在单位球的内部.

易知,空间 $R^n, L_p(1<p<+\infty)$及实 Hilbert 空间都是严格凸的,而空间 L 和连续函数空间 C 不是严格凸的.

引理 3.2 下述三个结论是互相等价的.

(ⅰ) E 是严格凸的；

(ⅱ) 任何 $f\in E^*$，$f\neq\theta$，在 E 的单位球面上都至多有一点达到其最大值，即：若 $z_1, z_2\in E$，$\|z_1\|=\|z_2\|=1$，使 $(f, z_1)=(f, z_2)=\sup\limits_{\|x\|=1}(f, x)$，则必有 $z_1=z_2$；

(ⅲ) $x, y\in E$，$\|x\|=\|y\|=1$，$x\neq y\Rightarrow\left\|\dfrac{x+y}{2}\right\|<1$.

证 (ⅰ)⇒(ⅱ) 设有 $z_1, z_2\in E$，$\|z_1\|=\|z_2\|=1$，$z_1\neq z_2$，使 $(f, z_1)=(f, z_2)=\sup\limits_{\|x\|=1}(f, x)=\|f\|$，则对任何 $0<t<1$，有

$$(f, (1-t)z_1+tz_2)=(1-t)(f, z_1)+t(f, z_2)=\|f\|,$$

由此，注意到 $\|f\|>0$，得 $\|(1-t)z_1+tz_2\|\geqslant 1$，此与(ⅰ)矛盾．

(ⅱ)⇒(ⅲ) 设有 $x, y\in E$，$\|x\|=\|y\|=1$，$x\neq y$，使 $\left\|\dfrac{x+y}{2}\right\|\geqslant 1$，则 $\left\|\dfrac{x+y}{2}\right\|=1$．根据 Hahn－Banach 定理，存在 $f\in E^*$，$\|f\|=1$，使 $\left(f, \dfrac{x+y}{2}\right)=\left\|\dfrac{x+y}{2}\right\|=1$，从而 $(f, x)+(f, y)=2$．但因 $(f, x)\leqslant\|f\|\cdot\|x\|=1$，$(f, y)\leqslant\|f\|\cdot\|y\|=1$，故 $(f, x)=(f, y)=1=\|f\|=\sup\limits_{\|z\|=1}(f, z)$，此与(ⅱ)矛盾．

(ⅲ)⇒(ⅰ) 设 $x, y\in E$，$\|x\|=\|y\|=1$，$x\neq y$．于是，由(ⅲ)知 $\|x+y\|<2$，当 $\dfrac{1}{2}\leqslant t<1$ 时，我们有

$$\begin{aligned}\|(1-t)x+ty\|&=\|(1-t)(x+y)+(2t-1)y\|\\&\leqslant(1-t)\|x+y\|+(2t-1)\|y\|<2(1-t)+(2t-1)=1;\end{aligned}$$

当 $0<t<\dfrac{1}{2}$ 时，又有

$$\begin{aligned}\|(1-t)x+ty\|&=\|(1-2t)x+t(x+y)\|\\&\leqslant(1-2t)\|x\|+t\|x+y\|<(1-2t)+2t=1.\end{aligned}$$

故(ⅰ)成立．证完．

引理 3.3(Asplund) 设 E 自反，E 中范数为 $\|x\|$，E^* 中范

数为$\|f\| = \sup_{\|x\|=1}(f, x)$. 则必存在 E 中与$\|x\|$等价的范数$\|x\|_0$,使$\|f\|_0 = \sup_{\|x\|_0=1}(f, x)$是 E^* 中与$\|f\|$等价的范数,并且 E 按范数$\|x\|_0$ 是严格凸的,E^* 按范数$\|f\|_0$ 是严格凸的 .

证 证明见〔136〕(亦参见〔130〕).

定义 3.2 设 E 是实 Banach 空间 . 对 $x \in E$,令

$$Jx = \{f \mid f \in E^*, (f, x) = \|x\|^2 = \|f\|^2\}, \qquad (3\cdot3)$$

则 $J: E \to 2^{E^*}$ 是多值映象 . J 称为 E 的**正规对偶映象** .

易知,(ⅰ)$D(J) = E$;事实上,$\theta \in J\theta$. 当 $x \neq \theta$ 时,由 Hahn - Banach 定理,知存在 $f_0 \in E^*$,$\|f_0\| = 1$,使得$(f_0, x) = \|x\|$. 于是,显然 $f = \|x\| f_0 \in Jx$.

(ⅱ)J 是奇的:$J(-x) = -J(x)$, $\forall x \in E = D(J)$.

(ⅲ)J 是正齐次的:$J(\lambda x) = \lambda Jx$, $\forall \lambda > 0, x \in E$;

(ⅳ)J 是有界的 .

引理 3.4 若 E^* 是严格凸的,则 J 是单值映象,即 $J: E \to E^*$.

证 设 $f \in Jx, g \in Jx$,要证 $f = g$. 我们有

$$(f, x) = \|x\|^2 = \|f\|^2, \quad (g, x) = \|x\|^2 = \|g\|^2.$$

可设 $f \neq \theta, g \neq \theta$(因若 $f = \theta$,则 $x = \theta$,从而 $g = \theta$;反之,从 $g = \theta$ 也可得 $f = \theta$). 于是

$$\left(\frac{f}{\|f\|}, x\right) = \|x\| = \left(\frac{g}{\|g\|}, x\right),$$

故 E^* 上的线性连续泛函 $F_x(h) = (h, x)$在点$\frac{f}{\|f\|}$与$\frac{g}{\|g\|}$处都达到其在E^*中的单位球面$\{h \mid h \in E^*, \|h\| = 1\}$上的最大值 . 由于 E^* 是严格凸的,故根据引理 3.2 知$\frac{f}{\|f\|} = \frac{g}{\|g\|}$. 但$\|f\| =$

$\|g\|$, 故 $f=g$. 证完.

注 1 在引理 3.4 的情况下, 有

$$(Jx, x)=\|x\|^2=\|Jx\|^2, \quad \forall x \in E.$$

引理 3.5 设 E 是自反的, 并且 E 和 E^* 都是严格凸的, 则映象 $J: E \to E^*$ 是严格单调的、次连续的, 并且 $R(J)=E^*$, J 使 E 与 E^* 一一对应.

证 对 $x, y \in E$, 有

$$\begin{aligned}(Jx-Jy, x-y) &= (Jx, x)-(Jx, y)-(Jy, x)+(Jy, y) \\ &= (\|x\|-\|y\|)^2+[\|x\| \cdot \|y\|-(Jx, y)] \\ &\quad +[\|x\| \cdot \|y\|-(Jy, x)]. \end{aligned} \tag{3·4}$$

由于

$$\begin{cases}(Jx, y) \leqslant \|Jx\| \cdot \|y\|=\|x\| \cdot \|y\|, \\ (Jy, x) \leqslant \|Jy\| \cdot \|x\|=\|x\| \cdot \|y\|,\end{cases} \tag{3·5}$$

故由(3·4)式与(3·5)式得 $(Jx-Jy, x-y) \geqslant 0$; 今设 $(Jx-Jy, x-y)=0$, 下证 $x=y$. 这时, 由(3·4)式与(3·5)式知

$$\|x\|=\|y\|, \quad (Jx, y)=(Jy, x)=\|x\| \cdot \|y\|. \tag{3·6}$$

显然可设 $\|x\|=\|y\| \neq 0$. 我们有

$$\left(Jx, \frac{y}{\|y\|}\right)=\|x\|=\|Jx\|=\left(Jx, \frac{x}{\|x\|}\right),$$

故 Jx 在 E 的单位球面上于点 $\frac{y}{\|y\|}$ 与 $\frac{x}{\|x\|}$ 处均达到最大值, 从而, 注意到 E 是严格凸的, $\frac{y}{\|y\|}=\frac{x}{\|x\|}$; 由此再注意到(3·6)式, 得 $x=y$. J 的严格单调性获证.

由于 J 严格单调, 故 $x, y \in E, x \neq y \Rightarrow Jx \neq Jy$. 下设 $R(J)=E^*$. 任给 $f \in E^*$, 下面证明必有 $x \in E$, 使 $Jx=f$. 事实上, 可设 $f \neq \theta$(因 $J\theta=\theta$). 因 E 自反, 故由 Hahn－Banach 定理, 存

在 $z\in E=E^{**}$，$\|z\|=1$，使 $(f,z)=\|f\|$．令 $x=\|f\|z$，则 $(f,x)=\|f\|^2=\|x\|^2$．即 $Jx=f$．于是 $R(J)=E^*$ 获证．

最后证明 J 是次连续的．设 $x_n\in E$，$x_n\to x\in E$．由于 $\{Jx_n\}$ 有界，根据 E^* 的自反性知，存在子列 $Jx_{n_i}\rightharpoonup f\in E^*$．由于

$$\|x_{n_i}\|^2\to\|x\|^2,\quad \|x_{n_i}\|^2=(Jx_{n_i},x_{n_i})\to(f,x),$$

故 $\|x\|^2=(f,x)$，从而 $\|x\|\leqslant\|f\|$；另一方面，

$$\|f\|\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\|Jx_{n_i}\|=\lim_{n\to\infty}\|x_{n_i}\|=\|x\|,$$

故 $\|x\|=\|f\|$．由此可知，$Jx=f$．于是，根据引理 1.1 即知 J 次连续．证完．

注 2 当 E 是实 Hilbert 空间时，显然 $J=I$（恒等算子），故正规对偶映象 J 是 Hilbert 空间中的恒等算子在一般 Banach 空间中的推广，它在多值极大单调映象满射性的讨论中起着重要的工具作用．

定义 3.3 设多值映象 $T:E\to 2^{E^*}$，设 $D(T)$ 无界．

（ⅰ）若

$$\lim_{x\in D(T),\|x\|\to+\infty}\left\{\inf_{f\in Tx}\frac{(f,x)}{\|x\|}\right\}=+\infty,\tag{3·7}$$

则称 T 是**强制的**；

（ⅱ）给定 $h\in E^*$．若存在 $r>0$，使

$$(f-h,x)>0,\quad\forall x\in D(T),\ \|x\|\geqslant r,\ f\in Tx,\tag{3·8}$$

则称 T **关于 h 是强制的**

我们证明：若 T 是强制的，则 T 关于任何 $h\in E^*$ 都是强制的．事实上，令

$$c(x)=\inf_{f\in Tx}\frac{(f,x)}{\|x\|},\tag{3·9}$$

则(3·7)式为 $c(x)\to+\infty$，当 $x\in D(T)$，$\|x\|\to+\infty$ 时．于是，对任给的 $h\in E^*$，有

$$(f-h,x)=(f,x)-(h,x)\geqslant(c(x)-\|h\|)\cdot\|x\|,$$

由此可知，存在 $r>0$，使当 $x\in D(T)$，$\|x\|\geqslant r$ 时，恒有$(f-h,x)>0$．证完．

注3 很明显，多值映象的强制概念(即(3·7)式)，是单值映象强制概念(即(2·7)式)的直接推广．

下面三个引理(引理3·6～3·8)是要建立 Debrunner－Flor 不等式，它是多值单调映象理论中十分重要的一个不等式，后面的主要满射性定理(定理3·1与定理3·2)都是以它作为基础的．

引理3.6(Debrunner－Flor) 设 K 是 E 中紧凸集，$G\subset K\times E^*$ 且 G 是单调集．又设 $P:K\to E^*$ 是连续映象，$h\in E^*$．于是，必有 $u\in K$ 存在，使

$$(f+Pu-h,x-u)\geqslant 0\quad\forall[x,f]\in G.\qquad(3\cdot 10)$$

证 不妨设 $h=\theta$(否则，以映象 $P_1x=Px-h$ 代替 P 即可)．用反证法．假定无 $u\in K$ 使(3·10)式成立．则对任何 $u\in K$，必存在$[x_u,f_u]\in G$，使得$(f_u+Pu,x_u-u)<0$．由 P 的连续性知，存在 $r_u>0$，使

$$(f_u+Py,x_u-y)<0,\quad\forall y\in K,\ \|y-u\|<r_u.\qquad(3\cdot 11)$$

令

$$N(x_u,f_u)=\{y\mid y\in K,\ \|y-u\|<r_u\}$$

于是，$N(x_u,f_u)$是 K 中(相对)开集，且 $K=\bigcup_{u\in K}N(x_u,f_u)$．由 K 的紧性知，存在有限个 $u_i\in K(i=1,2,\cdots,n)$，使 $K=\bigcup_{i=1}^{n}N(x_{u_i},f_{u_i})$．令

$$\alpha_i(y)=\begin{cases} r_{u_i}-\|y-u_i\|, & 若\|y-u_i\|<r_{u_i}; \\ 0, & 若\|y-u_i\|\geqslant r_{u_i}. \end{cases} \tag{3·12}$$

显然，$\alpha_i: E\to[0, r_{u_i}]$连续，并且（i）当 $y\in K$ 时，有 $\alpha_i(y)>0 \Leftrightarrow y\in N(x_{u_i}, f_{u_i})$；（ii）任何 $y\in K$ 都必属于某个$N(x_{u_i}, f_{u_i})$，于是，对每个 $y\in K$，均有 $\alpha(y)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(y)>0$. 由于 K 紧，且 $\alpha(y)$在 K 上连续，故 $\alpha(y)$在 K 上有最小值，且$\min\limits_{y\in K}\alpha(y)>0$. 令

$$\beta_i(y)=\frac{\alpha_i(y)}{\alpha(y)},\quad y\in K, i=1,2,\cdots,n.$$

于是，$\beta_i: K\to[0,1]$连续，$\sum_{i=1}^{n}\beta_i(y)=1$ 且 $\beta_i(y)>0\Leftrightarrow y\in N(x_{u_i}, f_{u_i})$. 定义两个映象 p 与q 如下：

$$p(y)=\sum_{i=1}^{n}\beta_i(y)x_{u_i},\quad q(y)=\sum_{i=1}^{n}\beta_i(y)f_{u_i},\quad \forall y\in K.$$

显然，$p: K\to E$ 连续，$q: K\to E^*$ 连续. 由于 $x_{u_i}\in K$，且 K 是凸集，故 $p(K)\subset K$. 于是，根据 Schauder 不动点定理（见第二章定理 3.2 系 1）知，存在 $y_0\in K$，使 $p(y_0)=y_0$.

另一方面，考察($y\in K$)

$$\begin{aligned} k(y)&=(q(y)+Py, p(y)-y) \\ &=\sum_{i,j=1}^{n}\beta_i(y)\beta_j(y)(f_{u_i}+Py, x_{u_i}-y) \\ &=k_1(y)+k_2(y), \end{aligned} \tag{3·13}$$

其中

$$k_1(y)=\sum_{i=1}^{n}[\beta_i(y)]^2(f_{u_i}+Py, x_{u_i}-y),$$

$$k_2(y)=\sum_{i<j}\beta_i(y)\beta_j(y)[(f_{u_i}+Py,x_{u_i}-y)$$
$$+(f_{u_j}+Py,x_{u_i}-y)].$$

当 $\beta_i(y)\neq 0$ 时,必有 $\beta_i(y)>0$,从而 $y\in N(x_{u_i},f_{u_i})$,注意到(3·11)式知,$(f_{u_i}+Py,x_{u_i}-y)<0$. 另外,显然至少有某 $\beta_i(y)\neq 0$(因为 $\sum_{i=1}^{n}\beta_i(y)=1$). 由此可知

$$k_1(y)<0,\quad \forall y\in K. \tag{3·14}$$

又,当 $\beta_i(y)\beta_j(y)\neq 0$ 时($i<j$),必 $y\in N(x_{u_i},f_{u_i})\cap N(x_{u_j},f_{u_j})$,从而

$$(f_{u_i}+Py,x_{u_i}-y)<0,\quad (f_{u_j}+Py,x_{u_j}-y)<0;$$

再根据集 G 的单调性,有$(f_{u_i}-f_{u_j},x_{u_i}-x_{u_j})\geqslant 0$,我们得到

$$(f_{u_i}+Py,x_{u_j}-y)+(f_{u_j}+Py,x_{u_i}-y)$$
$$=(f_{u_i}+Py,x_{u_i}-y)+(f_{u_j}+Py,x_{u_j}-y)$$
$$-(f_{u_i}-f_{u_j},x_{u_i}-x_{u_j})<0.$$

由此可知,

$$k_2(y)\leqslant 0,\quad \forall y\in K. \tag{3·15}$$

由(3·13)、(3·14)与(3·15)诸式,得 $k(y)<0\ \ \forall y\in K$;此显然和 $k(y_0)=(q(y_0)+Py_0,p(y_0)-y_0)=0$ 相矛盾．证完．

引理 3.7(有限维空间的 Debrunner－Flor 不等式)　设 E 是有限维空间,C 是E 中一个无界凸闭集．设多值映象 $T:E\to 2^{E^*}$是单调的,且 $\theta\in D(T)\cap C$, $\theta\in T\theta$. 又设映象 $P:C\to E^*$ 是连续的,并且关于某 $h\in E^*$是强制的．那末,必存在 $u\in C\cap B(\theta,r)$,使

$$(f+Pu-h,x-u)\geqslant 0,\ \forall[x,f]\in G(T),\quad x\in C, \tag{3·16}$$

其中 $B(\theta, r)=\{x \mid x\in E, \|x\|\leqslant r\}$，$r$ 是满足下式的正数：

$$(Px-h, x)>0, \quad \forall x\in C, \ \|x\|\geqslant r. \tag{3·17}$$

证 可设 $h=\theta$（否则，以 $P_1x=Px-h$ 代 P 即可）. 对任何 $s>0$，令 $K_s=\{x \mid x\in C, \|x\|\leqslant s\}$，则 K_s 是 E 中紧凸集，且 $\theta\in K_s\subset C$. 用 $T|_{K_s}$ 表 T 在 K_s 上的限制，于是，根据引理 3.6 知，存在 $u_s\in K_s$，使

$$(f+Pu_s, x-u_s)\geqslant 0 \quad \forall [x, f]\in G(T|_{K_s}). \tag{3·18}$$

令 $D_s=\{u \mid u\in K_s, (f+Pu, x-u)\geqslant 0, \forall [x, f]\in G(T|_{K_s})\}$，则 D_s 是 E 中非空紧集（$u_s\in D_s$）. 对任何 $u\in D_s$，有

$$(f+Pu, x-u)\geqslant 0, \quad \forall [x, f]\in G(T|_{K_s}), \tag{3·19}$$

即

$$(Pu, u)\leqslant(f+Pu, x)-(f, u), \quad \forall [x, f]\in G(T|_{K_s}). \tag{3·20}$$

在(3·20)式中取 $x=\theta$, $f=\theta$（因为 $\theta\in T\theta$，故 $[\theta, \theta]\in G(T|_{K_s})$），得 $(Pu, u)\leqslant 0$. 根据(3·17)式知 $\|u\|<r$. 于是有

$$D_s\subset C\cap B(\theta, r), \quad \forall s>0. \tag{3·21}$$

取 $r<s_1<s_2<\cdots$ 且 $s_n\to+\infty$，则由(3·21)式易知 $D_{s_1}\supset D_{s_2}\supset D_{s_n}\cdots$，再注意到 D_{s_n} 都是非空的紧集，即知 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} D_{s_n}\neq\varnothing$. 取 $u\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} D_{s_n}$，此 u 即合要求. 由(3·21)式知 $u\in C\cap B(\theta, r)$. 任给 $[x, f]\in G(T)$, $x\in C$. 取某 n 很大，使 $\|x\|\leqslant s_n$，于是 $[x, f]\in G(T|_{K_{s_n}})$，从而由(3·19)式知

$$(f+Pu, x-u)\geqslant 0.$$

证完.

引理 3.8(一般空间的 Debrunner – Flor 不等式) 设 E 是自反空间, C 是 E 中一个凸闭集, 使得对 E 中的某有限维子空间 F_0, 集 $C\cap F_0$ 是无界的. 设多值映象 $T: E\to 2^{E^*}$ 是单调的, 且 $\theta\in D(T)\cap C, \theta\in T\theta$. 又设映象 $P: C\to E^*$ 是单调的、次连续的、有界的, 并且关于某 $h\in E^*$ 是强制的. 那末, 必有 $u\in C\cap B(\theta, r)$ 存在, 使

$$(f+Pu-h, x-u)\geqslant 0,\quad \forall [x,f]\in G(T),\quad x\in C, \tag{3·22}$$

其中 r 是满足(3·17)式的正数.

证 可设 $G(T|_C)$是 $C\times E^*$ 中的极大单调集合(($T|_C$ 表 T 在 C 上的限制), 即若单调集 G 满足 $G(T|_C)\subset G\subset C\times E^*$, 则必有 $G(T|_C)=G$. 事实上, 考察集 $S=\{G\,|\,G(T|_C)\subset G\subset C\times E^*, G$ 是单调集$\}$, 按集合的包含关系 S 成一半序集. 显然, S 的任一全序子集 S_0 在 S 中都有上界 $G_0=\bigcup\limits_{G\in S_0} G$. 于是, 根据 Zorn 引理(例如, 见[137])知, S 至少具有一个极大元 G_1, 显然 $G(T|_C)\subset G_1$, 且 G_1 是 $C\times E^*$ 中的极大单调集. 作多值映象 $T_1: E\to 2^{E^*}$ 如下:

$$T_1x=\begin{cases}\{f\,|\,[x,f]\in G_1\}, \text{若至少有某 } f\in E^*, \text{使}[x,f]\in G_1;\\ \phi, \text{若不存在 } f\in E^*, \text{使}[x,f]\in G_1.\end{cases}$$

显然 T_1 是单调的, 且是 $T|_C$ 的延拓, $D(T_1)\subset C, D(T_1|_C)=D(T_1), G(T_1|_C)=G(T_1)=G_1$, 故 $G(T_1|_C)$是 $C\times E^*$ 中的极大单调集合. 又 $\theta\in D(T_1)\cap C=D(T_1), \theta\in T_1\theta$. 若对 T_1, 我们能证明, 存在 $u\in C\cap B(\theta, r)$, 使

$$(f+Pu-h, x-u)\geqslant 0,\quad \forall [x,f]\in G(T_1)$$

(注意, $[x,f]\in G(T_1)$蕴涵 $x\in C$), 那末, 注意到 $G(T_1)\supset G$

$(T|_C)$，知(3·22)式必成立．综上所述，我们可设 $G(T|_C)$是 $C\times E^*$ 中的极大单调集合．

另外，可设 $h=\theta$(否则，以 $P_1x=Px-h$ 代P 即可)．设 F 是E 的满足$F\supset F_0$ 的任一有限维子空间．考察嵌入映象 $j_F:F\to E$(即 $j_Fx=x,\ \forall\, x\in F$)，其共轭映象 $j_F^*:E^*\to F^*$(显然，对 $f\in E^*$，$j_F^*f=f|_F$，即 f 在F 上的限制)．令

$$T_F=j_F^*Tj_F:F\to 2^{F^*},\quad P_F=j_F^*Pj_F:C\cap F\to F^*$$

设 $x,y\in F$，$f_F\in T_Fx$，$g_F\in T_Fy$，则 $f_F=j_F^*f$，$g_F=j_F^*g$，其中 $f\in Tx$，$g\in Ty$，故

$$\begin{aligned}(f_F-g_F,x-y)&=(j_F^*(f-g),x-y)\\&=(f-g,j_F(x-y))=(f-g,x-y)\geqslant 0,\end{aligned}$$

故 T_F 是单调的；且 $\theta\in D(T_F)\cap(C\cap F)$(注意 $D(T_F)=D(T)\cap F$)，$\theta\in T_F\theta$．又显然 P_F 次连续．由于 F^*是有限维的，在其中弱收敛与强收敛一致，故 P_F 是连续的．由(3·17)式，有(注意 $h=\theta$)

$$(Px,x)>0,\quad \forall\, x\in C,\ \|x\|\geqslant r. \tag{3·23}$$

当 $x\in C\cap F$，$\|x\|\geqslant r$ 时，有

$$(P_Fx,x)=(j_F^*Px,x)=(Px,j_Fx)=(Px,x)>0,$$

故 P_F 关于θ 是强制的．于是，根据引理 3.7 知，存在 $u_F\in(C\cap F)\cap B(\theta,r)$，使

$$(f_F+P_Fu_F,x-u_F)\geqslant 0,\quad \forall\,[x,f_F]\in G(T_F),\quad x\in C\cap F,$$

即

$$(f+Pu_F,x-u_F)\geqslant 0,\quad \forall\,[x,f]\in G(T),\quad x\in C\cap F. \tag{3·24}$$

令

$$V_F=\{[u,Pu]\mid u\in C\cap B(\theta,r),(f+Pu,x-u)\geqslant 0,$$

$\forall [x,f]\in G(T),\ \ x\in C\cap F\}$.

则 V_F 非空($[u_F, Pu_F]\in V_F$). 由假定 P 有界,故存在 $R>0$,使

$$Pu\in B^*(\theta,R),\quad \forall u\in C\cap B(\theta,r). \tag{3·25}$$

其中 $B^*(\theta,R)=\{f\,|\,f\in E^*,\|f\|\leqslant R\}$. 于是,

$$V_F\subset B(\theta,r)\times B^*(\theta,R),\quad \forall F\supset F_0. \tag{3·26}$$

令 $\overline{V}_F^W$ 表 V_F 在空间 $E\times E^*$ 中的弱闭包,由于 $B(\theta,r)\times B^*(\theta,R)$ 是 $E\times E^*$ 中弱闭集,故

$$\overline{V}_F^W\subset B(\theta,r)\times B^*(\theta,R),\quad \forall F\supset F_0(F\text{ 有限维}). \tag{3·27}$$

下证,诸 $\overline{V}_F^W$ 具有有限交性质,即对任意有限个 $\overline{V}_{F_i}^W(i=1,2,\cdots,n)(F_i\supset F_0)$,都有 $\bigcap\limits_{i=1}^n \overline{V}_{F_i}^W\neq\varnothing$. 事实上,令 $F_{n+1}=\{x\,|\,x=x_1+\cdots+x_n,x_i\in F_i,i=1,2,\cdots,n\}$. 则 F_{n+1}是有限维的,$F_0\subset\bigcup\limits_{i=1}^n F_i\subset F_{n+1}$. 显然,$\bigcap\limits_{i=1}^n V_{F_i}\supset V_{F_{n+1}}$. 由前已证,对任何 $F\supset F_0$, V_F 都非空,故 $\overline{V}_{F_{n+1}}\neq\varnothing$,从而 $\bigcap\limits_{i=1}^n \overline{V}_{F_i}\neq\varnothing$,当然更有 $\bigcap\limits_{i=1}^n \overline{V}_{F_i}^W\neq\varnothing$.

由于 E 与 E^* 都是自反的,故 $B(\theta,r)\times B^*(\theta,R)$是 $E\times E^*$ 中弱序列紧集,根据引理 2.1 知,$B(\theta,r)\times B^*(\theta,R)$是弱紧集,注意到(3·27)式及诸 $\overline{V}_F^W(F\supset F_0)$具有有限交性质,得知(参看引理 2.1 的系的证明),$\bigcap\limits_{F\supset F_0}\overline{V}_F^W\neq\varnothing$. 取

$$[u,g]\in\bigcap_{F\supset F_0}\overline{V}_F^W. \tag{3·28}$$

下证此 u 即合要求. 首先,对任何 $F\supset F_0$,存在$[u_n,Pu_n]\in V_F$ $(n=1,2,\cdots)$,使 $u_n\rightharpoonup u$, $Pu_n\rightharpoonup g$. 因 $u_n\in C\cap B(\theta,r)$, $C\cap B(\theta,r)$是凸闭集,从而是弱闭的(见[40]422 页定理 13),因此 $u\in C\cap B(\theta,r)$. 我们证明,必存在$[x_0,f_0]\in G(T)$, $x_0\in C$(即

$[x_0, f_0] \in G(T|_C)$),使

$$(g, x_0) + (f_0, x_0 - u) \leqslant (g, u). \qquad (3\cdot29)$$

事实上,若不然,则

$$(-g-f, u-x) > 0, \quad \forall [x, f] \in G(T|_C). \quad (3\cdot30)$$

注意到 $G(T|_C)$已假定是 $C \times E^*$ 中极大单调集合,并且$[u, -g] \in C \times E^*$,即知$[u, -g] \in G(T|_C)$. 再在(3·30)式中取 $x = u, f = -g$,得$(-g+g, u-u) > 0$. 此式显然不能成立. 故必存在$[x_0, f_0] G(T)$, $x_0 \in C$,使(3·29)式成立.

现在证明(3·22)式成立. 任给$[x_1, f_1] \in G(T)$, $x_1 \in C$. 我们需证

$$(f_1 + Pu, x_1 - u) \geqslant 0. \qquad (3\cdot31)$$

将 x_1 与 x_0 添加入 F_0 所张成的子空间记为 F_1. 显然 F_1 是有限维的,且 $F_0 \subset F_1$, $x_0 \in C \cap F_1$, $x_1 \in C \cap F_1$. 由(3·28)式知$[u, g] \in \overline{V}_{F_1}^W$,从而存在$[u_n^{(1)}, Pu_n^{(1)}] \in V_{F_1}$,使 $u_n^{(1)} \rightharpoonup u$, $Pu_n^{(1)} \rightharpoonup g$. 于是,$u_n^{(1)} \in C \cap B(\theta, r)$,

$$(f + Pu_n^{(1)}, x - u_n^{(1)}) \geqslant 0, \ \forall [x, f] \in G(T), \ x \in C \cap F_1; \quad (3\cdot32)$$

特别有

$$(f_0 + Pu_n^{(1)}, x - u_n^{(1)}) \geqslant 0, \quad n = 1, 2, 3, \cdots. \qquad (3\cdot33)$$

亦即

$$(Pu_n^{(1)}, u_n^{(1)}) \leqslant (f_0, x_0 - u_n^{(1)}) + (Pu_n^{(1)}, x_0), \quad n = 1, 2, 3, \cdots$$

令 $n \to \infty$ 两端取上极限,并注意到(3·29)式,得

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} (Pu_n^{(1)}, u_n^{(1)}) \leqslant (f_0, x_0 - u) + (g, x_0) \leqslant (g, u),$$

从而

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} (Pu_n^{(1)}, u_n^{(1)} - u) \leqslant 0. \qquad (3\cdot34)$$

由 P 的单调性知$(Pu, u_n^{(1)} - u) \leqslant (Pu_n^{(1)}, u_n^{(1)} - u)$,故由

(3·34)式得

$$\lim_{n\to\infty}(Pu_n^{(1)}, u_n^{(1)}-u)=0. \tag{3·35}$$

令 $z_t=(1-t)u+tx_1, 0<t<1$. 因 $u, x_1\in C$, C 凸, 故 $z_1\in C$; 由 P 的单调性知

$$(Pu_n^{(1)}-Pz_t, u_n^{(1)}-z_t)\geqslant 0,$$

即

$$t(Pu_n^{(1)}, u-x_1)\geqslant(Pz_t, u_n^{(1)}-u+t(u-x_1)) \\ -(Pu_n^{(1)}, u_n^{(1)}-u),$$

两端令 $n\to\infty$ 取极限(注意到(3·35)式), 然后约去 t, 得

$$(g, u-x_1)\geqslant(Pz_t, u-x_1), \quad \forall\, 0<t<1,$$

在此式中再令 $t\to+0$ 取极限, 并注意到 P 的次连续性, 得

$$(g, u-x_1)\geqslant(Pu, u-x_1). \tag{3·36}$$

另一方面, 根据(3·32)式知

$$(f_1+Pu_n^{(1)}, x_1-u_n^{(1)})\geqslant 0,$$

即

$$(f_1, x_1-u_n^{(1)})\geqslant(Pu_n^{(1)}, u_n^{(1)}-u)+(Pu_n^{(1)}, u-x_1),$$

两端令 $n\to\infty$ 取极限, 并注意到(3·35)式及(3·36)式, 得

$$(f_1, x_1-u)\geqslant(g, u-x_1)\geqslant(Pu, u-x_1),$$

故

$$(f_1+Pu, x_1-u)\geqslant 0.$$

即(3·31)式成立. 证完.

定理 3.1 设 E 自反, 多值映象 $T: E\to 2^{E^*}$ 极大单调, 且 $\theta\in D(T)$. 又设映象 $P: E\to E^*$ 是单调的, 半连续的、有界的, 并且是强制的. 那末, 多值映象 $T+P$ 必满射, 即 $R(T+P)=E^*$.

证 由定理 1.2 的系知 P 是次连续的．任给 $h\in E^*$，则 P 关于 h 是强制的．利用引理 3.8(取那里的 $C=E$)知，存在 $u\in E$，使

$$(f+Pu-h,x-u)\geqslant 0,\quad \forall [x,f]\in G(T).$$

再根据 T 的极大单调性，得知$[u,h-Pu]\in G(T)$，故 $u\in D(T)$，$h-Pu\in Tu$，从而 $h\in(T+P)u$；再根据 $h\in E^*$ 的任意性，即知 $R(T+P)=E^*$，故 $T+P$ 满射．证完．

例 3.1 考察抽象 Hammerstein 方程

$$(I+KF)x=y. \tag{3·37}$$

设 E 是自反的，映象 $K:E^*\to E$ 是线性的、单调的，映象 $F:E\to E^*$ 是单调的、半连续的、有界的，并且对任何给定的 $x_0\in E$，映象 $F_1x=F(x+x_0)$（显然，$F_1:E\to E^*$）是强制的．那末，对任何 $y\in E$，方程(3·37)在 E 中有解．

证 方程(3·37)即

$$KFx=y-x,$$

亦即 $Fx\in K^{-1}(y-x)$，也就是

$$\theta\in Fx-K^{-1}(y-x). \tag{3·38}$$

作代换 $z=x-y$(注意，$y\in E$ 是给定的)，则方程(3·38)变为

$$\theta\in(F_1+T)z, \tag{3·39}$$

其中 $F_1z=F(z+y)$，$Tz=-K^{-1}(-z)$．显然，$F_1:E\to E^*$ 是单调的、半连续的，有界的，并由假定知 F_1 还是强制的．根据定理 1.1 知，K 在 E^* 中的每一点都局部有界，注意到 K 是线性的，知 K 有界，从而连续．再由引理 3.1 知，K 是极大单调的，从而 $K^{-1}:E\to 2^{E^*}$ 是极大单调的．注意到 K 是线性的，易知

$$Tz = -K^{-1}(-z) = K^{-1}z,$$

故 $T:E\to 2^{E^*}$ 是极大单调的．另外，显然 $\theta\in D(T)$（因 $K\theta=\theta$）．于是根据定理 3.1 知 F_1+T 满射，从而方程(3·39)在 E 中有解．证完．

特别地，考察 Hammerstein 积分方程

$$u(x)+\int_G k(x,y)u^{p-1}(y)\mathrm{d}y = v(x), \qquad (3\cdot 40)$$

其中 G 是 R^N 中可测集，p 是正的偶数，设线性积分算子

$$Ku(x)=\int_G k(x,y)u(y)\mathrm{d}y$$

映 $L_q(G)$ 入 $L_p(G)\left(q=\frac{p}{p-1}\right)$，并且是非负的，即内积

$$(Ku,u)=\int_G\int_G K(x,y)u(x)u(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\geqslant 0,$$

$$\forall\, u(x)\in L_q(G).$$

我们证明：对任何 $v(x)\in L_p(G)$，方程(3·40)必有解 $u(x)\in L_p(G)$．方程(3·40)可写成(3·37)的形式：

$$(I+KF)u=v, \qquad (3\cdot 41)$$

其中 $Fu(x)=u^{p-1}(x)$．根据第一章定理 1.1～定理 1.3 知，Немыцкий 算子 F 映 $E=L_p(G)$ 入 $E^*=L_q(G)$，而且是连续的，有界的．由于 $p-1$ 是正的奇数，故对任何实数 a,b，必有

$$(a^{p-1}-b^{p-1})(a-b)\geqslant 0,$$

因此

$$(Fu-Fv,u-v)=\int_G[u^{p-1}(x)-v^{p-1}(x)]\cdot[u(x)-v(x)]\mathrm{d}x\geqslant 0,\quad \forall\, u(x),v(x)\in L_p(G),$$

故 F 是单调算子．下证，对任何 $u_0(x)\in L_p(G)$，算子 $F_1u(x)$

$= F(u(x)+u_0(x)) = [u(x)+u_0(x)]^{p-1}$是强制的．事实上，

$$\frac{(F_1 u, u)}{\|u\|_p} = \frac{((u+u_0)^{p-1}, u)}{\|u\|_p}$$

$$= \frac{((u+u_0)^{p-1}, u+u_0)}{\|u\|_p} - \frac{((u+u_0)^{p-1}, u_0)}{\|u\|_p}$$

$$\geqslant \frac{\|u+u_0\|_p^p}{\|u\|_p} - \frac{\|(u+u_0)^{p-1}\|_q \cdot \|u_0\|_p}{\|u\|_p}$$

$$= \frac{\|u+u_0\|_p^p}{\|u\|_p} - \frac{\|u+u_0\|_p^{p-1} \cdot \|u_0\|_p}{\|u\|_p}$$

$$\geqslant \|u+u_0\|_p^{p-1} \cdot \frac{\|u\|_p - 2\|u_0\|_p}{\|u\|_p} \to +\infty,$$

当$\|u\|_p \to +\infty$时．

故 F_1 是强制的．又由假定易知，映 $L_q(G)$入 $L_p(G)$的线性算子 K 是单调的．于是，根据上述关于抽象 Hammerstein 方程的结论知，对任何 $v \in L_p(G)$，方程(3·41)都有解 $u \in L_p(G)$．

利用定理 3.1，可证下面的有关多值映象满射性的主要定理．

定理 3.2(Browder)　设 E 自反．设多值映射 $T: E \to 2^{E^*}$ 是极大单调的，并且是强制的，那末 T 必满射．

证　由于将 E 的范数与 E^* 的范数换成等价范数时，并不影响 T 的极大单调性与强制性，因此，根据引理 3.3，可假定 E 和 E^* 都是严格凸的．另外，我们只需证明 $\theta \in R(T)$即可．这是因为，对于任何 $h \in E^*$，可考虑 $T_1 x = Tx - h$，这时 $T_1: E \to 2^{E^*}$ 也是极大单调的，而且是强制的，并且 $h \in R(T)$相当于 $\theta \in R(T_1)$．

取 $x_0 \in D(T)$，并考察多值映象 $T_0 x = T(x+x_0)$．显然，

$T_0 : E \to 2^{E^*}$ 也是极大单调的，并且 $\theta \in D(T_0)$. 取 $\varepsilon_n > 0$, $\varepsilon_n \to 0$. 根据引理 3.5 知，正规对偶映象 $J : E \to E^*$ 是严格单调的、次连续的，并且显然是有界的(因为 $\|Jx\| = \|x\|$, $\forall x \in E$)和强制的(因为 $(Jx, x) = \|x\|^2$, $\forall x \in E$). 利用定理 3.1 知，$T_0 + \varepsilon_n J$ 满射，从而存在 $u_n \in D(T_0)$，使 $\theta \in (T_0 + \varepsilon_n J) u_n$ ($n = 1, 2, \cdots$)，即存在 $f_n \in T_0 u_n = T(u_n + x_0)$，使

$$f_n + \varepsilon_n J u_n = \theta \quad (n = 1, 2, 3 \cdots). \tag{3·42}$$

于是

$$\begin{aligned} 0 &= (f_n, u_n + x_0) + \varepsilon_n [(Ju_n, u_n) + (Ju_n, x_0)] \\ &\geqslant (f_n, u_n + x_0) + \varepsilon_n (\|u_n\|^2 - \|Ju_n\| \cdot \|x_0\|) \\ &= (f_n, u_n + x_0) + \varepsilon_n \|u_n\| (\|u_n\| - \|x_0\|), \\ & \qquad n = 1, 2, 3, \cdots \end{aligned} \tag{3·43}$$

由此易知 $\{\|u_n\|\}$ 必有界. 事实上，若存在子列 $\{u_{n_i}\}$，使 $\|u_{n_i}\| \to +\infty$，则 $\|u_{n_i} + x_0\| \geqslant \|u_{n_i}\| - \|x_0\| \to +\infty$，从而，由 T 的强制性知，当 i 充分大时必有 $(f_{n_i}, u_{n_i} + x_0) > 0$，故 i 充分大时，必有

$$(f_{n_i}, u_{n_i} + x_0) + \varepsilon_{n_i} \|u_{n_i}\| (\|u_{n_i}\| - \|x_0\|) > 0,$$

此与(3·43)式矛盾. 于是 $\{\|u_n\|\}$ 有界. 由 E 的自反性知，存在 $\{u_n\}$ 的子列 $\{u_{n_k}\}$，使 $u_{n_k} \rightharpoonup u \in E$.

由 T 的单调性，有

$$(g - f_{n_k}, y - u_{n_k} - x_0) \geqslant 0, \quad \forall [y, g] \in G(T),$$
$$k = 1, 2, \cdots, \tag{3·44}$$

另外，根据 $\|Ju_n\| = \|u_n\|$ 的有界性，由(3·42)式知，$\|f_n\| \to 0$. 于是，在(3·44)式中令 $k \to \infty$ 取极限，得

$$(g, y-u-x_0) \geqslant 0, \quad \forall [y, g] \in G(T).$$

再根据 T 的极大单调性，得知$[u+x_0, \theta] \in G(T)$，即 $v=u+x_0 \in D(T)$且 $\theta \in Tv$．故 $\theta \in R(T)$．证完．

注 4 定理 2.2 可以从定理 3.2 直接推出，这是因为，根据引理 3.1 知，半连续单调的映象 $T: E \to E^*$ 必是极大单调的．

例 3.2 设 $f: R^1 \to R^1$ 是增函数(不要求连续)．又设

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

按 $Tx = [f(x-0), f(x+0)]$ 定义的多值映象 $T: R^1 \to 2^{R^1}$，显然是极大单调的，而且是强制的．从图形上看，它显然是满射的，即 $R(T) = R^1$．(图 4-3·1)．

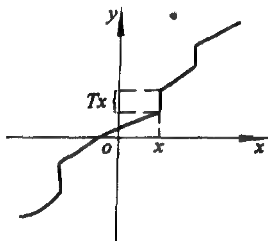


图 4-3·1

还可以给出多值极大单调映象满射的充分必要条件．

定理 3.3 设 E 自反，多值映象 $T: E \to 2^{E^*}$ 是极大单调的．则 T 满射的充分必要条件是 T^{-1}在 E^* 的每一点处都是局部有界的．

证 必要性：设 T 满射，则 $D(T^{-1}) = R(T) = E^*$，从而 $\text{Int}D(T^{-1}) = E^*$．注意到 T^{-1}的单调性，利用定理 1·1，即知 T^{-1}在 E^* 中每一点处都是局部有界的．

充分性：设 T^{-1}在 E^* 的每一点处都局部有界．要证 $R(T) = E^*$．由于 $R(T) \neq \varnothing$，我们只需证明 $R(T)$是 E^* 中既开又闭的集即可．

先证 $R(T)$是 E^* 中闭集．设 $f_n \in R(T)$，$f_n \to f \in E^*$．于

是，存在 $x_n \in D(T)$，使 $f_n \in Tx_n (n=1,2,3,\cdots)$．由假定知，$T^{-1}$在 f 局部有界．故$\{x_n\}$是E 中有界集，从而，根据 E 的自反性，存在子列 $x_{n_i} \rightharpoonup x \in E$．由 T 的单调性知

$$(f_{n_i} - g, x_{n_i} - y) \geqslant 0, \quad \forall [y, g] \in G(T), \quad i = 1, 2, 3, \cdots$$

在此式中令 $i \to \infty$取极限，得

$$(f - g, x - y) \geqslant 0, \quad \forall [y, g] \in G(T);$$

于是，根据 T 的极大单调性，知 $x \in D(T)$，且 $f \in Tx$．故 $f \in R(T)$，即 $R(T)$是 E^* 中闭集．

再证 $R(T)$是 E^* 中开集．任给 $f_0 \in R(T)$，于是存在 $x_0 \in D(T)$，使 $f_0 \in Tx_0$．由假定，T^{-1}在点 f_0 处局部有界，故存在 $r>0$，使

$$T^{-1}(U(f_0, r) \cap D(T^{-1})) = \{x \mid x \in D(T), \text{存在 } f \in Tx, \text{使 } \|f - f_0\| < r\}$$

是 E 中有界集，这里 r 邻域 $U(f_0, r) = \{f \in E^* \mid \|f - f_0\| < r\}$．下证 $U(f_0, \frac{r}{2}) \subset R(T)$．事实上，任给 $g \in U(f_0, \frac{r}{2})$，有 $\|g - f_0\| < \frac{r}{2}$．取 $\varepsilon_n > 0$，$\varepsilon_n \to 0$，利用定理 3.1 知 $T_0 + \varepsilon_n J$ 满射，这里 $T_0 x = T(x + x_0)$；于是，存在 $u_n \in E$，使得 $u_n + x_0 \in D(T)$且 $g \in T(u_0 + x_0) + \varepsilon_n J u_n$，从而，存在 $g_n \in T(u_n + x_0)$，使

$$g_n + \varepsilon_n J u_n = g \quad (n = 1, 2, 3, \cdots). \tag{3·45}$$

由 T 的单调性，知$(g_n - f_0, u_n + x_0 - x_0) \geqslant 0$，即(注意(3·45)式)

$$(g - f_0, u_n) \geqslant \varepsilon_n (J u_n, u_n) = \varepsilon_n \|u_n\|^2,$$

由此知

$$\varepsilon_n \|u_n\| \leqslant \|g - f_0\| < \frac{r}{2}, \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \tag{3·46}$$

由(3·45)式与(3·46)式，又知

$$\|g_n - g\| = \varepsilon_n \|Ju_n\| = \varepsilon_n \|u_n\| < \frac{r}{2}$$

$$(n = 1, 2, 3, \cdots) \qquad (3 \cdot 47)$$

根据(3·47)式与(3·46)式，得

$$\|g_n - f_0\| \leqslant \|g_n - g\| + \|g - f_0\| < r,$$

从而 $u_n + x_0 \in T^{-1}(U(f_0, r) \cap D(T^{-1}))$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$.

根据上述，$\{u_n + x_0\}$是 E 中有界集，从而$\{\|u_n\|\}$有界．根据(3·47)式知，$\|g_n - g\| \to 0$. 由于 $g_n \in R(T)$，而前面已证 $R(T)$是 E^* 中闭集，故 $g \in R(T)$．于是，$U(f_0, \frac{r}{2}) \subset R(T)$获证，即 $R(T)$是 E^* 中开集．证完．

第五章　变分方法

变分方法基本思想是：把求非线性算子方程的解的问题归结为求某泛函的临界点（特别，极值点）的问题．变分方法在积分方程、偏微分方程以及许多数学物理问题中具有广泛的应用．

§1　泛函的极值与梯度

定义 1.1　设 E 是一个实 Banach 空间，Ω 是 E 中开集，$f:\Omega\to R^1$ 是 Ω 上的一个泛函．如果在 Ω 中每一点，f 都具有有界线性的 Gâteaux 微分，记 $F(x)=f'(x)$，$\forall x\in\Omega$，则称算子 $F:\Omega\to E^*$ 为泛函 f 的**梯度**，记为 $F(x)=\mathrm{grad}f(x)$，或简记为 $F=\mathrm{grad}f$．这时又称泛函 f 为算子 F 的**位势**．

于是，梯度算子 F 满足

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[f(x+th)-f(x)]=F(x)h,\quad \forall h\in E.$$

例 1.1　考虑实 Hilbert 空间 H 上的泛函 $f(x)=\|x\|$ 与 $g(x)=(x,x)=\|x\|^2$．试求 $\mathrm{grad}f(x)$ 与 $\mathrm{grad}g(x)$．

易知

$$f(x+th)-f(x)=\|x+th\|-\|x\|=\frac{2t(h,x)+t^2\|h\|^2}{\|x+th\|+\|x\|},$$

由此可知

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[f(x+th)-f(x)]=\frac{(h,x)}{\|x\|},\quad \forall x\neq\theta,$$

故有

$$\operatorname{grad}\|x\|=\frac{x}{\|x\|},\quad \forall x\neq\theta,\quad x\in H.$$

同样,有

$$g(x+th)-g(x)=\|x+th\|^2-\|x\|^2=2t(h,x)+t^2\|h\|^2,$$

故有

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[g(x+th)-g(x)]=2(h,x),$$

从而

$$\operatorname{grad}(x,x)=2x,\quad \forall x\in H.$$

例 1.2 考察 Немыцкий 算子

$$\mathbf{f}\varphi(x)=f(x,\varphi(x)),\tag{1·1}$$

其中 $f(x,u)(x\in G,-\infty<u<+\infty)$满足 Caratheodory 条件 $(G\subset R^N,0<\operatorname{mes}G\leqslant+\infty)$,且满足

$$|f(x,u)|\leqslant a(x)+b|u|^{p-1},$$

其中 $p>1,a(x)\in L_q(G),q=\dfrac{p}{p-1}$. 于是,根据第一章定理 1.3 知 $\mathbf{f}:L_p(G)\to L_q(G)$连续、有界. 我们证明 $\mathbf{f}=\operatorname{grad}\Phi$,即

$$\mathbf{f}\varphi=\operatorname{grad}\Phi(\varphi),\quad \forall\varphi\in L_p(G).\tag{1·2}$$

其中

$$\Phi(\varphi)=\int_G \mathrm{d}x\int_0^{\varphi(x)}f(x,u)\mathrm{d}u.\tag{1·3}$$

先证 $\Phi(\varphi)$是定义在整个 $L_p(G)$上的,事实上,当 $\varphi\in L_p(G)$时,由积分学中值定理知

$$\int_0^{\varphi(x)}f(x,u)\mathrm{d}u=f(x,\theta(x)\varphi(x))\varphi(x),\tag{1·4}$$

其中 $0\leqslant\theta(x)\leqslant 1$，若将 $\theta(x)$ 取为满足(1·4)式中的最小者，则可证明(仿第一章定理 1·3 函数 $\varphi_k(x)$ 可测性的证明)$\theta(x)$ 是 G 上可测函数．于是 $\theta(x)\varphi(x)\in L_p(G)$，从而 $f(x,\theta(x)\varphi(x))\in L_q(G)$，因此 $f(x,\theta(x)\varphi(x))\varphi(x)\in L(G)$．于是，由(1·4)式与(1·3)式知 $\Phi(\varphi)$ 存在，即 $\Phi: L_p(G)\to R^1$．

再证(1·2)式．事实上，对 $h(x)\in L_p(G)$，有

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{t}[\Phi(\varphi+th)-\Phi(\varphi)] &= \frac{1}{t}\int_G \mathrm{d}x \int_{\varphi(x)}^{\varphi(x)+th(x)} f(x,u)\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{t}\int_G f(x,\varphi(x)+t\theta_1(x)h(x))th(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_G [f(x,\varphi(x)+t\theta_1(x)h(x))-f(x,\varphi(x))]h(x)\mathrm{d}x \\
&\quad + \int_G f(x,\varphi(x))h(x)\mathrm{d}x,
\end{aligned}
$$

其中 $0\leqslant\theta_1(x)\leqslant 1$ 是可测函数(如上述，取最小的即可)．注意到算子 $\mathbf{f}$ 的连续性，知

$$
\begin{gathered}
\left|\frac{1}{t}[\Phi(\varphi+th)-\Phi(\varphi)]-\int_G(\mathbf{f}\varphi)h\,\mathrm{d}x\right| \\
\leqslant \|\mathbf{f}(\varphi+t\theta_1 h)-\mathbf{f}\varphi\|_{L_q}\cdot\|h\|_{L_p}\to 0, \\
\text{当 } t\to 0 \text{ 时}
\end{gathered}
$$

故(1·2)式获证．

定理 1.1 设 Ω 是实 Banach 空间 E 中的凸开集，$F:\Omega\to E^*$ 具有有界线性的 Gâteaux 微分，且对于任何固定的 $h,k\in E$，泛函 $(F'(x)h)k$ 关于 x 连续(在 Ω 中)．那末 $F(x)$ 是梯度算子的充分必要条件是：泛函 $(F'(x)h)k$ 关于 h,k 是对称的，即

$$
(F'(x)h)k=(F'(x)k)h,\quad \forall x\in\Omega,\quad h,k\in E; \tag{1·5}
$$

并且当此条件满足时，有

$$F(x)=\operatorname{grad}f(x),\quad \forall\, x\in\Omega, \tag{1·6}$$

其中

$$f(x)=c+\int_0^1 F(x_0+t(x-x_0))(x-x_0)\mathrm{d}t, \tag{1·7}$$

这里 x_0 可取为 Ω 中任一点, c 可为任一常数 .

证 必要性:设 $f(x)$ 是梯度算子, 即存在 $f:\Omega\to R^1$, 使 $\operatorname{grad}f(x)=F(x)$, $\forall\, x\in\Omega$. 让 $x\in\Omega$, $h,k\in E$ 固定 . 考察二元函数 $\Phi(s,t)=f(x+sh+sk)$. 当 (s,t) 在 $(0,0)$ 的某邻域 N_0 中变化时, 必有 $x+sh+tk\in\Omega$, 从而 $\Phi(s,t)$ 有定义 . 显然, 当 $(s,t)\in N_0$ 时 $\Phi_s'(s,t)=F(x+sh+tk)h$, 故

$$\Phi_{st}''(s,t)=(F'(x+sh+tk)k)h; \tag{1·8}$$

同理

$$\Phi_{ts}''(s,t)=(F'(x+sh+tk)h)k. \tag{1·9}$$

由假定知(1·8)式右端与(1·9)式右端都是 (s,t) 在 N_0 中的连续函数, 从而根据数学分析中混合偏导数相等的定理, 知 $\Phi_{ts}''(0,0)=\Phi_{st}''(0,0)$. 于是, 根据(1·8)式与(1·9)式即知(1·5)式成立 .

充分性:设(1·5)式满足 . 考察泛函(1·7)式, 其中 $x_0\in\Omega$, c 是常数 . 由于 Ω 是凸开集, 故当 $x\in\Omega$ 时, 对 $0\leqslant t\leqslant 1$, 有 $x_0+t(x-x_0)=tx+(1-t)x_0\in\Omega$, 且可知 $F(x_0+t(x-x_0))$ 关于 t 连续(因为已假定 $F(x)$ 是 Gâteaux 可微的), 故 $f(x)$ 存在 . 下证(1·6)式成立 . 设 $x\in\Omega$, 存在 $r>0$, 使当 $\|k\|<r$ 时恒有 $x+k\in\Omega$, $x_0+k\in\Omega$. 设 $\|k\|<r$, 有

$$\begin{aligned}f(x+k)-f(x)=\int_0^1 [&F(x_0+t(x-x_0+k))(x-x_0+k)\\ &-F(x_0+t(x-x_0))(x-x_0)]\mathrm{d}t\end{aligned}$$

$$= \int_0^1 F(x_0 + t(x - x_0) + tk)k\mathrm{d}t + \int_0^1 [F(x_0 + t(x - x_0) + tk)$$

$$- F(x_0 + t(x - x_0))](x - x_0)\mathrm{d}t$$

$$= I_1 + I_2, \tag{1·10}$$

利用第一章定理 3.2(ⅰ)以及条件(1·5),并交换积分次序,得

$$I_2 = \int_0^1 \mathrm{d}t \int_0^t \frac{\partial}{\partial s}[F(x_0 + t(x - x_0) + sk)(x - x_0)]\mathrm{d}s$$

$$= \int_0^1 \mathrm{d}t \int_0^t [F'(x_0 + t(x - x_0) + sk)k](x - x_0)\mathrm{d}s$$

$$= \int_0^1 \mathrm{d}t \int_0^t [F'(x_0 + t(x - x_0) + sk)(x - x_0)]k\mathrm{d}s$$

$$= \int_0^1 \mathrm{d}s \int_s^1 [F'(x_0 + t(x - x_0) + sk)(x - x_0)]k\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^1 \mathrm{d}s \int_s^1 \frac{\partial}{\partial t}[F(x_0 + t(x - x_0) + sk)k]\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^1 [F(x + sk)k - F(x_0 + s(x - x_0) + sk)k]\mathrm{d}s,$$

代入(1·10)式,得

$$f(x + k) - f(x) = \int_0^1 F(x + sk)k\mathrm{d}s. \tag{1·11}$$

任给 $h \in E$,在(1·11)式中令 $k = th$, $|t| < \frac{r}{\|h\|}$,得(利用积分学中值定理公式)

$$\frac{1}{t}[f(x + th) - f(x)] = \int_0^1 F(x + sth)h\mathrm{d}s$$

$$= F(x + \theta th)h,$$

其中 $0 \leqslant \theta \leqslant 1$. 于是,注意到 $F(x + sh)$ 关于 s 连续(因为 $F(x)$ 是 Gâteaux 可微的),知

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t}[f(x + th) - f(x)] = F(x)h,$$

故(1·6)式获得,证完．

例 1.3 设 H 是实 Hilbert 空间，$A:H\to H$ 是线性有界算子，证明：A 是梯度算子的充分必要条件是 A 自共轭，即 $A=A^*$；并且在此时

$$Ax=\operatorname{grad}f(x),\quad f(x)=\frac{1}{2}(Ax,x),\quad \forall\, x\in H.$$

事实上，取 $\Omega=E=H$．由于 $A'(x)=A,\ \ x\in H$，故这时条件(1·5)为

$$(Ah,k)=(h,Ak),\quad h,k\in H,$$

即 $A=A^*$．在(1·7)式中取 $c=0,x_0=\theta$，得

$$f(x)=\int_0^1(A(tx),x)\mathrm{d}t=(Ax,x)\int_0^1 t\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}(Ax,x).$$

于是，由定理 1.1 获证．

顺便指出，例 1.1 中的结论

$$\operatorname{grad}(x,x)=2x$$

显然是这里 $A=I$(恒等算子)时的特例．

定义 1.2 设 E 是实 Banach 空间，$D\subset E$，$f:D\to R^1$ 是 D 上的泛函，$x_0\in D$．

(ⅰ)如果对于任何 $x_n\in D$，$x_n\xrightarrow{\text{弱}}x_0$，都有 $f(x_n)\to f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在 x_0 处**弱连续**；

(ⅱ)如果对于任何 $x_n\in D$，$x_n\xrightarrow{\text{弱}}x_0$，都有

$$f(x_0)\leqslant\varliminf_{n\to\infty}f(x_n),\tag{1·12}$$

则称 $f(x)$ 在 x_0 处**弱下半连续**；

(ⅲ)如果对于任何 $x_n\in D$，$x_n\xrightarrow{\text{弱}}x_0$，都有

$$f(x_0)\geqslant\varlimsup_{t\to 0}f(x_n),\tag{1·13}$$

则称 $f(x)$在 x_0 处**弱上半连续**;

(iv)若 $f(x)$在 D 中每一点都弱连续(对应地,弱下半连续、弱上半连续),则称 $f(x)$在 D 上弱连续(对应地,弱下半连续、弱上半连续).

显然,$f(x)$在 x_0 处弱连续,当且仅当 $f(x)$在 x_0 处弱下半连续且弱上半连续.

例 1.4 考察实 Banach 空间 E 上的泛函 $f(x)=\|x\|$. 下证 $f(x)$在 E 上弱下半连续,即若 $x_n\xrightarrow{弱}x_0$,则必有

$$\|x_0\|\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\|x_n\|. \tag{1·14}$$

用反证法. 假定(1·14)式不成立,即

$$\|x_0\|>\varliminf_{n\to\infty}\|x_n\|.$$

取 c,使

$$\|x_0\|>c>\varliminf_{n\to\infty}\|x_n\| \tag{1·15}$$

于是,存在$\{x_n\}$的子列$\{x_{n_k}\}$,使

$$c>\|x_{n_k}\| \quad (k=1,2,\cdots).$$

由 Banach - Hahn 定理,存在 $f_0\in E^*$,使$\|f_0\|=1$, $f_0(x_0)=\|x_0\|$. 由于

$$f_0(x_{n_k})\leqslant\|f_0\|\cdot\|x_{n_k}\|=\|x_{n_k}\|<c, \quad (k=1,2,\cdots),$$

故注意到$x_{n_k}\xrightarrow{弱}x_0$,有

$$\|x_0\|=f_0(x_0)=\lim_{k\to\infty}f_0(x_{n_k})\leqslant c,$$

此与(1·15)式矛盾. 因此,(1·14)式成立.

例 1.5 设 H 是实 Hilbert 空间,$A:H\to H$ 是有界线性正自共轭算子. 根据例 1.3 的结论知

$$Ax=\operatorname{grad}f(x) \quad \forall\, x\in H,$$

其中

$$f(x)=\frac{1}{2}(Ax,x). \qquad (1\cdot16)$$

下证：泛函(1·16)式在 H 上是弱下半连续的．事实上，

$$f(x)=\frac{1}{2}(Ax,x)=\frac{1}{2}(A^{\frac{1}{2}}x,A^{\frac{1}{2}}x)=\frac{1}{2}\|A^{\frac{1}{2}}x\|^2, \qquad (1\cdot17)$$

其中 $A^{\frac{1}{2}}$ 表示 A 的正平方根算子．设 $x_n \xrightarrow{弱} x_0$，则 $A^{\frac{1}{2}}x_n \xrightarrow{弱} A^{\frac{1}{2}}x_0$．于是根据例 1.4 的结论知

$$\|A^{\frac{1}{2}}x_0\|\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\|A^{\frac{1}{2}}x_n\|,$$

从而

$$f(x_0)=\frac{1}{2}\|A^{\frac{1}{2}}x_0\|^2\leqslant\frac{1}{2}(\varliminf_{n\to\infty}\|A^{\frac{1}{2}}x_n\|)\cdot(\varliminf_{n\to\infty}\|A^{\frac{1}{2}}x_n\|)$$

$$\leqslant\varliminf_{n\to\infty}(\|A^{\frac{1}{2}}x_n\|\cdot\|A^{\frac{1}{2}}x_n\|)=\varliminf_{n\to\infty}f(x_n),$$

故 $f(x)$的弱下半连续性获证．

特别，令 $A=I$，即知：泛函$(x,x)=\|x\|^2$ 在 H 上是弱下半连续的．

定理 1.2 设 D 是实 Banach 空间 E 中某凸集，$f(x)$是 D 上泛函，且 $\mathrm{grad}f(x)=F(x)$， $\forall x\in D$．如果 $F:\Omega\to E^*$ 是紧算子，则 $f(x)$必在 D 上是弱连续的．

证 设 $x_n,x_0\in D$，$x_n\xrightarrow{弱}x_0$．要证 $f(x_n)\to f(x_0)$．若不然，存在 $\varepsilon_0>0$ 及$\{x_n\}$的子列$\{x_{n_k}\}$，使

$$\left|f(x_{n_k})-f(x_0)\right|\geqslant\varepsilon_0,\ (k=1,2,\cdots). \qquad (1\cdot18)$$

利用中值公式(第一章定理 3.11，注意 D 是凸集)，知存在 $\tau_k\in(0,1)$，使

$$f(x_{n_k})-f(x_0)=F(x_0+\tau_k(x_{n_k}-x_0))(x_{n_k}-x_0),$$

$$(k=1,2,\cdots). \tag{1·19}$$

元素 $z_k = x_0 + \tau_k(x_{n_k} - x_0) \in D$，而且序列 $\{z_k\}$ 是有界的(因为 $\{x_n\}$ 有界)，故根据 F 的紧性，知存在 $\varphi_0 \in E^*$ 及 $\{z_k\}$ 的子列(为不增加符号的复杂性，就设为 $\{z_k\}$ 本身)，使

$$\lim_{k\to\infty}\| F(z_k) - \varphi_0 \| = 0.$$

于是

$$\begin{aligned}&\left| F(z_k)(x_{n_k} - x_0) \right| = \left| (F(z_k) - \varphi_0)(x_{n_k} - x_0) + \varphi_0(x_{n_k} - x_0) \right| \\ &\leqslant 2M \| F(z_k) - \varphi_k \| + \left| \varphi_0(x_{nk}) - \varphi_0(x_0) \right| \to 0,\end{aligned}$$

其中 $M = \sup_n \| x_n \| < +\infty$，由此，再注意到(1·19)式，得到

$$f(x_{n_k}) \to f(x_0), \quad (k\to\infty),$$

此与(1·18)式矛盾．证完．

定理 1.3 设 $f(x)$ 是实 Banach 空间 E 上的泛函，且 $\mathrm{grad} f(x) = F(x)$，$\forall x \in E$．那末

(ⅰ) $F: E \to E^*$ 是单调算子的充要条件是 $f(x)$ 是凸泛函，即

$$f(tx + (1-t)y) \leqslant tf(x) + (1-t)f(y),$$
$$\forall x, y \in E \quad 0 \leqslant t \leqslant 1;$$

(ⅱ)若 $F: E \to E^*$ 是单调算子，则 $f(x)$ 在 E 上必是弱下半连续的．

证 (ⅰ)必要性：对 $x, y \in E$，$0 \leqslant t \leqslant 1$，我们有

$$\begin{aligned}&tf(x) + (1-t)f(y) - f(tx + (1-t)y) \\ &= -t\{f[x + (1-t)(y-x)] - f(x)\} \\ &\quad -(1-t)\{f[y + t(x-y)] - f(y)\}. \end{aligned} \tag{1·20}$$

利用中值公式，知

$$f[x + (1-t)(y-x)] - f(x)$$

$$=(1-t)(F(x+\tau(1-t)(y-x)),y-x), \qquad (1\cdot 21)$$

$$f[y+t(x-y)]-f(y)=t(F(y+\sigma t(x-y)),x-y), \qquad (1\cdot 22)$$

其中 $0<\tau<1$, $0<\sigma<1$. 令

$$x_1=x+\tau(1-t)(y-x), \quad y_1=y+\sigma t(x-y), \qquad (1\cdot 23)$$

则 $y_1-x_1=t_1(y-x)$, 其中 $t_1=1-\sigma t-\tau(1-t)>1-t-(1-t)=0$. 于是, 以(1·21)～(1·23)诸式代入(1·20)式, 并注意到 F 的单调性, 即得

$$\begin{aligned}&tf(x)+(1-t)f(y)-f(tx+(1-t)y)\\&=t(1-t)(F(y_1)-F(x_1),y-x)\\&=\frac{t(1-t)}{t_1}(F(y_1)-F(x_1),y_1-x_1)\\&\geqslant 0.\end{aligned}$$

充分性:设 $f(x)$是凸函数. 于是

$$\frac{1}{t}\{f[y+t(x-y)]-f(y)\}\leqslant f(x)-f(y),$$

$$\forall\, 0<t\leqslant 1$$

令 $t\to+0$ 取极限, 即得

$$(F(y),x-y)\leqslant f(x)-f(y). \qquad (1\cdot 24)$$

同理(交换 x,y 的位置), 有

$$(F(x),y-x)\leqslant f(y)-f(x). \qquad (1\cdot 25)$$

(1·24)式与(1·25)式相加, 即得$(F(y)-F(x),x-y)\leqslant 0$, 即

$$(F(y)-F(x),y-x)\geqslant 0,$$

故 $F(x)$是 E 上的单调算子.

(ii)设 $x_n\xrightarrow{弱}x_0$. 注意 F 的单调性, 利用中值公式, 知存在 $0<\tau_n<1$ $(n=1,2,\cdots)$, 使

$$f(x_n)=f(x_n)-f(x_0)+f(x_0)$$

$$
\begin{aligned}
&= (F(x_0 + \tau_n(x_n - x_0)), x_n - x_0) + f(x_0) \\
&= \frac{1}{\tau_n}(F(x_0 + \tau_n(x_n - x_0)) - F(x_0), \tau_n(x_n - x_0)) \\
&\quad + (F(x_0), x_n - x) + f(x_0) \\
&\geqslant (F(x_0), x_n - x_0) + f(x_0).
\end{aligned}
$$

两边取下极限,即得

$$\varliminf_{n\to\infty} f(x_n) \geqslant f(x_0).$$

$f(x)$的弱下半连续性获证．证完．

定义 1.3 设 D 是实 Banach 空间 E 中开集,泛函 $f: D \to R^1$, $x_0 \in D$.

(ⅰ)若存在 x_0 的邻域 $U(x_0, \delta) = \{x \mid \|x - x_0\| < \delta\}$,使当 $x \in U(x_0, \delta)$时,恒有

$$f(x) \geqslant f(x_0) \quad (\text{对应地}, f(x) \leqslant f(x_0)), \tag{1·26}$$

则称泛函 $f(x)$在 $x = x_0$ 达到**极小值**(对应地,**极大值**):极小值与极大值统称为**极值**．

(ⅱ)设 $\varphi: E \to E_1$(E_1 是另一实 Banach 空间),令 $M = \{x \in E \mid \varphi(x) = \theta\}$,设 $x_0 \in M$. 若存在 x_0 的邻域 $U(x_0, \delta)$,使当 $x \in U(x_0, \delta) \cap M$ 时,恒有(1·26)式成立,则称泛函 $f(x)$关于条件 $\varphi(x) = \theta$ 在 $x = x_0$ 达到**条件极小值**(对应地,**条件极大值**);条件极小值与条件极大值统称为**条件极值**．

定义 1.4 设 E 是实 Banach 空间 E 中开集,泛函 $f: D \to R^1$ 在 D 上具有有界线性的 Gâteaux 微分．若 $x_0 \in D$,使

$$\operatorname{grad} f(x_0) = f'(x_0) = \theta, \tag{1·27}$$

则称 x_0 是泛函 $f(x)$的一个**临界点**, $c = f(x_0)$称为 $f(x)$的一个**临界值**．

定理 1.4 若泛函 $f: D \to R_1$(D 是实 Banach 空间 E 中开

集)在 $x_0 \in D$ 达到极值，并且 $f(x)$ 在 x_0 处具有有界线性的 Gâteaux 微分，则必有

$$f'(x_0)=\theta. \tag{1·28}$$

证 任给 $h\in E$，考察实函数 $\varphi(t)=f(x_0+th)$. 由假定知 $\varphi(t)$ 在 $t=0$ 达到极值，又

$$\varphi'(0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+th)-f(x_0)}{t}=f'(x_0)h,$$

故由 $\varphi'(0)=0$ 知 $f'(x_0)h=0$. 由 $h\in E$ 的任意性，即得(1·28)式．证完．

注 1 由定理 1.4 知：泛函的极值点一定是它的临界点．但可举例说明相反的论断不成立，即临界点可以不是极值点．

定理 1.5(Люстерник) 设 E, E_1 是实 Banach 空间，泛函 $f:E\to R^1$ 在 E 上 Fréchet 可微，$\varphi:E\to E_1$ 是 C^1 映象．若泛函 $f(x)$ 关于条件 $\varphi(x)=\theta$ 在 $x=x_0$ 达到条件极值，并且线性算子 $\varphi'(x_0):E\to E_1$ 是满射的，那末必存在 $l\in E_1^*$，使 $f'(x_0)=l\varphi'(x_0)$，即

$$f'(x_0)x=l(\varphi'(x_0)x),\quad \forall\, x\in E. \tag{1·29}$$

证明见〔138〕或〔4〕，从略．

系 1 设 E 是实 Banach 空间，泛函 $f:E\to R^1$ 在 E 上 Fréchet 可微，$\varphi:E\to R^1$ 是 C^1 泛函．若泛函 $f(x)$ 关于条件 $\varphi(x)=0$ 在 $x=x_0$ 处达到条件极值，并且 $\varphi'(x_0)\neq\theta$，那末必有 $\mu\in R^1$ 存在，使

$$f'(x_0)=\mu\varphi'(x_0),\quad 即\ \mathrm{grad} f(x_0)=\mu\,\mathrm{grad}\varphi(x_0). \tag{1·30}$$

证 由 $\varphi'(x_0)\neq\theta$ 知存在 $z_0\in E$，使 $\varphi'(x_0)z_0=t_0\neq 0$，于是，对任何 $t\in R^1$，有 $\varphi'(x_0)(\frac{t}{t_0}z_0)=t$，故 $\varphi'(x_0):E\to R^1$ 是

满射的．于是，根据定理 1.5 即获证．

系 2 设 H 是实 Hilbert 空间，泛函 $f: H \to R^1$ 在 H 上 Fréchet 可微．若泛函 $f(x)$ 关于球面 $\|x\| = r (r>0)$ 在点 $x = x_0 (\|x\| = r)$ 达到条件极值，则必存在 $\mu \in R^1$，使

$$f'(x_0) = \mu x_0,\quad \text{即 } \operatorname{grad} f(x_0) = \mu x_0. \tag{1·31}$$

证 在系 1 中令 $\varphi(x) = (x, x) - r^2$，则 $\varphi(x) = 0$ 即球面 $\|x\| = r$．由例 1.1 的结论，知

$$\varphi'(x) = \operatorname{grad}\varphi(x) = 2x,\quad \forall x \in H,$$

故 $\varphi: H \to R^1$ 是 C^1 映象，且 $\varphi'(x_0) = 2x_0 \neq \theta$．于是，根据系 1 即获系 2 的结论．

注 2 上述系 2 是应用上常用的结论，常可利用它来讨论梯度算子 $\operatorname{grad} f(x)$ 的固有值与固有元的问题．下面给出它的一个直接证明：

令 $H_1 = \{x = \lambda x_0 \mid \lambda \in R^1\}$，则 H_1 是 H 的一个一维子空间，令 $H_2 = = H_1^{\perp}$（即 H_1 的直交补），则 H 是 H_1 与 H_2 的直交和：$H = H_1 \oplus H_2$．结论(1·31)式相当于 $f'(x_0) \in H_1$，从而只须证明 $f'(x_0) \perp H_2$ 即可，亦即要证明：对任何的 $h \in H_2$（无妨设 $\|h\| = r$），有

$$(f'(x_0), h) = 0. \tag{1·32}$$

考察

$$x = (1 + \alpha\varepsilon) x_0 + \varepsilon h, \tag{1·33}$$

要求适当取 $\alpha = \alpha(\varepsilon)$，使 $\|x\| = r$，即

$$r^2 = (1 + \alpha\varepsilon)^2 r^2 + \varepsilon^2 r^2,$$

解之，得

$$\alpha = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - \varepsilon^2}}{\varepsilon}.$$

取其中之一：

$$\alpha=\alpha(\varepsilon)=\frac{-1+\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon}=-\frac{\varepsilon}{1+\sqrt{1-\varepsilon^2}},\quad \forall\, 0<|\varepsilon|<1. \tag{1·34}$$

由于 $f(x)$在 $x=x_0$ 处 Fréchet 可微，故(由(1·34)式，当 $\varepsilon\to 0$ 时，$\alpha\to 0$)

$$f(x)-f(x_0)=(f'(x_0),\alpha\varepsilon x_0+\varepsilon h)+\omega(x_0,\alpha\varepsilon x_0+\varepsilon h),$$

其中

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\omega(x_0,\alpha\varepsilon x_0+\varepsilon h)}{\|\alpha\varepsilon x_0+\varepsilon h\|}=0,$$

故 $\omega(x_0,\alpha\varepsilon x_0+\varepsilon h)=o(\varepsilon)$，再注意到(因为 $\alpha\to 0$)

$$(f'(x_0),\alpha\varepsilon x_0)=\alpha\varepsilon(f'(x_0),x_0)=o(\varepsilon).$$

即知

$$f(x)-f(x_0)=\varepsilon(f'(x_0),h)+o(\varepsilon). \tag{1·35}$$

由于 $f(x)$关于球面$\|x\|=r$ 在点 $x=x_0$ 达到条件极值，故不论 ε 是正是负，只要 ε 充分小，$f(x)-f(x_0)$都保持定号(即或恒$\geqslant 0$，或恒$\leqslant 0$)，于是，根据(1·35)式知，必有(1·32)式成立．证完．

定理 1.6 设 D 是实 Banach 空间 E 中一个弱列紧的弱闭集，泛函 $f:D\to R^1$ 是弱下(上)半连续的；那末，f 在 D 上必有下(上)界，且存在 $x_0\in D$，使

$$f(x_0)=\inf_{x\in D}f(x)\quad \left(f(x_0)=\sup_{x\in D}f(x)\right). \tag{1·36}$$

证 就 f 是弱下半连续的情况证之．令 $c=\inf\limits_{x\in D}f(x)$ $(c\geqslant-\infty)$．于是存在 $x_n\in D$，使 $f(x_n)\to c$．因为 D 弱列紧，故存在 $\{x_n\}$的子列$x_{n_k}\xrightarrow{\text{弱}}x_0\in E$．由 D 弱闭知 $x_0\in D$．根据 f 的弱下

半连续性，知

$$c \leqslant f(x_0) \leqslant \varliminf_{n\to\infty} f(x_{n_k}) = c,$$

由此可知，c 是有限数，且 $f(x_0)=c$. 证完 .

定理 1.7 设 E 是实自反 Banach 空间，泛函 $f: E\to R^1$ 是弱下(上)半连续的，并且满足

$$\lim_{\|x\|\to\infty} f(x) = +\infty \quad \left(\lim_{\|x\|\to\infty} f(x) = -\infty\right); \qquad (1\cdot 37)$$

那末，必有 $x_0\in E$ 存在，使

$$f(x_0) = \inf_{x\in E} f(x) \quad \left(f(x_0) = \sup_{x\in E} f(x)\right). \qquad (1\cdot 38)$$

因此，若 f 还具有有界线性的 Gâteaux 微分，则必有

$$\operatorname{grad} f(x_0) = f'(x_0) = \theta. \qquad (1\cdot 39)$$

证 就 f 是弱下半连续的情况证之 . 由条件(1·37)式知，存在 $R>0$，使当 $\|x\|>R$ 时，恒有 $f(x)>f(\theta)$. 因 E 自反，故闭球 $S(\theta,R)=\{x\in E \mid \|x\|\leqslant R\}$ 是弱列紧弱闭的，于是，根据定理 1.6 知，存在 $x_0\in S(\theta,R)$，使得

$$f(x_0) = \inf_{x\in S(\theta,R)} f(x) \leqslant f(\theta).$$

由此又知

$$f(x_0) = \inf_{x\in E} f(x).$$

证完 .

例 1.6 考察 Hammerstein 型积分方程

$$\varphi(x) = \int_G k(x,y) f(y,\varphi(y))\,\mathrm{d}y = A\varphi(x), \qquad (1\cdot 40)$$

其中 G 是 R^N 中可测集，$0<\operatorname{mes}G\leqslant+\infty$，$f(x,u)$ 满足 Caratheodory 条件 . 假定：

(ⅰ) L_2 正定核 $k(x,y)$ 满足 $\int_G\int_G |k(x,y)|^p\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y < +\infty\ (p\geqslant 2)$；

(ⅱ) $f(x,u)$满足不等式

$$|f(x,u)| \leqslant a(x) + b|u|^{p-1}, \qquad (1\cdot 41)$$

$$\int_0^u f(x,u)\mathrm{d}u \leqslant \frac{a_1}{2}u^2 + b_1(x)|u|^{2-\gamma} + c_1(x), \qquad (1\cdot 42)$$

其中 $b \geqslant 0$, $a(x) \geqslant 0$, $a(x) \in L_q(G)\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$, $0<\gamma<2$, $b_1(x) \in L^{\frac{2}{\gamma}}(G)$, $c_1(x) \in L(G)$, $0 \leqslant a_1 < \frac{1}{\lambda_0}$, λ_0 表核 $k(x, y)$的最大固有值.

则方程(1·40)在 $L_p(G)$中至少有一个解.

证 所谓 $k(x,y)$是 L_2 核,指的是 $k(x,y)$在 $G\times G$ 上可测且 $\int_G\int_G |k(x,y)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y < +\infty$;若不是几乎处处为零的 L_2 对称核 $k(x,y)$的非零固有值都是正的(只有有限个负的),则称 $k(x,y)$是 L_2 正定核(L_2 拟正定核). 众所周知(参见[98]), $k(x,y)$是 L_2 正定核的充分必要条件是

$$(K\varphi,\varphi) = \int_G\int_G k(x,y)\varphi(x)\varphi(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \geqslant 0$$

$$\forall\, \varphi \in L_2(G)$$

并且至少有某 $\varphi_0 \in L_2(G)$,使$(K\varphi_0,\varphi_0)>0$,其中 K 表线性积分算子

$$K\varphi(x) = \int_G k(x,y)\varphi(y)\mathrm{d}y. \qquad (1\cdot 43)$$

表 A 为 $A = K\mathbf{f}$, 其中 K 即线性积分算子(1·43), $\mathbf{f}$ 是 Немыцкий 算子

$$\mathbf{f}\varphi(x) = f(x,\varphi(x)). \qquad (1\cdot 44)$$

由(1·41)式知, $\mathbf{f}: L_p(G) \to L_q(G)$连续有界. 由条件(ⅰ)知, K 既是映 $L_2(G)$入 $L_2(G)$的全连续算子,又是映 $L_q(G)$入 $L_p(G)$

的全连续算子，从而，根据 Вайнберг 及陈文嫄的一结果（见〔7〕及〔139〕）知，K 具有分解式

$$K = HH^*, \tag{1·45}$$

其中 $H = K^{\frac{1}{2}}: L_2(G) \to L_p(G)$ 全连续，H^* 表 H 的共轭算子，$H^*: L_q(G) \to L_2(G)$ 全连续．下证方程(1·40)在 $L_p(G)$ 中有解等价于方程

$$\psi = H^* \mathbf{f} H\psi \tag{1·46}$$

在 $L_2(G)$ 中有解．事实上，若方程(1·40)有解 $\varphi \in L_p(G)$，即 $\varphi = HH^* \mathbf{f}\varphi$，故 $H^* \mathbf{f}\varphi = H^* \mathbf{f} H(H^* \mathbf{f}\varphi)$，即 $\psi = H^* \mathbf{f}\varphi \in L_2(G)$ 是方程(1·46)的解；反之，若方程(1·46)有解 $\psi \in L_2(G)$，则 $H\psi = HH^* \mathbf{f} H\psi = AH\psi$，故 $\varphi = H\psi \in L_p(G)$ 是方程(1·40)的解．于是我们只须证方程(1·46)在 $L_2(G)$ 中有解．考察 $L_2(G)$ 上的泛函：

$$\Psi\psi = \frac{1}{2}(\psi, \psi) - \Phi(H\psi), \tag{1·47}$$

其中

$$\Phi(\varphi) = \int_G \mathrm{d}x \int_0^{\varphi(x)} f(x, u)\mathrm{d}u, \quad \forall \varphi \in L_p(G). \tag{1·48}$$

由例 1.2 的结论知

$$\Phi'(\varphi) = \mathrm{grad}\Phi(\varphi) = \mathbf{f}\varphi, \quad \forall \varphi \in L_p(G),$$

于是，对于 $h \in L_2(G)$，有

$$\begin{aligned}
&\lim_{t \to 0} \frac{1}{t}[\Phi(H(\psi + th)) - \Phi(H\psi)] \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}[\Phi(H\psi + tHh) - \Phi(H\psi)] \\
&= (\Phi'(H\psi), Hh) = (\mathbf{f}H\psi, Hh) \\
&= (H^* \mathbf{f} H\psi, h),
\end{aligned}$$

故有

$$\operatorname{grad}\Phi(H\psi)=H^{*}\mathbf{f}H\psi,\quad \forall\,\psi\in L_2(G). \qquad (1\cdot 49)$$

由此，再注意到例 1.1 的结论，知

$$\operatorname{grad}\Psi(\psi)=\psi-H^{*}\mathbf{f}H\psi,\quad \forall\,\psi\in L_2(G). \qquad (1\cdot 50)$$

由(1·49)式，注意到 $H^{*}\mathbf{f}H:L_2(G)\to L_2(G)$是全连续的，利用定理 1.2 知，$\Phi(H\psi)$是 $L_2(G)$上的弱连续泛函；另一方面，由例 1.5 的结论知(ψ,ψ)是 $L_2(G)$上的弱下半连续泛函．因此，$\Psi(\psi)$是 $L_2(G)$上的弱下半连续泛函．由(1·42)式知：对 $\psi\in L_2(G)$，有

$$\begin{aligned}\Psi(\psi)&=\frac{1}{2}(\psi,\psi)-\int_G\mathrm{d}x\int_0^{H\psi(x)}f(x,u)\mathrm{d}u\\
&\geqslant\frac{1}{2}(\psi,\psi)-\frac{a_1}{2}(H\psi,H\psi)-\int_G b_1(x)\,|H\psi(x)|^{2-\gamma}\mathrm{d}x\\
&\quad-\int_G c_1(x)\mathrm{d}x\\
&\geqslant\frac{1}{2}(\psi,\psi)-\frac{a_1}{2}(H\psi,H\psi)-b_1(H\psi,H\psi)^{1-\frac{\gamma}{2}}-c_1\\
&=\frac{1}{2}(\psi,\psi)-\frac{a_1}{2}(K\psi,\psi)-b_1(K\psi,\psi)^{1-\frac{\gamma}{2}}-c_1\\
&\geqslant\frac{1}{2}(\psi,\psi)-\frac{a_1\lambda_0}{2}(\psi,\psi)-b_1\lambda_0^{1-\frac{\gamma}{2}}(\psi,\psi)^{1-\frac{\gamma}{2}}-c_1\\
&=\frac{1-a_1\lambda_0}{2}\|\psi\|^2-b_1\lambda_0^{1-\frac{\gamma}{2}}\|\psi\|^{2-\gamma}-c_1,\end{aligned}$$

其中 $b_1=\left(\int_G|b_1(x)|^{\frac{2}{\gamma}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{\gamma}{2}}$，$c_1=\int_G c_1(x)\mathrm{d}x$．由此可知

$$\lim_{n\to\infty}\Psi(\psi)=+\infty.$$

于是，根据定理 1.7 知存在 $\psi_0\in L_2(G)$，使 $\operatorname{grad}\Psi(\psi_0)=\theta$，即 ψ_0 是方程(1·46)的解(注意到(1·50)式)．证完．

例 1.7 仍考察 Hammerstein 积分方程(1·40)，但将条件

(ⅰ)与(ⅱ)换为:

(ⅰ)′L_2 拟正定核 $k(x,y)$满足 $\int_G\int_G |k(x,y)|^p \mathrm{d}x\mathrm{d}y < +\infty (p\geqslant 2)$;

(ⅱ)′$f(x,u)$满足不等式(1·41)及

$$-\int_0^u f(x,u) \geqslant a_1 u^2 - b_1(x)|u|^{2-\gamma} - c_1(x), \quad (1\cdot 51)$$

其中 $0<\gamma<2$, $b_1(x)\in L^{\frac{2}{\gamma}}(G)$, $c_1(x)\in L(G)$, $a_1\geqslant \frac{1}{\lambda_0}$,其中 λ_0 表核 $k(x,y)$的绝对值最小的负固有值之绝对值. 这时,方程(1·40)在 $L_p(G)$中必至少具有一个解.

证 设 $k(x,y)$的全系固有值为$\{-\lambda_0, -\lambda_1, \cdots, -\lambda_m, \lambda_{m+1}, \lambda_{m+2}, \cdots\}$,其中 $0<\lambda_0\leqslant\lambda_1\leqslant\cdots\leqslant\lambda_m$, $\lambda_{m+1}\geqslant\lambda_{m+2}\geqslant\cdots>0$;对应的全系就范直交固有函数为$\{\psi_n(x)\}(n=0,1,2,\cdots)$. 由线性积分方程理论(例如,见〔98〕)知

$$k(x,y) = -\sum_{i=0}^{m} \lambda_1 \psi_i(x)\psi_i(y) + \sum_{i=m+1}^{\infty} \lambda_i\psi_i(x)\psi_i(y) \quad (1\cdot 52)$$

(注意,(1·52)式右端级数的和指的是按 $L_2(G\times G)$中范数收敛的极限,下面(1·53)式的级数也是这样理解的). 令

$$k_1(x,y) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i\psi_i(x)\psi_i(y), \quad (1\cdot 53)$$

则 $k_1(x,y)$是 L_2 正定核,它的全系固有值是$\{\lambda_i\}(i=0,1,2,\cdots)$,全系就范直交固有函数为$\{\psi_i(x)\}$. 由(1·52)式与(1·53)式知

$$k_1(x,y) = k(x,y) + 2\sum_{i=0}^{m} \lambda_i\psi_i(x)\psi_i(y). \quad (1\cdot 54)$$

由于算子 K(见(1·43)式)是拟正的,且映 $L_q(G)$入 $L_p(G)$全连续,故由 Вайнберг 的一个结果(见〔7〕,260 页,定理 23.4)知

K 的主平方根算子

$$K^{\frac{1}{2}}\psi = -\sum_{i=0}^{m}\sqrt{\lambda_i}(\psi,\psi_i)\psi_i + \sum_{i=m+1}^{\infty}\sqrt{\lambda_i}(\psi,\psi_i)\psi_i \qquad (1\cdot 55)$$

映 $L_2(G)$ 入 $L_p(G)$ 全连续．在 $(1\cdot 55)$ 式中取 $\psi=\psi_j\,(j=0,1,\cdots,m)$，则得 $\psi_j=-\frac{1}{\sqrt{\lambda_j}}K^{\frac{1}{2}}\psi_j\in L_p(G)$．于是，由 $(1\cdot 54)$ 式知

$$\int_G\int_G |k_1(x,y)|^p \mathrm{d}x\mathrm{d}y < +\infty. \qquad (1\cdot 56)$$

将例 1.6 中的讨论应用于 $k_1(x,y)$，知线性积分算子

$$K_1\varphi(x)=\int_G k_1(x,y)\varphi(y)\mathrm{d}y \qquad (1\cdot 57)$$

具有分解式 $K_1=H_1H_1^*$，其中 $H_1=K_1^{\frac{1}{2}}:L_2(G)\rightarrow L_p(G)$ 全连续，其共轭算子 $H_1^*:L_q(G)\rightarrow L_2(G)$ 全连续．

用 $H^{(1)}$ 表元素 $\psi_0,\psi_1,\cdots,\psi_m$ 在 $L_2(G)$ 中张成的 $m+1$ 维子空间，$H^{(2)}$ 表 $H^{(1)}$ 在 $L_2(G)$ 中的直交补空间；用 P_1 与 P_2 分别表 $L_2(G)$ 在 $H^{(1)}$ 与 $H^{(2)}$ 上的投影算子．要证方程 $(1\cdot 40)$ 在 $L_p(G)$ 中有解，只须证明

$$(-P_1+P_2)\psi = H_1^*\mathbf{f}H_1\psi \qquad (1\cdot 58)$$

在 $L_2(G)$ 中有解．事实上，设 $\psi\in L_2(G)$ 是 $(1\cdot 58)$ 的解，以 $(-P_1+P_2)$ 作用 $(1\cdot 58)$ 两端，得（注意 $P_1+P_2=I$）

$$\psi=(-P_1+P_2)H_1^*\mathbf{f}H_1\psi. \qquad (1\cdot 59)$$

再以 $H_1=K_1^{\frac{1}{2}}$ 作用 $(1\cdot 59)$ 式两端，并注意到 $K_1^{\frac{1}{2}}$ 与 P_1，P_2，均可交换（因为

$$K_1^{\frac{1}{2}}\psi=\sum_{i=0}^{\infty}\sqrt{\lambda_i}(\psi,\psi_i)\psi_i, \qquad (1\cdot 60)$$

故 $H^{(1)}$，$H^{(2)}$ 都是 $K_1^{\frac{1}{2}}$ 的不变子空间），得

$$H_1\psi=(-P_1+P_2)H_1H_1^*\mathbf{f}H_1\psi$$
$$=(-P_1+P_2)K_1\mathbf{f}H_1\psi=K\mathbf{f}H_1\psi=AH_1\psi,$$
故 $\varphi=H_1\psi\in L_p(G)$是(1·40)的解．

考察 $L_2(G)$上的泛函

$$\Psi_1(\psi)=-\frac{1}{2}(P_1\psi,\psi)+\frac{1}{2}(P_2\psi,\psi)-\Phi(H_1\psi),\quad(1\cdot61)$$

其中 $\Phi(\varphi)$由(1·48)式给出．根据例 1.3 的结果以及例 1.6 中的(1.49)式，知

$$\operatorname{grad}\Psi_1(\psi)=-P_1\psi+P_2\psi-H_1^*\mathbf{f}H_1\psi.\qquad(1\cdot62)$$

由于 $H_1^*\mathbf{f}H_1:L_2(G)\to L_2(G)$全连续，$P_1:L_2(G)\to L_2(G)$也是全连续的(因为 $H^{(1)}$有限维)，故由定理 1.2 知，$\Phi(H_1\psi)$和$\frac{1}{2}(P_1\psi,\psi)$都是 $L_2(G)$上的弱连续泛函，又由于投影算子是正的自共轭算子，故由例 1.5 的结论知$\frac{1}{2}(P_2\psi,\psi)$是 $L_2(G)$上的弱下半连续泛函．于是，由(1·61)式知 $\Psi_1(\psi)$是 $L_2(G)$上的弱下半连续泛函．利用(1·51)式，仿例 1.6 的推导，可得

$$\Psi_1(\psi)\geqslant-\frac{1}{2}((P_1-P_2)\psi,\psi)+a_1(H_1\psi,H_1\psi)$$
$$-b(H_1\psi,H_1\psi)^{1-\frac{\gamma}{2}}-c_1,\qquad(1\cdot63)$$

其中 $b_1=\left(\int_G|b_1(x)|^{\frac{2}{\gamma}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{\gamma}{2}}$，$c_1=\int_G c_1(x)\mathrm{d}x$．我们有

$$-\frac{1}{2}((P_1-P_2)\psi,\psi)$$
$$=-\frac{1}{2}((P_1-P_2)\psi,(P_1+P_2)\psi)$$
$$=-\frac{1}{2}(\|P_1\psi\|^2-\|P_2\psi\|^2),\qquad(1\cdot64)$$

$$(H_1\psi,H_2\psi)^{1-\frac{\gamma}{2}}=(K_1^{\frac{1}{2}}\psi,K_1^{\frac{1}{2}}\psi)^{1-\frac{\gamma}{2}}=(K_1\psi,\psi)^{1-\frac{\gamma}{2}}$$

$$\leqslant \|K_1\|^{1-\frac{\gamma}{2}}\|\psi\|^{2-\gamma}, \qquad (1\cdot 65)$$

(注意，$\|K_1\| = \min\{\lambda_m, \lambda_{m+1}\}$)．又

$$(H_1\psi, H_1\psi) = \|K^{\frac{1}{2}}\psi\|^2 = \|K^{\frac{1}{2}}(P_1\psi + P_2\psi)\|^2$$

$$= \|K^{\frac{1}{2}}P_1\psi\|^2 + \|K^{\frac{1}{2}}P_2\psi\|^2 \geqslant \|K^{\frac{1}{2}}P_1\psi\|^2. \qquad (1\cdot 66)$$

设 $P_1\psi = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i\psi_i$，则由(1·60)式知 $K^{\frac{1}{2}}P_1\psi = \sum_{i=0}^{m} \sqrt{\lambda_i}\alpha_i\psi_i$，故有

$$\|K^{\frac{1}{2}}P_1\psi\| = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i\alpha_i^2 \geqslant \lambda_0 \sum_{i=0}^{m} \alpha_i^2 = \lambda_0\|P_2\psi\|^2$$

由此再注意到(1·66)式，得

$$(H_1\psi, H_1\psi) \geqslant \lambda_0\|P_1\psi\|^2. \qquad (1\cdot 67)$$

由(1·63)、(1·64)、(1·65)、(1·67)诸式，并注意到假设条件 $\alpha_1\lambda_0 \geqslant 1$，得

$$\Psi_1(\psi) \geqslant -\frac{1}{2}(\|P_1\psi\|^2 - \|P_2\psi\|^2) + \alpha_1\lambda_0\cdot\|P_1\psi\|^2$$

$$- b_1\|K_1\|^{1-\frac{\gamma}{2}}\cdot\|\psi\|^{2-\gamma} - c_1$$

$$\geqslant -\frac{1}{2}(\|P_1\psi\|^2 - \|P_2\psi\|^2) + \|P_1\psi\|^2$$

$$- b_1\|K_1\|^{1-\frac{\gamma}{2}}\cdot\|\psi\|^{2-\gamma} - c_1$$

$$= \frac{1}{2}(\|P_1\psi\|^2 + \|P_2\psi\|^2)$$

$$- b_1\|K_1\|^{1-\frac{\gamma}{2}}\|\psi\|^{2-\gamma} - c_1$$

$$= \frac{1}{2}\|\psi\|^2 - b_1\|K_1\|^{1-\frac{\gamma}{2}}\cdot\|\psi\|^{2-\gamma} - c_1,$$

故

$$\lim_{\|\psi\|\to\infty} \Psi_1(\psi) = +\infty.$$

于是，根据定理 1.7 知，存在 $\psi_0 \in L_2(G)$，使 $\mathrm{grad}\Psi_1(\psi_0)=\theta$，即 ψ_0 是方程(1·58)的解(注意(1·62)式)．证完．

注 3 在 $\mathrm{mes}G<+\infty$ 的情况下，作者曾将条件 $a_1 \geqslant \frac{1}{\lambda_0}$ 减弱为 $a_1>\frac{1}{2\lambda_0}$，参看〔53〕．另外，还可以利用变分方法来研究 Hammerstein 型积分方程组

$$\varphi_i(x)=\int_G k_i(x,y)f_i(y,\varphi_1(y),\cdots,\varphi_n(y))\mathrm{d}y$$

$$(i=1,2,\cdots,n)$$

解的存在性(参看〔7〕)．

例 1.8 考察(Ляпунов－Lichtenstein)积分方程

$$\varphi(x)-\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1\cdots\int_0^1 k_n(x,y_1,\cdots,y_n)\prod_{i=1}^{n}\varphi(y_i)\mathrm{d}y_i=\psi(x), \tag{1·68}$$

其中 $k_n(x_1,x_2,\cdots,x_{n+1})$是 $0\leqslant x_i\leqslant 1(i=1,2,\cdots,n+1)$上的可测函数，而且是对称的(即任意交换 $x_1,x_2,\cdots,x_{n+1}$的顺序 $k_n(x_1,x_2,\cdots,x_{n+1})$都不改变)．假定：

$$M=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^1\cdots\int_0^1[k_n(x_1,\cdots,x_{n+1})]^2\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_{n+1}\right)^{\frac{1}{2}}<+\infty, \tag{1·69}$$

$$M^*=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n+1}\left(\int_0^1\cdots\int_0^1[k_n(x_1,\cdots,x_{n+1})]^2\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_{n+1}\right)^{\frac{1}{2}}<1. \tag{1·70}$$

那末，对任何 $\psi\in L_2[0,1]$，$\|\psi\|<\frac{1-M^*}{2}$，方程(1·68)在空间 $L_2[0,1]$的球$\|\psi\|<1$ 中有解(参看〔53〕)．

证 考察(Ляпунов – Lichtenstein)积分算子

$$F\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1\cdots\int_0^1 k_n(x,y_1,\cdots,y_n)\prod_{i=1}^{n}\varphi(y_i)\mathrm{d}y_i. \quad (1\cdot 71)$$

记 $T=\{\varphi\in L_2[0,1]\mid\|\varphi\|<1\}$，故 $\overline{T}=\{\varphi\in L_2[0,1]\mid\|\varphi\|\leqslant 1\}$. 我们先证 $F:\overline{T}\to L_2[0,1]$全连续．首先，当 $\varphi\in\overline{T}$ 时，由(1·69)式知

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^1\left[\int_0^1\cdots\int_0^1 k_n(x,y_1,\cdots,y_n)\prod_{i=1}^{n}\varphi(y_i)\mathrm{d}y_i\right]^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^1\cdots\int_0^1[k_n(x,y_1,\cdots,y_n)]^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y_1\cdots\mathrm{d}y_n\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\|\varphi\|^n$$

$$\leqslant M<+\infty,$$

故(1·71)式右端的级数按 $L_2[0,1]$中的范数收敛(从而 $F:\overline{T}\to L_2[0,1]$)，并且

$$\|F\varphi\|\leqslant M,\quad\forall\varphi\in\overline{T}. \quad (1\cdot 72)$$

我们又有

$$F\varphi(x+\Delta x)-F\varphi(x)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1\cdots\int_0^1[k_n(x+\Delta x,y_1,\cdots,y_n)$$

$$-k_n(x,y_1,\cdots,y_n)]\prod_{i=1}^{n}\varphi(y_i)\mathrm{d}y_i.$$

故有

$$\|K\varphi(x+\Delta x)-F\varphi(x)\|$$

$$\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^1\cdots\int_0^1[k_n(x+\Delta x,y_1,\cdots,y_n)\right.$$

$$\left.-k_n(x,y_1,\cdots,y_n]^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y_1\cdots\mathrm{d}y_n\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\|\varphi\|^n$$

$$\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^1\cdots\int_0^1[k_n(x+\Delta x,y_1,\cdots,y_n)\right.$$

$$-k_n(x, y_1, \cdots, y_n)]^2 dx dy_1 \cdots dy_n\Big)^{\frac{1}{2}}. \qquad (1\cdot73)$$

任给 $\varepsilon>0$,则(1·69)式知,可取正整数 N,使

$$\sum_{n=N+1}^{\infty}\left(\int_0^1\cdots\int_0^1[k_n(x_1,\cdots,x_{n+1})]^2 dx_1\cdots dx_{n+1}\right)^{\frac{1}{2}}<\frac{\varepsilon}{4}, \quad (1\cdot74)$$

于是,注意到按规定 $k_n(x+\Delta x, y_1, \cdots, y_n)=0$,当 $x+\Delta x \overline{\in}$ $[0,1]$时,有

$$\sum_{n=N+1}^{\infty}\Big(\int_0^1\cdots\int_0^1[k_n(x+\Delta x, y_1,\cdots,y_n)$$

$$-k_n(x,y_1,\cdots,y_n)]^2 dx dy_1\cdots dy_n\Big)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant \sum_{n=N+1}^{\infty}\left(\int_0^1\cdots\int_0^1[k_n(x+\Delta x,y_1,\cdots,y_n)]^2 dx dy_1\cdots,y_n\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$+\sum_{n=N+1}^{\infty}\left(\int_0^1\cdots\int_0^1[k_n(x,y_1,\cdots,y_n)]^2 dx dy_1\cdots dy_n\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant 2\sum_{n=N+1}^{\infty}\left(\int_0^1\cdots\int_0^1[k_n(x,y_1,\cdots,y_n)]^2 dx dy_1\cdots dy_n\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$<\frac{\varepsilon}{2} \qquad (1\cdot75)$$

取 $\delta>0$,使当 $|\Delta x|<\delta$ 时,恒有

$$\Big(\int_0^1\cdots\int_0^1[k_n(x+\Delta x,y_1,\cdots,y_n)$$

$$-k_n(x,y_1,\cdots,y_n)]^2 dx dy_1\cdots dy_n\Big)^{\frac{1}{2}}$$

$$<\frac{\varepsilon}{2N}, \quad (n=1,2,\cdots,N). \qquad (1\cdot76)$$

于是,由(1·73)、(1·75)及(1·76)诸式知:当 $|\Delta x|<\delta$ 时,对一切 $\varphi\in\overline{T}$,恒有

$$\|F\varphi(x+\Delta x)-F\varphi(x)\|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon. \qquad (1\cdot77)$$

由(1·72)式与(1·77)式知，$F\bar{T}$ 是$L_2[0,1]$中的列紧集，从而 F: $\bar{T}\to L_2[0,1]$是紧算子．

下证 F 的连续性．设 $\varphi_1,\varphi_2\in\bar{T}$．任给 $\varepsilon>0$，取正整数 N，使(1·74)式成立．我们有

$$\begin{aligned}
\|F(\varphi_2)-F(\varphi_1)\| &\leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^1\left|\int_0^1\cdots\int_0^1 k_n(x,y_1,\cdots,y_n)\right.\right.\\
&\quad\left.\left.\cdot\left[\prod_{i=1}^{n}\varphi_2(y_i)-\prod_{i=1}^{n}\varphi_1(y_i)\right]\mathrm{d}y_1\cdots\mathrm{d}y_n\right|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\leqslant \sum_{n=1}^{N}\left(\int_0^1\left|\int_0^1\cdots\int_0^1 k_n(x,y_1,\cdots,y_n)\right.\right.\\
&\quad\left.\left.\cdot\left[\prod_{i=1}^{n}\varphi_2(y_i)-\prod_{i=1}^{n}\varphi_1(y_i)\right]\mathrm{d}y_1\cdots\mathrm{d}y_n\right|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\quad+2\sum_{n=N+1}^{\infty}\left(\int_0^1\cdots\int_0^1[k_n(x,y_1,\cdots,y_n)]^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y_1\cdots\mathrm{d}y_n\right)^{\frac{1}{2}}\\
&<\frac{\varepsilon}{2}+\sum_{n=1}^{N}\left(\int_0^1\left|\int_0^1\cdots\int_0^1 k_n(x,y_1,\cdots,y_n)\right.\right.\\
&\quad\left.\left.\cdot\left[\prod_{i=1}^{n}\varphi_2(y_i)-\prod_{i=1}^{n}\varphi_1(y_i)\right]\mathrm{d}y_1\cdots\mathrm{d}y_n\right|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\\
&=\frac{\varepsilon}{2}+I. \qquad (1\cdot78)
\end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned}
&\prod_{i=1}^{n}\varphi_2(y_i)-\prod_{i=1}^{n}\varphi_1(y_i)\\
&=\sum_{j=1}^{n}\left[\prod_{i=1}^{j-1}\varphi_1(y_i)\prod_{i=j}^{n}\varphi_2(y_i)-\prod_{i=1}^{j}\varphi_1(y_i)\prod_{i=j+1}^{n}\varphi_2(y_i)\right]\\
&=\sum_{j=1}^{n}[\varphi_2(y_j)-\varphi_1(y_j)]\prod_{i=1}^{j-1}\varphi_1(y_i)\prod_{i=j+1}^{n}\varphi_2(y_i),
\end{aligned}$$

故知

$$I \leqslant \sum_{n=1}^{N} \left(\int_0^1 \cdots \int_0^1 [k_n(x, y_1, \cdots, y_n)]^2 \mathrm{d}x \mathrm{d}y_1 \cdots \mathrm{d}y_n\right)^{\frac{1}{2}} \cdot n \| \varphi_2 - \varphi_1 \|. \tag{1·79}$$

取 $\delta > 0$，使

$$\delta \sum_{n=1}^{N} n \left(\int_0^1 \cdots \int_0^1 [k_n(x, y_1, \cdots, y_n)]^2 \mathrm{d}x \mathrm{d}y_1 \cdots \mathrm{d}y_n\right)^{\frac{1}{2}} < \frac{\delta}{2}. \tag{1·80}$$

于是，由(1·78)、(1·79)及(1·80)诸式知：当 $\| \varphi_2 - \varphi_1 \| < \delta$ 时，恒有

$$\| F(\varphi_2) - F(\varphi_1) \| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

故 F 在 $\overline{T}$ 上连续(实际上是一致连续)．于是，F 的全连续性获证．

考察 $\overline{T}$ 上的泛函

$$\Phi(\varphi) = \frac{1}{2}(\varphi, \varphi) - f(\varphi) - (\varphi, \psi), \tag{1·81}$$

其中

$$f(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} \int_0^1 \cdots \int_0^1 k_n(x_1, \cdots, x_{n+1}) \cdot \prod_{i=1}^{n+1} \varphi(x_i) \mathrm{d}x_i. \tag{1·82}$$

易知 $f(\varphi)$是 $\overline{T}$ 上的泛函，因为当 $\varphi \in \overline{T}$ 时，有

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} \left| \int_0^1 \cdots \int_0^1 k_n(x_1, \cdots, x_{n+1}) \prod_{i=1}^{n+1} \varphi(x_i) \mathrm{d}x_i \right| \\ \leqslant &\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} \left(\int_0^1 \cdots \int_0^1 [k_n(x_1, \cdots, x_{n+1})]^2 \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_{n+1}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\cdot \| \varphi \|^{n+1} \end{aligned}$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}\left(\int_0^1 \cdots \int_0^1 [k_n(x_1, \cdots, x_{n+1})]^2 \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_{n+1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant M < +\infty.$$

下证

$$\operatorname{grad} f(\varphi) = F\varphi, \quad \forall\, \varphi \in T. \tag{1·83}$$

事实上,给定 $\varphi \in T$,则 $\|\varphi\| < 1$. 设 $h \in L_2[0, 1]$,取 $0 < \tau < 1$,使 $\|\varphi\| + \tau\|h\| < 1$. 于是当 $|t| \leqslant \tau$ 时,$\varphi + th \in T$. 考察

$$f(\varphi + th) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} \int_0^1 \cdots \int_0^1 k_n(x_1, \cdots, x_{n+1})$$

$$\prod_{i=1}^{n+1} [\varphi(x_i) + th(x_i)] dx_i, \quad |t| \leqslant \tau. \tag{1·84}$$

由于(注意到 $k_n(x_1, \cdots, x_{n+1})$的对称性)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Bigg(\frac{1}{n+1} \int_0^1 \cdots \int_0^1 k_n(x_1, \cdots, x_{n+1})$$

$$\cdot \prod_{i=1}^{n+1} [\varphi(x_i) + th(x_i)] dx_i\Bigg)$$

$$= \frac{1}{n+1} \int_0^1 \cdots \int_0^1 k_n(x_1, \cdots, x_{n+1})$$

$$\cdot \Bigg\{ \sum_{j=1}^{n+1} h(x_j) \prod_{i=1}^{j-1} [\varphi(x_i) + th(x_i)]$$

$$\cdot \prod_{i=j+1}^{n+1} [\varphi(x_i) + th(x_i)] \Bigg\} dx_1 \cdots dx_{n+1}$$

$$= \int_0^1 \cdots \int_0^1 k_n(x_1, \cdots, x_{n+1}) h(x_1)$$

$$\cdot \Big(\prod_{i=2}^{n+1} [\varphi(x_i) + th(x_i)]\Big) dx_1 \cdots dx_{n+1}$$

而当 $|t| \leqslant \tau$ 时

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Bigg| \int_0^1 \cdots \int_0^1 k_n(x_1, \cdots x_{n+1}) h(x_1)$$

$$\cdot \left(\prod_{i=2}^{n+1} [\varphi(x_i) + th(x_i)] \right) dx_1 \cdots dx_{n+1} \Bigg|$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^1 \cdots \int_0^1 [k_n(x_1, \cdots, x_{n+1})]^2 dx_1 \cdots dx_{n+1} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\cdot \| h \| \cdot (\| \varphi \| + \tau \| h \|)^n$$

$$\leqslant \| h \| \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^1 \cdots \int_0^1 [k_n(x_1, \cdots, x_{n+1})] dx_1 \cdots dx_{n+1} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$< +\infty,$$

故(1·84)右端逐项微分后的级数在 $|t| \leqslant \tau$ 上一致收敛，从而由数学分析的定理知(1·84)式可逐项微分，得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\varphi + th) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \cdots \int_0^1 k_n(x_1, \cdots, x_{n+1}) h(x_1)$$

$$\cdot \left(\prod_{i=2}^{n+1} [\varphi(x_i) + th(x_i)] \right) dx_1 \cdots dx_{n+1}, \quad |t| \leqslant \tau.$$

特别，令 $t=0$，得

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} [f(\varphi + th) - f(\varphi)] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\varphi + th) \Big|_{t=0}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \cdots \int_0^1 k_n(x_1, \cdots, x_{n+1}) h(x_1) \left[\prod_{i=2}^{n+1} \varphi(x_i) \right] dx_1 \cdots dx_{n+1}$$

$$= \int_0^1 [F\varphi(x_1)] h(x_1) dx_1 = (F\varphi, h),$$

故(1·83)式成立．由此，根据定理 1·2 知泛函 $f(\varphi)$ 在 T 上是弱连续的．显然，泛函 (φ, ψ)（ψ 固定）在 T 上弱连续，而泛函 $\frac{1}{2}(\varphi, \varphi)$ 在 T 上弱下半连续（利用例 1.5 的结论）. 于是，由(1·81)式知，泛函 $\Phi(\varphi)$ 在 T 上弱下半连续．同时，由(1·83)式易知

$$\mathrm{grad}\Phi(\varphi) = \varphi - F\varphi - \psi, \quad \forall \varphi \in T. \qquad (1·85)$$

现在我们证明方程(1·68)在 T 中有解．当 $\varphi\in T$ 时

$$f(\varphi)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}\left(\int_0^1\cdots\int_0^1[k_n(x_1,\cdots,x_{n+1})]^2dx_1\cdots dx_{n+1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\cdot\|\varphi\|^{n+1}\leqslant\frac{M^*}{2}\|\varphi\|^2,$$

故

$$\Phi(\varphi)\geqslant\frac{1-M^*}{2}\|\varphi\|^2-\|\varphi\|\cdot\|\psi\|\to\frac{1-M^*}{2}-\|\psi\|>0,$$

$$\text{当}\|\varphi\|\to 1-0\text{ 时};$$

因此可取 $0<r<1$，使在球面 $\|\varphi\|=r$ 上恒有

$$\Phi(\varphi)>0=\Phi(\theta).\tag{1·86}$$

由于闭球 $T_r=\{\varphi\in L_2[0,1]\mid\|\varphi\|\leqslant r\}$ 是 $L_2[0,1]$ 中的弱列紧弱闭集，故根据定理 1.6 知，存在 $\varphi_0\in T_r$，使

$$\Phi(\varphi_0)=\inf_{\varphi\in T_r}\Phi(\varphi).$$

由(1·86)式知 φ_0 是 T_r 的内点($\|\varphi_0\|<r$)，从而根据定理 1.4 (并注意(1·85)式)，知

$$\mathrm{grad}\Phi(\varphi_0)=\varphi_0-F\varphi_0-\psi=\theta,$$

即 φ_0 是方程(1·68)的解．证完．

注 4 若用 Schauder 不动点原理，则不难证明：当

$$M=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^1\cdots\int_0^1[k_n(x_1,\cdots,x_{n-1})]^2dx_1\cdots dx_{n+1}\right)^{\frac{1}{2}}<1\tag{1·87}$$

时，对充分小的 $\|\psi\|$，方程(1·68)在球 $\|\varphi\|<1$ 中有解，显然，条件(1·69)与(1·70)比(1·87)弱．但用 Schauder 不动点定理时不要求核 $k_n(x_1,\cdots,x_{n+1})$ 是对称的，而上面(用变分方法)则要求 $k_n(x_1\cdots,x_{n+1})$ 是对称的．所以，各有特点．

定理 1.8 设 H 是实 Hilbert 空间，泛函 $f:H\to R^1$ 在 H 上

弱连续且 Fréchet 可微. 令 $F(x)=\mathrm{grad}f(x)(F:H\to H)$. 则对任何 $0<r<+\infty$, 算子 F 在球 $T_r=\{x\in H\mid \|x\|<r\}$ 内都至少有 c 个固有元, 这里 c 表连续统的势.

证 任给 $0<r<+\infty$. 如果对任何 $0<r_1<r$, F 在球面 $S_r=\{x\in H\mid \|x\|=r_1\}$ 上都有固有元, 则定理显然已获证. 因此, 下面假定 F 在某球面 $S_{r_0}(0<r_0<r)$ 上没有固有元, 由于闭球 $\overline{T}_r$ 弱列紧弱闭, 因此由定理 1.6 知, 弱连续泛函 f 在 $\overline{T}_{r_0}$ 上必达到最小值 m_0 和最大值 M_0. 显然 $m_0\neq M_0$(因若 $m_0=M_0$, 则 $f(x)$ 在 $\overline{T}_{r_0}$ 上是常数, 故由定理 1.5 的系 2 知, 球面 S_{r_0} 上任何点都是 F 的固有元, 矛盾). 于是 $m_0<f(\theta)$ 与 $f(\theta)<M_0$ 至少有一个成立. 先设 $m_0<f(\theta)$ 成立. 设 m_0 在点 $x_0\in\overline{T}_{r_0}$ 达到: $m_0=f(x_0)$. 显然 $x_0\neq\theta$. 易知 $x_0\in T_{r_0}$(因若 $x_0\in S_{r_0}$, 则 f 在点 x_0 关于球面 S_{r_0} 达到条件极小值, 于是, 根据定理 1.5 的系 2 知, x_0 是 F 的固有元, 矛盾). 考察 H 上的泛函

$$\Phi_\alpha(x)=\alpha(x,x)+f(x),\quad \forall\,\alpha\in\left(0,\frac{f(\theta)-m_0}{\|x_0\|^2}\right). \tag{1·88}$$

有

$$\mathrm{grad}\Phi_\alpha(x)=2\alpha x+F(x),\quad \forall\,x\in H. \tag{1·89}$$

显然, $\Phi_\alpha(x)$ 在 H 上弱下半连续, 故必存在 $x_\alpha\in\overline{T}_{r_0}$, 使

$$\Phi_\alpha(x_\alpha)=\inf_{x\in\overline{T}_{r_0}}\Phi_\alpha(x),\quad \forall\,\alpha\in\left(0,\frac{f(\theta)-m_0}{\|x\|^2}\right). \tag{1·90}$$

由于

$$\Phi_\alpha(\theta)=f(\theta)>m_0+\alpha\|x_0\|^2=\Phi_\alpha(x_0)\geqslant\Phi_\alpha(x_\alpha),$$

故 $x_\alpha\neq\theta$. 下证 $x_\alpha\in T_{r_0}$. 事实上, 若 $x_\alpha\in S_{r_0}$, 则 $\Phi_\alpha(x)$ 关于 S_{r_1} 在点 x_α 达到条件极小值, 于是, 根据定理 1.5 的系 2, 并注意

到(1·89)式可知：存在 $\mu\in R^1$，使

$$2\alpha x_\alpha+F(x_\alpha)=\mathrm{grad}\Phi_\alpha(x_\alpha)=\mu x_\alpha,$$

即

$$F(x_\alpha)=(\mu-2\alpha)x_\alpha,$$

故 x_α 是 F 的固有元，与假定矛盾．因此，$x_\alpha\in T_{r_0}$ 获证，即 x_α 是 $\overline{T}_\alpha$ 的内点．于是

$$\mathrm{grad}\Phi_\alpha(x_\alpha)=2\alpha x_\alpha+F(x_\alpha)=\theta,$$

即

$$F(x_\alpha)=-2\alpha x_\alpha,\quad \forall\,\alpha\in\Big(0,\frac{f(\theta)-m_0}{\|x_0\|^2}\Big). \qquad (1\cdot 91)$$

因此，每个 x_α 都是 F 的固有元．但由(1·91)式知

$$\alpha_1,\alpha_2\in\Big(0,\frac{f(\theta)-m_0}{\|x_0\|^2}\Big),\quad \alpha_1\neq\alpha_2\Rightarrow x_{\alpha_1}\neq x_{\alpha_2},$$

故 $\{x_\alpha\}$ 共有 c 个．

在 $f(\theta)<M_0$ 的情形，证明与上述 $m_0<f(\theta)$ 的情形类似，这时代替泛函(1·88)式，须考察泛函

$$\Phi_\alpha(x)=-\alpha(x,x)+f(x),\quad \forall\,\alpha\in\Big(0,\frac{M_0-f(\theta)}{\|x_0\|^2}\Big),$$

$(f(x_0)=M_0)$，它在 H 上是弱上半连续的；和(1·91)式相当的式子是

$$F(x_\alpha)=2\alpha x_\alpha,\quad \forall\,\alpha\in\Big(0,\frac{M_0-f(\theta)}{\|x_0\|^2}\Big),$$

$(\Phi_\alpha(x_\alpha)=\sup\limits_{x\in\overline{T}_\alpha}\Phi_\alpha(x))$，详细情况从略．证完．

注 5 从定理 1.8 的证明过程可知：在定理 1.8′ 的条件下，必是下面两种情况之一：

(ⅰ) F 在任何球面 $S_r(0<r<+\infty)$ 上都具有固有元；

(ⅱ) F 的固有值充满某区间 $(-\tau,0)$ 或 $(0,\tau)$，这里 $\tau>0$.

例 1.9 考察 Hammerstein 积分算子

$$A\varphi(x)=\int_G k(x,y)f(y,\varphi(y))\mathrm{d}y, \tag{1·92}$$

其中 G 是 R^N 中可测集，$0<\mathrm{mes}G\leqslant+\infty$，$f(x,u)$ 满足 Caratheodory 条件．假定

(a) L_2 正定核 $k(x,y)$ 满足 $\int_G\int_G|k(x,y)|^p\mathrm{d}x\mathrm{d}y<+\infty$ $(p\geqslant2)$；

(b) $f(x,u)$ 满足不等式

$$|f(x,u)|\leqslant a(x)+b|u|^{p-1},$$

其中 $b\geqslant0$，$a(x)\in L_q(G)$，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

则对任何 $0<r<+\infty$，算子 A 在空间 $L_p(G)$ 的球 $T_r=\{\varphi\in L_p(G)\mid\|\varphi\|<r\}$ 中都至少具有 c 个固有元，c 表连续统的势．

证 同于例 1.6 的讨论，$A=K\mathbf{f}$，K 与 $\mathbf{f}$ 由(1·43)式与(1·44)式给出．这时，(1·45)式也成立．考察 $L_2(G)$ 上的泛函：

$$\Psi(\psi)=\Phi(H\psi), \tag{1·93}$$

其中 $\Phi(\varphi)$ 由(1·48)式给出．由(1·49)式知

$$\mathrm{grad}\Psi(\psi)=H^*\mathbf{f}H\psi,\quad\forall\psi\in L_2(G). \tag{1·94}$$

令 $H_0=\{\psi\in L_2(G)\mid K^{\frac{1}{2}}\psi=\theta\}$，则 H_0 是 $L_2(G)$ 的一个子空间．用 H_1 表 H_0 在 $L_2(G)$ 中的直交补，即 $H_1=L_2(G)\ominus H_0$，则 $L_2(G)=H_0\oplus H_1$，且 $H_1\neq\{\theta\}$（因若 $H_1=\{\theta\}$，则 $H_0=L_2(G)$，从而 $K=\theta$，此与 $k(x,y)$ 不几乎处处为零矛盾）．对任何 $h\in H_0$，有

$$(H^*\mathbf{f}H\psi,h)=(\mathbf{f}H\psi,H\psi)=(\mathbf{f}H\psi,K^{\frac{1}{2}}h)=0,$$

故 $H^* \mathbf{f} H\psi \in H_1$, $\forall \psi \in L_2(G)$. 因此,若将 $H^* \mathbf{f} H$ 限制在 H_1 上,则 $H^* \mathbf{f} H: H_1 \to H_1$;再将 $\Psi(\psi)$限制在 H_1 上(即把 $\Psi(\psi)$ 视为 H_1 上的泛函),仍有(在 H_1 上讨论)

$$\mathrm{grad}\,\Psi(\psi) = H^* \mathbf{f} H\psi, \quad \psi \in H_1. \tag{1·95}$$

由于 $H^* \mathbf{f} H: H_1 \to H_1$ 全连续,故 $\Psi(\psi)$是 H_1 上的弱连续泛函. 于是,将定理 1.8 应用于实 Hilbert 空间 H_1 上可知:对任何 $0 < r < +\infty$, 算子 $H^* \mathbf{f} H$ 在空间 H_1 的球 $T_{r_1} = \{\psi \in H_1 \mid \|\psi\| < r_1\}$中必有 c 个固有元(这里 r_1 满足 $r_1 \|H\| < r$, $\|H\|$表$H: L_2(G) \to L_p(G)$的范数),设它们是$\{\psi_\alpha\}(\alpha \in \Delta = (0,1)$, 诸 ψ_α 互不相同),即

$$H^* \mathbf{f} H\psi_\alpha = \mu_\alpha \psi_\alpha, \quad \mu_\alpha \in R^1, \psi_\alpha \neq \theta, \quad \alpha \in \Delta.$$

于是,用 H 作用上式两端,得到

$$A\varphi_\alpha = \mu_\alpha \varphi_\alpha, \quad \forall \alpha \in \Delta, \tag{1·96}$$

其中 $\varphi_\alpha = H\psi_\alpha \in L_p(G)$. 显然 $\varphi_\alpha \neq \theta$,因若 $\varphi_\alpha = \theta$,即有 $K^{\frac{1}{2}}\psi_\alpha = H\psi_\alpha = \theta$,故 $\psi_\alpha \in H_0$,但 $\psi_\alpha \in H_1$,故必有 $\psi_\alpha = \theta$,矛盾. 因此 φ_α 都是A 的固有元. 下证

$$\alpha_1, \alpha_2 \in \Delta, \quad \alpha_1 \neq \alpha_2 \Rightarrow \varphi_{\alpha_1} \neq \varphi_{\alpha_2}. \tag{1·97}$$

事实上,若 $\varphi_{\alpha_1} = \varphi_{\alpha_2}$,即 $K^{\frac{1}{2}}(\psi_{\alpha_1} - \psi_{\alpha_2}) = \theta$,故 $\psi_{\alpha_1} - \psi_{\alpha_2} \in H_0$. 但显然 $\psi_{\alpha_1} - \psi_{\alpha_2} \in H_1$,因此必有 $\psi_{\alpha_1} - \psi_{\alpha_2} = \theta$,即 $\psi_{\alpha_1} = \psi_{\alpha_2}$,此与 $\alpha_1 \neq \alpha_2$ 矛盾. 于是由(1·97)式知,诸$\{\varphi_\alpha\}(\alpha \in \Delta)$也是 c 个. 另外又有

$$\|\varphi_\alpha\| \leqslant \|H\| \cdot \|\psi_\alpha\| \leqslant \|H\| \cdot r_1 < r, \quad \forall \alpha \in \Delta.$$

证完.

§2 最速下降法

设 H 是实 Hilbert 空间，$F:H\to H$ 是梯度算子，即存在泛函 $f:H\to R^1$，使 $F(x)=\operatorname{grad}f(x)$，$\forall x\in H$．要求方程

$$F(x)=\theta \tag{2·1}$$

的解．由定理 1.4 知，若 $f(x)$ 在某 $x^*\in H$ 处达到极小值，则 x^* 必是方程(2·1)的解．如何求 x^* 呢？常可用下面的思想：从某初值 $x_0\in H$ 出发，我们希望能沿 H 中某曲线 $x=x(t)$ 最后到达 x^* 点．很自然地，我们应要求沿此曲线，泛函 f 的值下降得最快，即在曲线上的每一点 x 处，曲线前进的方向都正好是泛函 f 的值减少最多的方向，亦即是 $-\operatorname{grad}f(x)=-F(x)$ 的方向．因此，此曲线 $x=x(t)$ 应满足 Hilbert 空间中的常微分方程初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-F(x),\\ x(0)=x_0\end{cases} \tag{2·2}$$

可以想象，在一定的条件下，$\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)$ 存在，其极限 x^* 就是泛函 f 的极小点，从而是方程(2·1)的解．满足初值问题(2·2)的解 $x=x(t)$ 叫做 f 的**最速下降流线**；利用最速下降流线来研究泛函 f 的极值点和临界点的方法，叫做**最速下降法**．

注 1 如果不考虑连续的最速下降流线 $x=x(t)$，而只考虑离散的迭代序列，则可得离散的最速下降程序，参见〔126〕．

由于初值问题(2·2)是 Banach 空间中常微分方程初值问题的特例，故作为预备知识，介绍几个下面将要用到的有关 Banach 空间常微分方程理论的重要定理(参见〔8〕,〔70〕,〔140〕)．

设 E 是实 Banach 空间，$t_0\in R^1$，$x_0\in E$. 考察 Banach 空间 E 中常微分方程的初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=f(t,x),\\ x(t_0)=x_0.\end{cases}\tag{2·3}$$

令 $J=[t_0-a,t_0+a]$，$S=\{x\in E\mid \|x-x_0\|\leqslant b\}(a>0,b>0)$.

定理 2.1(存在惟一性定理)　设 $f:J\times S\to E$ 连续，且关于 x 满足 Lipschitz 条件：

$$\|f(t,x_1)-f(t,x_2)\|\leqslant K\|x_1-x_2\|,\quad \forall (t,x_1),(t,x_2)\in J\times S,\tag{2·4}$$

则对任何满足条件

$$0<\delta<\min\left\{a,\ \frac{b}{M},\ \frac{1}{K}\right\}\tag{2·5}$$

的 δ(其中 $M=\sup\limits_{(t,x)\in J\times S}\|f(t,x)\|$)，初值问题(2·3)在 $J_\delta=[t_0-\delta,t_0+\delta]$上满足 $x(t)\in S$ 的解 $x(t)$ 必存在惟一.

证　首先注意

$$M=\sup_{(t,x)\in J\times S}\|f(t,x)\|<+\infty.\tag{2·6}$$

事实上，由于$\|f(t,x)\|$是 $t\in J$ 的连续实函数，故有界，从而由(2·4)式知

$$\begin{aligned}\|f(t,x)\|&\leqslant\|f(t,x)-f(t,x_0)\|+\|f(t,x_0)\|\\&\leqslant K\|x-x_0\|+\|f(t,x_0)\|\\&\leqslant Kb+\sup_{t\in J}\|f(t,x_0)\|<+\infty,\end{aligned}$$

故(2·6)式成立.

其次，由于 $f(t,x)$连续，故问题(2·3)的解 $x=x(t)$必具有连续导数，即属于 C^1.

利用第一章定理 3.2(ⅰ)、(ⅲ),易知:问题(2·3)属于 C^1 的解等价于 Banach 空间积分方程

$$x(t)=x_0+\int_{t_0}^{t} f(s,x(s))\mathrm{d}s \tag{2·7}$$

属于 C 的解(即连续解). 因此,下面只需证明:方程(2·7)在 J_δ 上满足 $x(t)\in S$ 的解存在惟一. 用 $C(J_\delta,E)$ 表 J_δ 上一切连续的抽象函数 $x=x(t):J_\delta\to E$ 所构成的 Banach 空间,其范数为 $\|x\|_C=\max\limits_{t\in J_\delta}\|x(t)\|$. 令 $D=\{x(t)\in C(J_\delta,E)\mid \|x(t)-x_0\|\leqslant b\ \ \forall\, t\in J_\delta\}$,则 D 是 $C(J_\delta,E)$ 中的闭集. 考察算子

$$Fx(t)=x_0+\int_{t_0}^{t} f(s,x(s))\mathrm{d}s. \tag{2·8}$$

若 $x(t)\in D$,则当 $t\in J_\delta$ 时,由(2·5)式知

$$\|Fx(t)-x_0\|=\left\|\int_{t_0}^{t} f(s,x(s))\mathrm{d}s\right\|\leqslant M\delta<b,$$

故 $Fx(t)\in D$. 因此,$F:D\to D$. 另外,当 $x(t)$、$y(t)\in D$ 时,由(2·4)式知:当 $t\in J_\delta$ 时有

$$\|Fx(t)-Fy(t)\|=\left\|\int_{t_0}^{t}[f(x,x(s))-f(s,y(s))]\mathrm{d}s\right\|$$

$$\leqslant K\delta(\max_{t\in J_\delta}\|x(s)-y(s)\|)=K\delta\|x-y\|_C,$$

从而

$$\|Fx-Fy\|_C\leqslant q\|x-y\|_C,\quad \forall\, x,y\in D, \tag{2·9}$$

其中,根据(2·5)式,$q=K\delta<1$. 因此,$F:D\to D$ 是一个压缩映象. 于是,根据压缩映象原理知,F 在 D 中具有惟一的不动点 $x^*(t)$,即方程(2·7)在 D 中具有惟一解 $x=x^*(t)$. 证完.

注 2 根据压缩映象原理可知:初值问题(2·3)的惟一解 $x=x^*(t)$ 可由迭代序列

$$x_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_{n-1}(s))\mathrm{d}s$$

$$(n = 1, 2, \cdots), \quad x_0(t) \equiv x_0, \tag{2·10}$$

求出，即有$\|x_n - x^*\|_C \to 0 (n \to \infty)$，并具有几何级数的收敛速率$\|x_n - x^*\| = O(q^n)$，其中 $q = K\delta < 1$.

注3 上述定理 2.1 表明，古典常微分方程论中的 Picard 定理（存在惟一性定理），对于抽象的 Banach 空间常微分方程仍然成立．但 Peano 定理（存在性定理），对于 Banach 空间中的常微分方程，就不再成立了，即 $f(t, x)$的连续性保证不了问题(2·3)解的存在性（可以举出这种例子，参看〔70〕、〔140〕）．为保证问题(2·3)解的存在性，就必须再加上一定的条件，即加上所谓紧型条件或耗散型条件（参看〔70〕、〔140〕），例如，第二章例 5.3 中所加的有关非紧性测度的不等式，就是一种紧型条件．

定理 2.2（解的延拓） 设 U 是 E 中开集，$f: R^1 \times U \to E$ 连续，且关于 x 满足局部 Lipschitz 条件（即对任何点$(t, x) \in R^1 \times U$，都存在 t 的邻域J_t 与 x 的邻域 S_x，使 $f(t, x)$在 $J_t \times S_x$ 上关于 x 满足 Lipschitz 条件），$x_0 \in U$，则初值问题(2·3)的解必可从右边惟一地延拓到某最大的区间$[t_0, \eta)$上（$\eta \leqslant +\infty$），且若 $\eta < +\infty$而且 $\lim\limits_{t \to \eta - 0} x(t) = x^*$ 存在，则必有 $x^* \in \partial U$（∂U 表 U 的边界）；同样 $x = x(t)$也可从左边惟一地延拓到某最大区间$(\xi, t_0]$上（$-\infty \leqslant \xi$），且若$-\infty < \xi$ 而且 $\lim\limits_{t \to \xi + 0} x(t) = x_*$ 存在，则必有 $x_* \in \partial U$.

证 只须证明从右边延拓的结论（从左边延拓的结论，证明类似）．分下面几段：

(1)解的可延拓性：由定理 2.1，存在 $\delta_0 > 0$，问题(2·3)在

$[t_0, t_0+\delta_0]$上有解 $x = x_0(t)$. 令 $t_1 = t_0+\delta_0$, $x_1 = x_0(t_1)$. 由假定, $f(t, x)$在(t_1, x_1)的某邻域内也满足 Lipschitz 条件, 因此, 将定理 2.1 应用于初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(t, x), \\ x(t_1) = x_1,\end{cases} \tag{2·11}$$

可知存在 $\delta_1>0$, 使问题(2·11)在$[t_1, t_1+\delta_1]$上有解 $x = x_1(t)$. 令

$$\bar{x}(t) = \begin{cases}x_0(t), & t_0 \leqslant t \leqslant t_1; \\ x_1(t), & t_1 < t \leqslant t_1+\delta_1,\end{cases}$$

则 $x = \bar{x}(t)$是问题(2·3)在$[t_0, t_0+\delta_0+\delta_1]$上的解(注意, $\bar{x}(t)$在$[t_0, t_0+\delta_0+\delta_1]$上属于 C^1), 即解 $\bar{x}(t)$是 $x_0(t)$解的延拓. 同样, 可将解 $\bar{x}(t)$再向右延拓. 这样继续下去, 就可将原来的局部解 $x = x_0(t)$从右边延拓到某一区间$[t_0, \beta)$上.

(2)解的惟一性: 设 $x = X_1(t)$与 $x = X_2(t)$是初值问题(2·3)在$[t_0, \beta)$上的两个解. 我们证明

$$X_1(t) \equiv X_2(t), \quad \forall t \in [t_0, \beta). \tag{2·12}$$

事实上, 令 $T = \{t \in [t_0, \beta) \mid X_1(t) = X_2(t)\}$. 取 $a>0, b>0$, 使定理 2.1 条件满足(J, S 的意义见定理 2.1), 由 $X_1(t)$与 $X_2(t)$的连续性, 可取 $\delta>0$ 充分小, 使 $\delta<\beta-t_0$ 且满足(2·5)式, 并且使

$$X_1(t), X_2(t) \in S, \quad \forall t \in [t_0, t_0+\delta] \tag{2·13}$$

由定理 2.1, 问题(2·3)在 $J_\delta = [t_0-\delta, t_0+\delta]$上满足 $x(t) \in S$ 的解存在惟一, 设其为 $x = x^*(t)$. 令

$$x_1(t) = \begin{cases}x^*(t), & t_0-\delta \leqslant t < t_0; \\ X_1(t), & t_0 \leqslant t \leqslant t_0+\delta,\end{cases}$$

$$x_1(t)=\begin{cases}x^*(t), & t_0-\delta\leqslant t<t_0;\\ X_2(t), & t_0\leqslant t\leqslant t_0+\delta,\end{cases}$$

则 $x_1(t)$ 与 $x_2(t)$ 都是问题(2·3)在 J_δ 上的解,且满足 $x_1(t)\in S$, $x_2(t)\in S$. 于是,根据惟一性定理知, $x_1(t)\equiv x_2(t)$, $\forall t\in J_\delta$;因此, $X_1(t)\equiv X_2(t)$, $\forall t_0\leqslant t\leqslant t_0+\delta$. 由此可知, $[t_0, t_0+\delta]\subset T$, 故 $T\neq\varnothing$. 下证 T 是 $[t_0,\beta)$ 的开集. 事实上,设 $t_1\in T$, $t_0<t_1<\beta$. 令 $x_1=X_1(t_1)=X_2(t_1)$. 取 $a_1>0$, $b_1>0$ 充分小,使 $f(t,x)$ 在 $J_1\times S_1$ 上关于 x 满足 Lipschitz 条件,这里 $J_1=[t_1-a_1,t_1+a_1]$, $S_1=\{x\in E \mid \|x-x_1\|\leqslant b_1\}$. 于是根据 $X_1(t)$ 与 $X_2(t)$ 的连续性以及定理 2.1 知,可取 $\delta_1>0$ 充分小,使当 $t\in J_{\delta_1}=[t_1-\delta_1,t_1+\delta_1]$ 时,恒有 $X_1(t)\in S_1$, $X_2(t)\in S_1$ 并且初值问题(2·11)在 J_{δ_1} 上满足 $x(t)\in S_1$ 的解存在惟一. 显然 $X_1(t)$ 与 $X_2(t)$ 在 J_{δ_1} 上的限制都是这样的解,因此, $X_1(t)=X_2(t)$, $\forall t\in J_{\delta_1}$;故 $J_{\delta_1}\subset T$. 于是, T 是 $[t_0,\beta)$ 的开集获证. 另外,由 $X_1(t)$ 与 $X_2(t)$ 的连续性,显然可知 T 是 $[t_0,\beta)$ 的闭集. 于是 T 是 $[t_0,\beta)$ 的非空的既开又闭的集. 但 $[t_0,\beta)$ 是连通的(拓扑空间 $[t_0,\beta)$ 显然是道路连通的,从而必是连通的,参看[24]),故必有 $T=[t_0,\beta)$(因若 T 是 $[t_0,\beta)$ 的真子集,则 $[t_0,\beta)=T\cup T_1$, T 与 $T_1=[t_0,\beta)\setminus T$ 都是 $[t_0,\beta)$ 的非空开集,且互不相交,此与 $[t_0,\beta)$ 的连通性矛盾). 于是(1·12)获证.

(3)解的最大存在区间的存在性:令 V 表初值问题(2·3)的所有的解(t_0 向右)所成的集,即 $V=\{x(t)\mid x(t)$ 定义在 $[t_0,\beta_x)$ 上,且在 $[t_0,\beta_x)$ 上是问题(2·3)的解$\}$. 设 $x_1(t)\in V$, $x_2(t)\in V$, 则由第(2)段惟一性的讨论,知在 $[t_0,\beta)$ 上($\beta=$

$\min\{\beta_{x_1},\beta_{x_2}\})$, $x_1(t)\equiv x_2(t)$. 令 $\eta=\sup_{x(t)\in V}\beta_x$, 则 $\eta\leqslant+\infty$, 且问题(2·3)在$[t_0,\eta)$上存在惟一解, $[t_0,\eta)$显然是解存在的最大区间.

(4)设$[t_0,\eta)$是问题(2·3)解存在的最大区间, $\eta<+\infty$, $x=x(t)$是问题(2·3)在$[t_0,\eta)$上的惟一解. 又设$\lim_{t\to\eta-0}x(t)=x^*$存在. 下证$x^*\in\partial U$.

事实上, 若$x^*\overline{\in}\partial U$, 由于$x(t)\in U(t\in[t_0,\eta))$, 故$x^*\in U$. 令

$$\bar{x}(t)=\begin{cases}x(t), & t_0\leqslant t<\eta,\\ x^*, & t=\eta.\end{cases}$$

显然, $\bar{x}(t)$在$[t_0,\eta]$上连续. 我们证明, $\bar{x}(t)$在$[t_0,\eta]$上是问题(2·3)的解. 令

$$y(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}f(s,\bar{x}(s))\mathrm{d}s,\quad t_0\leqslant t\leqslant\eta. \tag{2·14}$$

由第一章定理3.2(ⅲ)知, $y(t)$在$[t_0,\eta]$可微, 且

$$y'(t)=f(t,\bar{x}(t)),\quad t_0\leqslant t\leqslant\eta. \tag{2·15}$$

又, 根据第一章定理3.2(ⅰ)知, 当$t_0\leqslant t<\eta$时

$$y(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}x'(s)\mathrm{d}s=x_0+x(t)-x(t_0)=x(t),$$

故 $y(t)\equiv\bar{x}(t)$, $t_0\leqslant t\leqslant\eta$.

因此, $\bar{x}(t)$是问题(2·3)在$[t_0,\eta]$上的解. 由于$x^*\in U$, 故$f(t,x)$在点(η,x^*)的邻域内关于x满足Lipschitz条件, 因此, 根据定理2.1知: 可取$\delta>0$, 使初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=f(t,x),\\ x(\eta)=x^*,\end{cases} \tag{2·16}$$

在$[\eta, \eta+\delta]$上存在解 $x=x_0(t)$. 于是,显然抽象函数

$$X(t)=\begin{cases}\bar{x}(t), & t_0\leqslant t\leqslant\eta,\\ x_0(t), & \eta<t\leqslant\eta+\delta,\end{cases}$$

是初值问题(2·3)在$[t_0, \eta+\delta]$上的解,此与$[t_0, \eta)$是解的最大存在区间矛盾. 证完.

定理 2.3(解对初值的连续依赖性) 设 U 是E 中开集,f: $R^1\times U\to E$ 连续,且关于 x 满足局部 Lipschitz 条件,$x_0\in U$. 设初值问题(2·3)的惟一解 $x=x(t;t_0,x_0)$,其向右最大存在区间是$[t_0,\eta(t_0,x_0))$. 任给 $t_0<\beta<\eta(t_0,x_0)$,则对于任意给定的 $\varepsilon>0$,必存在 $r>0$,使当 $x_1\in S(x_0, r)=\{x\in E\mid \|x-x_0\|<r\}$时,必有 $\eta(t_0,x_1)>\beta$,且

$$\|x(t;t_0,x_1)-x(t;t_0,x_0)\|<\varepsilon,\quad \forall\, t\in[t_0,\beta];\qquad (2\cdot17)$$

从而当 $x_1\to x_0$ 时,$x(t;t_0,x_1)$在$[t_0,\beta]$上一致趋于 $x(t;t_0,x_0)$.

对于向左最大存在区间$(\xi(t_0,x_0),t_0]$,类似的结论成立.

证 分两段证明:

(1)先证:$\forall\,(t_0,x_0)\in R^1\times U$,存在 $\delta>0$ 及 $r>0$,使在 $J_\delta=[t_0-\delta, t_0+\delta]$上,$x(t;t_0,x_0)$存在且对任何 $t_1\in J_\delta$,只要$\|x_1^*-x_1\|<r$(这里 $x_1=x(t_1;t_0,x_0)$),$x(t;t_1,x_1^*)$在 J_δ 上必存在,并且

$$\|x(t;t_1,x_1^*)-x(t;t_0,x_0)\|\leqslant 2\|x_1^*-x_1\|,$$
$$\forall\, t\in J_\delta. \qquad (2\cdot18)$$

事实上,由假定,存在 $a>0, b>0$,使(2·4)式成立. 今取 $0<\delta<\frac{\delta_1}{2}$. 其中 $0<\delta_1<\frac{1}{2}\min\left\{a,\frac{b}{4M},\frac{1}{K}\right\}$ $\left(M=\sup\limits_{(t,x)\in J\times S}\|f(t,x)\|\right)$,

并令 $r=\frac{b}{4}$，下证此 δ 与 r 即合乎要求．由定理2.1知，$x(t;t_0, x_0)$在 $J_{2\delta_1}=[t_0-2\delta_1, t_0+2\delta_1]$上存在，并且

$$\{x(t;t_0,x_0)\mid t\in J_{2\delta_1}\}\subset S_0=\left\{x\in E\,\middle|\,\|x-x_0\|\leqslant\frac{b}{4}\right\}.$$

于是，当 $t_1\in J_\delta$，$\|x_1^*-x_1\|<r$ 时（$x_1=x(t_1;t_0,x_0)$），必有 $\|x_1^*-x_1\|<r+\frac{b}{4}=\frac{b}{2}$．令 $J_{\delta_1}^*=[t_1-\delta_1, t_1+\delta_1]$，$S^*=\{x\in E\mid\|x-x_1^*\|\leqslant\frac{b}{4}\}$．显然 $J_{\delta_1}^*\subset J_{2\delta_1}\subset J$，$S^*\subset S$．故在 $J_{\delta_1}\times S^*$ 上(2·4)式也成立．于是，根据定理 2.1 知初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=f(t,x),\\ x(t_1)=x_1^*\end{cases}$$

的惟一解 $x=x(t;t_1,x_1^*)$在 $J_{2\delta}^*=[t_1-2\delta, t_1+2\delta]$上存在，且 $\{x(t;t_1,x_1^*)\mid t\in J_{2\delta}^*\}\subset S^*$．显然 $J_{2\delta}^*\subset J_\delta$．故 $x(t;t_1,x_1^*)$ 在 J_δ 上存在．另外，由解的惟一性知

$$x(t;t_1,x_1)\equiv x(t;t_0,x_0),\quad\forall\, t\in J_{2\delta_1}.\qquad(2\cdot19)$$

有

$$x(t;t_1,x_1)=x_1+\int_{t_1}^{t}f(s,x(s;t_1,x_1))ds,\quad t\in J_\delta,$$

$$x(t;t_1,x_1^*)=x_1^*+\int_{t_1}^{t}f(s,x(s;t_1,x_1^*))ds,\quad t\in J_\delta.$$

从而注意到(2·4)式，知

$$\begin{aligned}&\|x(t;t_1,x_1^*)-x(t;t_1,x_1)\|\\ \leqslant&\|x_1^*-x_1\|+\int_{t_1}^{t}\|f(s,x(s;t_1,x_1^*))\\ &-f(s,x(s;t_1,x_1))\|ds\end{aligned}$$

$$\leqslant \|x_1^* - x_1\| + K\int_{t_1}^{t} \|x(s;t_1,x_1^*)$$

$$- x(s;t_1,x_1)\|\mathrm{d}s$$

$$= w(t), \quad \forall\, t_1 \leqslant t \leqslant t_0 + \delta. \tag{2·20}$$

显然，

$$w'(t) = K\|x(t;t_1,x_1^*) - x(t;t_1,x_1)\|,$$

$$\forall\, t_1 \leqslant t \leqslant t_0 + \delta,$$

从而再由(2·20)式得

$$w'(t) \leqslant Kw(t), \quad \forall\, t_1 \leqslant t \leqslant t_0 + \delta \tag{2·21}$$

因此

$$\frac{d}{dt}[e^{-Kt}w(t)] = e^{-Kt}(w'(t) - Kw(t)) \leqslant 0,$$

$$\forall\, t_1 \leqslant t \leqslant t_0 + \delta,$$

故 $e^{-Kt}w(t)$是$[t_1, t_0+\delta]$上的减函数，从而

$$e^{-Kt}w(t) \leqslant e^{-Kt_1}w(t_1) = e^{-Kt_1}\|x_1^* - x_1\|,$$

故有

$$w(t) \leqslant e^{K(t-t_1)}\|x_1^* - x_1\|, \quad \forall\, t_1 \leqslant t \leqslant t_0 + \delta.$$

由此知

$$\|x(t;t_1,x_1^*) - x(t;t_1,x_1)\| \leqslant e^{K(t-t_1)}\|x_1^* - x_1\|,$$

$$\forall\, t_1 \leqslant t \leqslant t_0 + \delta.$$

同理可证

$$\|x(t;t_1,x_1^*) - x(t;t_1,x_1)\| \leqslant e^{K(t_1-t)}\|x_1^* - x_1\|,$$

$$\forall\, t_0 - \delta \leqslant t \leqslant t_1.$$

于是有

$$\|x(t;t_1,x_1^*) - x(t;t_1,x_1)\| \leqslant e^{2\delta K}\|x_1^* - x_1\|,$$

$$\forall\, t \in J_{\delta}. \tag{2·22}$$

但因 $\delta < \frac{1}{4K}$,故由(2·22)式及(2·19)式即知(2·18)式成立．

(2)现在证明定理的结论．设已给 $t_0 < \beta < \eta(t_0, x_0)$, $\varepsilon > 0$. 由(1)的结论,对任何 $t^* \in [t_0, \beta]$,存在 $\delta_{t^*} > 0$ 及 $r_{t^*} > 0$,使得对任何 $t_1 \in J_{\delta_{t^*}} = [t^* - \delta_{t^*}, t^* + \delta_{t^*}]$,只要 $\| x_1^* - x_1 \| < r_t^*$ $(x_1 = x(t_1; t^*, x^*)$, $x^* = x(t^*; t_0, x_0))$, $x(t; t_1, x_1^*)$在 $J_{\delta_{t^*}}$ 上必存在,并且

$$\| x(t; t_1, x_1^*) - x(t; t^*, x^*) \| \leqslant 2 \| x_1^* - x_1 \|,$$
$$\forall\, t \in J_{\delta_{t^*}}. \tag{2·23}$$

由于 $\{ \mathring{J}_{\delta_{t^*}} = (t^* - \delta_{t^*}, t^* + \delta_{t^*}) \mid t^* \in [t_0, \beta] \}$ 构成了$[t_0, \beta]$的一个开覆盖,故由开覆盖定理知,存在$[t_0, \beta]$的一个有限开覆盖 $\{ \mathring{J}_{\delta_{t_i}} \mid (i = 1, 2, \cdots, m) \}$. 不妨设 $t_0 \in \mathring{J}_{\delta_{t_1}}$, $\mathring{J}_{\delta_{t_i}}$ 的右端点 $t_i + \delta_{t_i}$ 属于 $\mathring{J}_{\delta_{t_{i+1}}}$ $(i = 1, 2, \cdots, m-1)$, $\beta \in \mathring{J}_{\delta_{t_m}}$. 今取 $r > 0$,使 $2^m r < \min\{ r_{t_1}, \cdots, r_{t_m}, \varepsilon \}$. 下证此 r 即符合要求．设 $x_1 \in S(x_0, r)$,则$\| x_1 - x_0 \| < r < r_{t_1}$,故由上述结论知,$x(t; t_0, x_1)$在 $J_{\delta_{t_1}}$ 上存在,且

$$\| x(t; t_0, x_1) - x(t; t_1, x^{(1)}) \| \leqslant 2 \| x_1 - x_0 \|,$$
$$\forall\, t \in J_{\delta_{t_1}}, \tag{2·24}$$

其中 $x^{(1)} = x(t_1; t_0, x_0)$. 由解的惟一性知,$x(t; t_1, x^{(1)}) \equiv x(t; t_0, x_0)$. 故(2·24)式为

$$\| x(t; t_0, x_1) - x(t; t_0, x_0) \| \leqslant 2 \| x_1 - x_0 \| < 2r,$$
$$\forall\, t \in J_{\delta_{t_1}}. \tag{2·25}$$

在(2·25)式中令 $t=t_1+\delta_{t_1}=t_1^*$，得 $\|x_1^*-x_0^*\|<2r<r_{t_2}$，这里 $x_1^*=x(t_1^*;t_0,x_1)$，$x_0^*=x(t_1^*;t_0,x_0)$．由假定 $t_1^*\in J_{\delta_{t_2}}$，再利用上述结论知，$x(t;t_1^*,x_1^*)$在 $J_{\delta_{t_2}}$ 上存在，且

$$\|x(t;t_1^*,x_1^*)-x(t;t_2,x^{(2)})\|\leqslant 2\|x_1^*-x_0^*\|<4r,\quad \forall t\in J_{\delta_{t_2}}. \tag{2·26}$$

其中 $x^{(2)}=x(t_2;t_0,x_0)$．由惟一性，$x(t;t_2,x^{(2)})\equiv x(t;t_0,x_0)$．又，显然 $x(t;t_1^*,x_1^*)$是 $x(t;t_0,x_1)$的延拓，即 $x(t;t_0,x_1)$在 $J_{\delta_{t_2}}$ 上也存在(在其上，$x(t;t_0,x_1)\equiv x(t;t_1^*,x_1^*)$)．于是，(2·26)式为

$$\|x(t;t_0,x_1)-x(t;t_0,x_0)\|<4r,\quad \forall t\in J_{\delta_{t_2}}. \tag{2·27}$$

这样一直继续下去，可知 $x(t;t_0,x_1)$在 $J_{\delta_{t_3}},\cdots,J_{\delta_{t_m}}$ 上都存在，且

$$\|x(t;t_0,x_1)-x(t;t_0,x_0)\|<2^k r,\quad \forall t\in J_{\delta_{t_k}},\quad k=3,4,\cdots,m. \tag{2·28}$$

由(2·25)、(2·27)、(2·28)诸式，并注意到 $\beta\in J_{\delta_{t_m}}$ 以及 $2^m r<\min\{r_{t_1},\cdots,r_{t_m},\varepsilon\}$，即知 $\eta(t_0,x_1)>\beta$，并且(2·17)式成立．

对于向左最大存在区间$(\xi(t_0,x_0),t_0]$的结论，可类似地证明．证完．

现在，我们回到最速下降法问题．考察最速下降流线的方程(2·2)．

定理 2.4 设 H 是实 Hilbert 空间，$f:H\to R^1$ 是 C^1 泛函．设 $F(x)=\text{grad } f(x)(\forall x\in H)$在 H 上满足局部 Lipschitz 条件．那末，若 f 在H 上有下(上)界，则对任何 $x_0\in H$，初值问题

(2·2)的惟一解 $x=x(t)$ 的向右最大存在区间为$[0,+\infty)$(向左最大存在区间为$(-\infty,0]$),并且,存在常数 $\beta>0$,使

$$\|x(t_2)-x(t_1)\|\leqslant\beta|t_2-t_1|^{\frac{1}{2}},$$

$$\forall t_1,t_2\in[0,+\infty)(\forall t_1,t_2\in(-\infty,0]). \qquad (2\cdot29)$$

证 只证向右最大存在区间的情况(假定 f 在 H 上有下界). 根据定理 2.2(令其中的 $U=H$)知,问题(2·2)的惟一解 $x=x(t)$ 的向右最大存在区间是存在的,设为$[0,\eta)$,有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(x(t))=(f'(x(t)),x'(t))=(F(x(t)),x'(t))$$

$$=-\|x'(t)\|^2,\quad \forall t\in[0,\eta), \qquad (2\cdot30)$$

故 $f(x(t))$是$[0,\eta)$上的减函数(即沿着 $x=x(t)$, $f(x)$是下降的). 由假定 $c=\inf\limits_{x\in H}f(x)$是有限数,从而

$$c\leqslant f(x(t))\leqslant f(x_0),\quad \forall t\in[0,\eta).$$

另外,当 $0\leqslant t_1<t_2<\eta$ 时,根据第一章定理 3.2(ⅰ),并注意到(2·30)式,有

$$\begin{aligned}
&\|x(t_2)-x(t_1)\|\\
&=\left\|\int_{t_1}^{t_2}x'(t)\mathrm{d}t\right\|\leqslant\int_{t_1}^{t_2}\|x'(t)\|\mathrm{d}t\\
&\leqslant\left(\int_{t_1}^{t_2}\|x'(t)\|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}(t_2-t_2)^{\frac{1}{2}}\\
&=\left(-\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(x(t))\right]\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}\cdot(t_2-t_1)^{\frac{1}{2}}\\
&=\{f(x(t_1))-f(x(t_2))\}^{\frac{1}{2}}\cdot(t_2-t_1)^{\frac{1}{2}}\\
&\leqslant(f(x_0)-c)^{\frac{1}{2}}\cdot(t_2-t_1)^{\frac{1}{2}}. \qquad (2\cdot31)
\end{aligned}$$

因此,如果 $\eta<+\infty$,则由(2·31)式知:当时 $t_1,t_2\to\eta-0$,有

$\|x(t_2)-x(t_1)\|\to 0$. 于是根据 H 的完备性知,极限 $\lim\limits_{t\to\eta-0}x(t)=x^*\in H$ 存在．但由定理 2.2 知,$x^*\in\partial H$,而$\partial H=\varnothing$,故得出矛盾．因此必有 $\eta=+\infty$. 另外,由(2·31)式即知(2·29)式成立．证完．

注 4 若 $f:H\to R^1$ 是 C^2 泛函,则由第一章定理 3.4(ⅱ)易知,$F(x)=\mathrm{grad}f(x)$在 H 上满足局部 Lipschitz 条件．

定理 2.5 设 H 是实 Hilbert 空间,$S(x_0,r)=\{x\in \mid \|x-x_0\|<r\}$是 H 中的开球($x_0\in H$, $r>0$). 设 $f:S(x_0,r)\to R^1$ 是 C^2 泛函,且存在常数 $c>0$,使

$$(f''(x)h,h)\geqslant c\|h\|^2,\quad \forall\, x\in S(x_0,r),\quad h\in H.\qquad(2\cdot32)$$

又设$\|f'(x_0)\|c^{-1}<r$. 那末(ⅰ)初值问题(2·2)(其中 $F(x)=\mathrm{grad}f(x)$, $\forall\, x\in S(x_0,r)$)的惟一解 $x=x(t)$的向右最大存在区间是$[0,+\infty)$,并且 $\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)=x^*$ 存在,$x^*\in S(x_0,r)$,收敛速率是

$$\|x(t)-x^*\|=O(e^{-ct})(t\to+\infty).\qquad(2\cdot33)$$

(ⅱ)$f(x)>f(x^*)$, $\forall\, x\in S(x_0,r)$, $x\neq x^*$;即 x^*是 $f(x)$在 $S(x_0,r)$中的严格最小值点;(ⅲ)x^*是方程(2·1)在 $S(x_0,r)$中的惟一解．

证 (ⅰ)设问题(2·2)的惟一解 $x=x(t)$的向右最大存在区间是$[0,\eta)$. 显然,(2·30)式成立．由于 f 属于 C^2,故 $x(t)\in C^2([0,\eta))$,并且

$$x''(t)=-f''(x(t))x'(t),\qquad \forall\, t\in[0,\eta).\qquad(2\cdot34)$$

于是由(2·34)式与(2·32)式知

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|x'(t)\|^2)=2(x''(t),x'(t))$$

$$= -2(f''(x(t))x'(t), x'(t))$$
$$\leqslant -2c\|x'(t)\|^2, \quad \forall t \in [0, \eta),$$

从而

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(e^{2ct}\|x'(t)\|^2) = e^{2ct}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|x'(t)\|^2 + 2c\|x'(t)\|^2\right) \leqslant 0,$$

故 $e^{2ct}\|x'(t)\|^2$ 是 $0 \leqslant t < \eta$ 上的减函数，因此

$$\|x'(t)\| \leqslant \|x'(0)\| e^{-ct} = \|f'(x_0)\| e^{-ct},$$
$$\forall t \in [0, \eta). \tag{2·35}$$

由此可知

$$\|x(t) - x_0\| = \left\|\int_0^1 x'(s)\mathrm{d}s\right\|$$
$$\leqslant \int_0^1 \|x'(s)\|\mathrm{d}s \leqslant \|f'(x_0)\| \cdot \int_0^1 e^{-cs}\mathrm{d}s$$
$$\leqslant \|f'(x_0)\| \cdot c^{-1}, \quad t \in [0, \eta). \tag{2·36}$$

同样，由(2·35)式知，当 $0 < t_1 < t_2 < \eta$ 时，有

$$\|x(t_2) - x(t_1)\| = \left\|\int_{t_1}^{t_2} x'(s)\mathrm{d}s\right\|$$
$$\leqslant \|f'(x_0)\| \cdot \int_{t_1}^{t_2} c^{-cs}\mathrm{d}s. \tag{2·37}$$

如果 $\eta < +\infty$，则由(2·37)式知，$\lim\limits_{t \to \eta - 0} x(t) = x^*$ 存在，从而根据定理 2.2 知，$x^* \in \partial S(x_0, r)$；但由(2·36)式知

$$\|x^* - x_0\| \leqslant \|f'(x_0)\| \cdot c^{-1} < r, \tag{2·38}$$

故 $x^* \in S(x_0, r)$，此与 $x^* \in \partial S(x_0, r)$矛盾．由此可知 $\eta = +\infty$．由(2·37)式，注意到无穷积分 $\int_0^\infty e^{-cs}\mathrm{d}s$ 收敛，即知 $\lim\limits_{t \to +\infty} x(t) = x^*$ 存在，且由(2·36)式知(2·38)式成立，从而 $x^* \in S(x_0, r)$．另外，在(2·37)式中记 $t_1 = t$，并让 $t_2 \to +\infty$ 取极限，

即得

$$\|x^* - x(t)\| \leqslant \|f'(x_0)\| \cdot \int_t^{+\infty} e^{-cs} \mathrm{d}s = \|f'(x_0)\| c^{-1} e^{-ct},$$

故(2·33)式成立．

(ⅱ)由(2·35)式知

$$\lim_{t \to +\infty} x'(t) = \theta,$$

从而

$$f'(x^*) = F(x^*) = \lim_{t \to +\infty} F(x(t)) = -\lim_{t \to +\infty} x'(t) = \theta. \quad (2·39)$$

于是，当 $x \in S(x_0, r)$时，有

$$f(x) - f(x^*) = \int_0^1 (f'(x^* + t(x - x^*)), x - x^*) \mathrm{d}t,$$

而

$$\begin{aligned} &(f'(x^* + t(x - x^*)), x - x^*) \\ &= (f'(x^* + t(x - x^*)) - f'(x^*), x - x^*) \\ &= \int_0^1 (f''(x^* + st(x - x^*)) t(x - x^*), x - x^*) \mathrm{d}s, \end{aligned}$$

故由(2·32)式，知

$$\begin{aligned} &f(x) - f(x^*) \\ &= \int_0^1 t \mathrm{d}t \int_0^1 (f''(x^* + st(x - x^*))(x - x^*), x - x^*) \mathrm{d}s \\ &\geqslant \int_0^1 tc\|x - x^*\|^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{2} c \|x - x^*\|^2, \end{aligned} \quad (2·40)$$

由此即知 $f(x) > f(x^*)$，$\forall x \in S(x_0, r)$，$x \neq x^*$．

(ⅲ)由(2·39)式知，x^*是方程(2·1)的解．对任何 $x, y \in S(x_0, r)$，令 $\varphi(t) = (F(x + t(y - x)), y - x)$．于是由中值定理知，存在$0 < \tau < 1$，使 $\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\tau)$．注意到(2·32)式，可得

$$(F(y) - F(x), y - x) = \varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\tau)$$

$$= (F'(x+\tau(y-x))(y-x), y-x)$$

$$\geqslant c\|y-x\|^2. \tag{2·41}$$

由(2·41)式即知,方程(2·1)在 $S(x_0,r)$ 内,除 x^* 外无其他解(注意,由(2·41)式知,F 是 $S(x_0,r)$ 中的强单调映象). 证完.

系 设 H 是实 Hilbert 空间,$f:H\to R^1$ 是 C^2 泛函,且存在常数 $c<0$,使

$$(f''(x)h,h)\geqslant c\|h\|^2, \quad \forall x,h\in H. \tag{2·42}$$

那末(ⅰ)对任何 $x_0\in H$,初值问题(2·2)(其中 $F(x)=\text{grad}f(x)$, $\forall x\in H$)的惟一解 $x=x(t)$ 的向右最大存在区间是$[0,+\infty)$,并且 $\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)=x^*\in H$ 存在,收敛速率(2·33)式成立;(ⅱ)$f(x)>f(x^*)$, $\forall x\in H\setminus\{x^*\}$,即 x^* 是 $f(x)$ 在 H 中的严格最小值点;(ⅲ)x^* 是方程(2·1)在 H 中的惟一解.

证 给定 $x_0\in H$ 后,取 $r>0$ 充分大,使 $\|f'(x_0)\|c^{-1}<r$. 于是,根据定理 2.5 即知结论(ⅰ)成立. 另外,注意到(2·40)式对任何 $x\in H$ 都成立,即知结论(ⅱ)成立. 同样,注意到这时(2·41)式对任何 $x,y\in H$ 都成立,即知结论(ⅲ)成立. 证完.

注 5 本系的结论和第四章定理 2.4 的结论密切相关,但所使用的方法不同:本系使用的是最速下降法,而第四章定理 2.4 使用的是单调算子的理论.

定义 2.1 设 E 是实 Banach 空间,$f:E\to R^1$ 是 C^1 泛函. 如果 $\{x_n\}\subset E$, $f(x_n)$有界,$f'(x_n)\to\theta$ 蕴涵 $\{x_n\}$ 有收敛子列,则称泛函 $f(x)$满足 **Palais-Smale 条件**,简称 **P.S. 条件**.

注 6 P.S. 条件显然是一种紧型条件,是由 R.S. Palais 和 S. Smale 引入的(见[146]). 很明显,对于 C^1 泛函 $f:E\to R^1$,当 $f:E\to R^1$ 是固有映象或 $f':E\to E^*$ 是固有映象时,f 必满足 P.S. 条件.

定理 2.6 设 H 是实 Hilbert 空间，$f: H \to R^1$ 是 C^1 泛函，有下界，并且满足 P.S. 下界．又设 $\operatorname{grad} f(x): H \to H$ 满足局部 Lipschitz 条件．那末，f 在 H 上必达到最小值，即存在 $x^* \in H$，使

$$f(x^*) = \inf_{x \in H} f(x); \tag{2·43}$$

从而 x^* 是方程(2·1)的解(其中 $F(x) = \operatorname{grad} f(x)$，$\forall\, x \in H$)．

证 由于 f 有下界，故 $c = \inf_{x \in H} f(x)$ 是有限数．假定没有 $x^* \in H$，使(2·43)式成立，于是必有 $\tau > 0$ 存在，使方程(2·1)在集 $f_{c+\tau} = \{x \in H \mid f(x) \leqslant c + \tau\}$ 内无解(事实上，若不然，存在 $x_n \in H$，$c \leqslant f(x_n) \leqslant c + \dfrac{1}{n}$，使得 $f'(x_n) = F(x_n) = \theta$ $(n = 1, 2, \cdots)$．从而根据 P.S. 条件，存在 $\{x_n\}$ 的子列 $x_{n_k} \to x^* \in H$，由此知 $f(x^*) = c$，矛盾)．显然 $f_{c+\tau} \neq \varnothing$．任取 $x_0 \in f_{c+\tau}$，根据定理 2·4，初值问题(2·2)的惟一解 $x = x(t)$ 的向右最大存在区间是$[0, +\infty)$．我们有

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(x(t)) = (f'(x(t)), x'(t))\\&= (F(x(t)), F(x(t))) = -\|F(x(t))\|^2\\&\qquad \forall\, t \in [0, +\infty).\end{aligned} \tag{2·44}$$

故 $f(x(t))$是 $t \in [0, +\infty)$的减函数，因此

$$c \leqslant f(x(t)) \leqslant f(x_0), \quad \forall\, t \in [0, +\infty). \tag{2·45}$$

又由(2·44)式知

$$c \leqslant f(x(t)) = f(x_0) - \int_0^t \|F(x(s))\|^2 \mathrm{d}s,$$

$$\forall\, t \in [0, +\infty),$$

由此可知，无穷积分 $\int_0^{+\infty} \|F(x(t))\|^2 \mathrm{d}t$ 收敛，从而必有

$$\lim_{t\to+\infty}\|F(x(t))\|=0,$$

即存在 $t_n\to+\infty$，使 $\|F(x(t_n))\|\to 0$. 由(2·45)式知 $\{f(x(t_n))\}$ 有界．于是，根据 P.S. 条件知，存在 $\{x(t_n)\}$ 的子列 $x(t_{n_k})\to\bar{x}\in H$. 故 $F(\bar{x})=\lim\limits_{k\to+\infty}F(x(t_{n_k}))=\theta$，并且，注意到(2·45)式知，$f(\bar{x})=\lim\limits_{k\to\infty}f(x(t_{n_k}))\leqslant f(x_0)\leqslant c+\tau$，从而 $\bar{x}\in f_{c+\tau}$，此显然与前面的结论矛盾．证完．

上面所讲的最速下降法只对于实 Hilbert 空间适用，对于一般的实 Banach 空间 E，由于 $\mathrm{grad}f:E\to E^*$，而$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\in E$，而一般地 $E\neq E^*$，故初值问题(2·2)没有意义．为要将最速下降法的思想推广到一般的实 Banach 空间，须要推广梯度算子的概念，为此，R.S. Palais 引进了伪梯度算子的概念．

定义 2.2 设 E 是实 Banach 空间，$f:E\to R^1$ 是 C^1 泛函，$f(x)\not\equiv\mathrm{const}$. 令 $K=\{x\in E\mid f'(x)=\theta\}$，$X=E\setminus K$. 于是 X 是E 的非空开集．如果算子 $v:X\to E$ 满足局部 Lipschitz 条件，而且满足

(ⅰ) $\|v(x)\|<2\|f'(x)\|,\quad\forall x\in X$;

(ⅱ) $(f'(x),v(x))>\|f'(x)\|^2,\quad\forall x\in X$,

($(f'(x),v(x))$表泛函 $f'(x)\in E^*$ 作用于元素 $v(x)\in E$ 的值)，则称 v 是泛函f 的一个**伪梯度算子**．

注 7 由(ⅰ)与(ⅱ)知，$\|f'(x)\|<\|v(x)\|<2\|f'(x)\|$，$\forall x\in X$.

定理 2.7 (Palais) 设 E 是实 Banach 空间，$f:E\to R^1$ 是 C^1 泛函，且 $f(x)\not\equiv\mathrm{const}$. 则 f 的伪梯度算子必定存在．

证 任给 $x_0\in X$. 由于 $f'(x_0)\neq\theta$，故存在 $w_0\in E$，

$\|w_0\|=1$，使$(f'(x_0),w_0)>\frac{2}{3}\|f'(x_0)\|$．令

$$v_0=\frac{3}{2}\|f'(x_0)\|w_0, \tag{2·46}$$

则$\|v_0\|<2\|f'(x_0)\|$，$(f'(x_0),v_0)>\|f'(x_0)\|^2$．由$f'(x)$的连续性知，存在$x_0$的某邻域$N(x_0)\subset X$，使

$$\|v_0\|<2\|f'(x)\|,\ (f'(x),v_0)>\|f'(x)\|^2,$$
$$\forall x\in N(x_0). \tag{2·47}$$

于是，$\{N(x_0)\mid x_0\in X\}$构成X的一个开覆盖．根据距离空间的仿紧性(第一章引理 2.2)知，存在X的另一开覆盖$\{U_\alpha\mid\alpha\in\Delta\}$，它是局部有限的，并且精于$\{N(x_0)\mid x_0\in X\}$．令

$$\lambda_\alpha(x)=\mathrm{dist}(x,E\setminus U_\alpha),\quad\forall\alpha\in\Delta. \tag{2·48}$$

易知

$$\|\lambda_\alpha(x)-\lambda_\alpha(y)\|\leqslant\|x-y\|,\quad\forall x,y\in E. \tag{2·49}$$

令$\lambda(x)=\sum_{\alpha\in\Delta}\lambda_\alpha(x)$，$\forall x\in X$．由于$\{U_\alpha\mid\alpha\in\Delta\}$是局部有限的，故当$x\in X$时，$\sum_{\alpha\in\Delta}\lambda_\alpha(x)$实际是有限项的和(其余各项均为零)，并且$\lambda(x)>0$．令

$$\mu_\alpha(x)=\frac{\lambda_\alpha(x)}{\lambda(x)},\quad\forall x\in X. \tag{2·50}$$

则$0\leqslant\mu_\alpha\leqslant1$，$\sum_{\alpha\in\Delta}\mu_\alpha=1$(只是有限项的和)．并且，由$\{U_\alpha\mid\alpha\in\Delta\}$的局部有限性以及(2·49)式，不难证明$\mu_\alpha(x)$在$X$上满足局部 Lipschitz 条件．对任何$\alpha\in\Delta$，由于$\{U_\alpha\mid\alpha\in\Delta\}$精于$\{N(x_0)\mid x_0\in X\}$，故必存在$x_\alpha\in X$，使$U_\alpha\subset N(x_\alpha)$．用$v_\alpha$表示当以$x_\alpha$代$x_0$时由(2·46)式定义的元素．于是由(2·47)式知

$$\|v_\alpha\|<2\|f'(x)\|,\ (f'(x),v_\alpha)>\|f'(x)\|^2,$$

$$\forall x \in N(x_\alpha). \tag{2·51}$$

现在令

$$v(x) = \sum_{\alpha \in \Delta} \mu_\alpha(x) v_\alpha, \quad \forall x \in X. \tag{2·52}$$

下证此 $v(x)$ 即是 f 的伪梯度．首先，由 $\{U_\alpha \mid \alpha \in \Delta\}$ 的局部有限性，知对每一个 $x \in X$，(2·52)式右端实际是有限项的和（从而 $v(x)$ 有意义），并且易知 $v(x)$ 在 X 上满足局部 Lipschitz 条件．其次，对 $x \in X$，若 $\mu_\alpha(x) > 0$（对某 $\alpha \in \Delta$），即 $\lambda_\alpha(x) > 0$，则 $x \in U_\alpha \subset N(x_\alpha)$，从而，由(2·51)式知

$$\|v_\alpha\| < 2\|f'(x)\|, \quad (f'(x), v_\alpha) > \|f'(x)\|^2.$$

由此可见，对任何 $x \in X$，有

$$\|v(x)\| \leqslant \sum_{\alpha \in \Delta} \mu_\alpha(x) \|v_\alpha\| < \Big(\sum_{\alpha \in \Delta} \mu_\alpha(x)\Big) 2\|f'(x)\|$$
$$= 2\|f'(x)\|,$$
$$(f'(x), v(x)) = \sum_{\alpha \in \Delta} \mu_\alpha(x)(f'(x), v_\alpha)$$
$$> \Big(\sum_{\alpha \in \Delta} \mu_\alpha(x)\Big) \cdot \|f'(x)\|^2 = \|f'(x)\|^2$$

证完．

注 8 若更设 f 是偶泛函，即 $f(-x) = f(x)$，$\forall x \in E$．则 f 存在奇的伪梯度算子 v，即 $v(-x) = -v(x)$，$\forall x \in X$．事实上，这时易知 $f'(x)$ 是奇的，即 $f'(-x) = -f'(x)$，$\forall x \in E$，由此知 X 是关于零点 θ 的对称集（即若 $x \in X$，则必有 $-x \in X$），根据定理 2.7，存在 f 的伪梯度算子 v_0．令 $v(x) = \frac{1}{2}[v_0(x) - v_0(-x)]$，$\forall x \in X$．由于 X 是关于 θ 的对称集，故 $v(x)$ 在 X 上有定义，且显然 $v: X \rightarrow E$ 满足局部 Lipschitz 条件，并且是奇映射（即 $v(-x) = -v(x)$，$\forall x \in X$）．此外，当 $x \in X$ 时有

$$\|v(x)\| \leqslant \frac{1}{2}(\|v_0(x)\| + \|v_0(-x)\|)$$

$$< \frac{1}{2}(2\|f'(x)\| + 2\|f'(-x)\|) = 2\|f'(x)\|.$$

$$(f'(x), v(x))$$

$$= \frac{1}{2}(f'(x), v_0(x)) + \frac{1}{2}(f'(-x), v_0(-x))$$

$$> \frac{1}{2}\|f'(x)\|^2 + \frac{1}{2}\|f'(-x)\|^2$$

$$= \|f'(x)\|^2.$$

由此可知, v 是 f 的一个伪梯度算子．证完

对于一般的实 Banach 空间 E, 我们可用 f 的伪梯度 v 来代替 f 的梯度 $F = \mathrm{grad}f$, 从而, 用初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -v(x); \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{2·53}$$

来代替问题(2·2), 以获得 f 的下降流线 $x = x(t)$. 于是, 就可将最速下降法的思想搬到实 Banach 空间上来了．

定理 2.8 **设 E 是实 Banach 空间, $f: E \to R^1$ 是 C^1 泛函, 并且不恒为常数．设 $x_0 \in X = E \setminus K$, $K = \{x \in E \mid f'(x) = \theta\}$, 用 $x(t)$ 表示初值问题(2·53)的惟一解(其中 $v(x)$ 表 $f(x)$ 的伪梯度), 其向右最大存在区间为 $[0, \eta)$. 假定 $\{f(x(t)) \mid t \in [0, \eta)\}$ 有界．那末, 必存在 $\beta > 0$, 使**

$$\|x(t_2) - x(t_1)\| \leqslant \beta |t_2 - t_1|^{\frac{1}{2}},$$

$$\forall\, t_1, t_2 \in K[0, \eta) \tag{2·54}$$

并且有:

(ⅰ)若 $\eta < +\infty$, 则 $\lim\limits_{t \to \eta - 0} x(t) = x^*$ 存在且 $x^* \in K$(从而 $f'(x^*) = 0$);

(ⅱ)若 $\eta=+\infty$，则无穷积分 $\int_0^{+\infty}\|f'(x(t))\|^2 dt$ 收敛 .

证 首先，由定理 2.7 知 f 的伪梯度算子 v 存在，并且根据理 2.2 知，初值问题(2·53)具有惟一解 $x=x(t)$，其向右最大存在区间$[0,\eta)$存在 . 我们有

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}f(x(t))&=(f'(x(t)),x'(t))\\&=-(f'(x(t)),v(x(t)))<-\|f'(x(t))\|^2,\\&\qquad\forall t\in[0,\eta).\end{aligned}\tag{2·55}$$

故 $f(x(t))$是 $t\in[0,\eta)$上的严格减函数(即 $f(x)$沿 $x=x(t)$ 是严格下降的，故问题(2·53)的解是 $f(x)$的下降流线). 由假定 $c=\inf\{f(x(t))\mid t\in[0,\eta)\}$，是有限数，故知

$$c\leqslant f(x(t))\leqslant f(x_0),\quad\forall t\in[0,\eta).\tag{2·56}$$

由(2·55)式知，当 $0\leqslant t_1<t_2<\eta$ 时有

$$f(x(t_2))-f(x(t_1))<-\int_{t_1}^{t_2}\|f'(x(t))\|^2 dt.\tag{2·57}$$

同时又有

$$\begin{aligned}&\|x(t_2)-x(t_1)\|=\left\|\int_{t_1}^{t_2}x'(t)dt\right\|\\&\leqslant\int_{t_1}^{t_2}\|v(x(t))\|dt<2\int_{t_1}^{t_2}\|f'(x(t))\|dt\\&\leqslant 2\left(\int_{t_1}^{t_2}\|f'(x(t))\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}\cdot(t_2-t_1)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}&\|x(t_2)-x(t_1)\|\\&<2\{f(x(t_1))-f(x(t_2))\}^{\frac{1}{2}}\cdot(t_2-t_2)^{\frac{1}{2}}\\&\leqslant 2(f(x_0)-c)^{\frac{1}{2}}\cdot(t_2-t_2)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}\tag{2·58}$$

因此,(2·54)式成立.

(i)若 $\eta<+\infty$,则由(2·58)式知, $\lim\limits_{t\to\eta-0}x(t)=x^*$ 存在.根据定理2.2知 $x^*\in\partial X$. 因 X 是开集,显然$\partial X\subset K$.

(ii)若 $\eta=+\infty$,则在(2·57)式中令 $t_1=0, t_2=t$,并注意到(2·56)式,得

$$\int_0^t \|f'(x(t))\|^2\mathrm{d}t<f(x_0)-f(x(t))\leqslant f(x_0)-c,$$

$$\forall\, 0<t<+\infty$$

由此可知, $\int_0^{+\infty}\|f'(x(t))\|^2\mathrm{d}t$ 收敛.证完

定理2.9 设 E 是实Banach空间, $f:E\to R^1$ 是 C^1 泛函,有下界,并且满足P.S.条件.那末, f 在 E 上必有最小值,即存在 $x^*\in E$,使

$$f(x^*)=\inf_{x\in E}f(x) \tag{2·59}$$

从而 x^* 是方程(2·1)的解(其中 $F(x)=\mathrm{grad}F(x), \forall x\in E$).

证 当 $f(x)\equiv\mathrm{const.}(\forall x\in E)$时,定理的结论显然成立.故下设 $f(x)\not\equiv\mathrm{const.}$ 由于 f 有下界,故 $c=\inf\limits_{x\in E}f(x)$是有限数.假定没有 $x^*\in E$,使(2·59)式成立.于是,必存在 $\tau>0$,使方程(2·1)在集 $f_{c+\tau}=\{x\in E\,|\,f(x)\leqslant c+\tau\}$内无解(若不然,必存在 $x_n\in E, c\leqslant f(x_n)\leqslant c+\dfrac{1}{n}$,使 $f'(x_n)=F(x_n)=\theta, n=1, 2,\cdots$;从而,根据P.S.条件知,存在$\{x_n\}$的子列 $x_{n_k}\to x^*\in E$,由此知 $f(x^*)=c$,矛盾).由此可知, $f_{c+\tau}\subset X=E\setminus K, K=\{x\in E\,|\,f'(x)=\theta\}$.显然 $f_{c+\tau}\neq\varnothing$.任取 $x_0\in f_{c+\tau}$,用 $x(t)$表初值问题(2·53)的惟一解(其中 $v(x)$表 $f(x)$的伪梯度),其向右最大存在区间是$[0, \eta)$.如果 $\eta<+\infty$,则由定理2.8知

$\lim\limits_{t \to \eta - 0} x(t) = x^*$ 存在且 $x^* \in K$，从而 $f'(x^*) = F(x^*) = \theta$. 但由(2·56)式知 $f(x^*) \leqslant f(x_0) \leqslant c + \tau$，故 $x^* \in f_{c+\tau}$；此与前面结论矛盾. 如果 $\eta = +\infty$，同样根据定理 2·8 知积分 $\int_0^{+\infty} \| f'(x(t)) \|^2 \mathrm{d}t$ 收敛，从而

$$\lim_{t \to +\infty} \| f'(x(t)) \| = 0,$$

因此，存在序列 $t_n \to +\infty$，使 $\| f'(x(t_n)) \| \to 0$，而由(2·56)式知

$$c \leqslant f(x(t_n)) \leqslant f(x_0), \quad (n = 1, 2, \cdots). \qquad (2·60)$$

于是，根据 P. S. 条件知，存在 $\{x(t_n)\}$ 的子列 $x(t_{n_k}) \to \bar{x} \in E$，故

$$F(\bar{x}) = f'(\bar{x}) = \lim_{k \to +\infty} f'(x(t_{n_k})) = \theta;$$

同时，由(2·60)式知 $f(\bar{x}) \leqslant f(x_0) \leqslant c + \tau$，故 $\bar{x} \in f_{c+\tau}$，此显然也与前面的结论矛盾 . 证完 .

注 9 定理2.9显然是定理 2.6 在实 Banach 空间中的推广和改进(去掉了 $\mathrm{grad} f$ 满足局部 Lipschitz 条件的要求).

有时，不仅考察泛函的最速下降流线方程(2·2)(其中 $F = \mathrm{grad} f$)，还可考察 f 的最速上升流线方程

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = F(x), \\ x(0) = x_0. \end{cases} \qquad (2·61)$$

这样，结合使用，可得下面的三解定理 .

定理 2.10(见[144]) 设 H 是实 Hilbert 空间，$f: H \to R^1$ 是 C^1 泛函，$F = \mathrm{grad} f$，$\Omega_R = \{x \in H \mid \|x\| < R\}$，$\Omega_r = \{x \in H \mid \|x\| < r\}$，其中 $R > r > 0$ 是两个实数 . 假定

(i) F 在 H 的任何有界集 S 上都满足 Lipschitz 条件，即存在常数 $K_S > 0$，使

$$\|F(x)-F(y)\| \leqslant K_S\|x-y\|, \quad \forall x, y \in S;$$

(ⅱ) $\{x_n\} \subset H$, $\{x_n\}$有界, $F(x_n) \to \theta$ 蕴涵 $\{x_n\}$ 有收敛子列;

(ⅲ) $(F(x), x) > 0$, $\forall x \in \partial \Omega_r$; $(F(x), x) < 0$, $\forall x \in \partial \Omega_R$;或者满足$(F(x), x) < 0$, $\forall x \in \partial \Omega_r$; $(F(x), x) > 0$, $\forall x \in \partial \Omega_R$. 那末,方程(2·1)在 Ω_R 中至少有三个解(即泛函 f 在Ω_R 内至少有三个临界点).

证 就$(F(x), x) > 0$, $\forall x \in \partial \Omega_r$; $(F(x), x) < 0$, $\forall x \in \partial \Omega_R$ 的情形证之(第二种情况的证明类似). 分以下几段:

(1)考察初值问题(2·61),其中 $x_0 \in H$. 设它的惟一解 $x = x(t)$的向右最大存在区间是$[0, \eta)$. 则有下列结论:(a)若存在 $t_1 \in [0, \eta)$,使 $x(t_1) \in \Omega_R$,则对一切 $t \in [t_1, \eta)$,有 $x(t) \in \Omega_R$;(b)若存在 $t_2 \in [0, \eta)$,使 $x(t_2) \overline{\in} \Omega_r$,则对一切 $t \in [t_2, \eta)$, $x(t) \overline{\in} \Omega_r$;(c) $f(x(t))$是 t 的增函数, $0 \leqslant t < \eta$;(d)若集 $\{x(t) \mid t \in [0, \eta)\}$有界,则 $\eta = +\infty$,且存在 $t_n \to +\infty$,使$\lim\limits_{n \to \infty} x(t_n) = x^*$存在, $F(x^*) = \theta$. 下面分别证明:

(a)若不成立,则必存在 $t^* \in [t_1, \eta)$,使 $x(t^*) \in \partial \Omega_R$,且当 $t_1 \leqslant t < t^*$ 时,恒有 $x(t) \in \Omega_R$,从而$\|x(t)\| < R$. 注意到$\|x(t^*)\| = R$,故有

$$\begin{aligned}
&(F(x(t^*)), x(t^*)) = (x'(t^*), x(t^*)) \\
&= \lim_{t \to t^*-0} \frac{1}{t^*-t}(x(t^*)-x(t), x(t^*)) \\
&\geqslant \varlimsup_{t \to t^*-0} \frac{1}{t^*-t}\{\|x(t^*)\|^2-\|x(t)\| \cdot \|x(t^*)\|\} \\
&\geqslant 0,
\end{aligned}$$

此与条件(ⅲ)矛盾.

(b)若不成立,则必存在 $t_2 \leqslant \bar{t} < t_3 < \eta$, 使 $x(\bar{t}) \in \partial \Omega_r$, 且当 $\bar{t} < t \leqslant t_3$ 时, 恒有 $x(t) \in \Omega_r$, 从而 $\|x(t)\| < r$. 注意到 $\|x(\bar{t})\| = r$,故有

$$(F(x(\bar{t})), x(\bar{t})) = (x'(\bar{t}), x(\bar{t}))$$

$$= \lim_{t \to \bar{t}+0} \frac{1}{t - \bar{t}}(x(t) - x(\bar{t}), x(\bar{t}))$$

$$\leqslant \overline{\lim_{t \to \bar{t}+0}} \frac{1}{t - \bar{t}} \{\|x(t)\| \cdot \|x(\bar{t})\| - \|x(\bar{t})\|^2\}$$

$$\leqslant 0,$$

此与条件(ⅲ)矛盾.

(c)当 $0 \leqslant t_1 < t_2 < \eta$ 时,有

$$f(x(t_2)) - f(x(t_1)) = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} f(x(s))\right] \mathrm{d}s$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} (f'(x(s)), x'(s)) \mathrm{d}s$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \|x'(s)\|^2 \mathrm{d}s \geqslant 0, \tag{2·62}$$

故 $f(x(t))$是 t 的增函数.

(d)因 $\{x(t) | 0 \leqslant t < \eta\}$有界,根据条件(ⅰ)并利用第一章定理 3.4(ⅰ)易知 $\{f(x(t)) | 0 \leqslant t < \eta\}$有界. 令 $\beta = \sup\limits_{t \in [0, \eta)} f(x(t)) < +\infty$. 则由(2·62)式知:当 $0 \leqslant t_1 < t_2 < \eta$ 时,有

$$\|x(t_2) - x(t_1)\| = \left\| \int_{t_1}^{t_2} x'(s) \mathrm{d}s \right\|$$

$$\leqslant \left(\int_{t_1}^{t_2} \|x'(s)\|^2 \mathrm{d}s \right)^{\frac{1}{2}} \cdot (t_2 - t_1)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant [\beta - f(x_0)]^{\frac{1}{2}} \cdot (t_2 - t_1)^{\frac{1}{2}} \tag{2·63}$$

于是,仿定理 2.4 之证,可知 $\eta = +\infty$. 在(2·62)式中令 $t_1 = 0$,

$t_2 \to +\infty$，得

$$\int_0^{+\infty} \|F(x(s))\|^2 ds = \int_0^{+\infty} \|x'(s)\|^2 ds$$

$$\leqslant \beta - f(x_0) < +\infty,$$

故存在 $t_n \to +\infty$，使 $\|F(x(t_n))\| \to 0$. 于是，根据条件(ⅱ)知，存在 $\{x(t_n)\}$ 的子列 $x(t_{n_k}) \to x^* \in H$. 显然，$F(x^*) = \theta$.

(2)考察初值问题(2·2)，其中 $x_0 \in H$. 设它的惟一解 $x = x(t)$ 的向右最大存在区间是 $[0, \eta)$. 则可类似地证明下列结论：(a′)若存在 $t_1 \in [0, \eta)$，使 $x(t_1) \in \Omega_r$，则对一切 $t \in [t_1, \eta)$，有 $x(t) \in \Omega_r$；(b′)若存在 $t_2 \in [0, \eta)$，使 $x(t_2) \overline{\in} \Omega_R$，则对一切 $t \in [t_2, \eta)$，有 $x(t) \overline{\in} \Omega_R$；(c′) $f(x(t))$ 是 t 的减函数，$0 \leqslant t < \eta$；(d′)若集 $\{x(t) \mid t \in [0, \eta)\}$ 有界，则 $\eta = +\infty$ 且存在 $t_n \to +\infty$ 使 $\lim\limits_{n \to +\infty} x(t_n) = x^*$ 存在，$F(x^*) = \theta$.

(3)本段证明方程(2·1)在 $\Omega_R \setminus \bar{\Omega}_r$ 中至少有两个解．当 H 的维数等于1时，有 $\Omega_R \setminus \bar{\Omega}_r = (-R, -r) \cup (r, R)$. 任取 $x_0 \in (r, R)$，考察初值问题(2·61)，其惟一解 $x = x(t)$ 的向右最大存在区间为 $[0, \eta)$. 根据(1)的结论(a)与(b)，并注意到 $\{x(t) \mid t \in [0, \eta)\}$ 是连通集，故必有 $\{x(t) \mid t \in [0, \eta)\} \subset (r, R)$，从而 $\{x(t) \mid t \in [0, \eta)\}$ 有界，于是，根据(1)结论(d)又知，存在 $x^* \in [r, R]$，使 $F(x^*) = \theta$. 由条件(ⅲ)知 $x^* \overline{\in} \partial\Omega_r$，$x^* \overline{\in} \partial\Omega_R$，故 $x^* \in (r, R)$. 同理可证存在 $x^{**} \in (-R, -r)$，使 $F(x^{**}) = \theta$. 即方程(2·1)在 $\Omega_R \setminus \bar{\Omega}_r$ 中至少有两个解．

下设 H 的维数大于1；任取 $x_0 \in \Omega_R \setminus \bar{\Omega}_r$，考察初值问题(2·61)，其惟一解 $x = x(t)$ 的向右最大存在区间为 $[0, \eta)$. 根据(1)的结论(a)与(b)知 $\{x(t) \mid t \in [0, \eta)\} \subset \Omega_R \setminus \Omega_r$，从而

$\{x(t)\mid t\in[0,\eta)\}$有界．于是，根据(1)的结论(d)又知，存在 $x^*\in\overline{\Omega_R\setminus\Omega_r}=\bar{\Omega}_R\setminus\Omega_r$，使 $F(x^*)=\theta$．由条件(iii)知 $x^*\overline{\in}\partial\Omega_r$，$x^*\overline{\in}\partial\Omega_R$，故 $x^*\in\Omega_R\setminus\bar{\Omega}_r$．

由条件(ii)知 $f(x)$在 H 中任何有界集上都是有界的，故 $M=\sup\limits_{x\in\Omega_R\setminus\bar{\Omega}_r}f(x)$是有限数．分三种情况：

1° 若 $f(x^*)\neq M$．则存在 $x_1\in\Omega_R\setminus\bar{\Omega}_r$，使 $f(x_1)>f(x^*)$．仍考察初值问题(2·61)，但将其中的 x_0 换为 x_1．重复上面的讨论知，存在 $x_1^*\in\Omega_R\setminus\bar{\Omega}_r$，使 $F(x_1^*)=\theta$，且根据(1)结论(c)与(d)知 $f(x_1^*)\geqslant f(x_1)>f(x^*)$，从而 $x_1^*\neq x^*$，故 x^*，x_1^* 是方程(2·1)在 $\Omega_R\setminus\bar{\Omega}_r$ 中的两个解．

2° 若 $f(x^*)=M$ 且存在 $x_2^*\in\Omega_R\setminus\bar{\Omega}_r$，使 $x_2^*\neq x^*$，$f(x_2^*)=M$．根据定理 1.4 知，$F(x_2^*)=f'(x_2^*)=\theta$．故这时 x^*，x_2^* 是方程(2·1)在 $\Omega_R\setminus\bar{\Omega}_r$ 中的两个解．

3° 若 $f(x^*)=M$，且 $f(x)<M$，$\forall x\in\Omega_R\setminus\bar{\Omega}_r$，$x\neq x^*$．用 $x=x(t,x_0)$表初值问题(2·2)的惟一解，其向右最大存在区间是$[0,\eta(x_0))$．令 $D=\bar{\Omega}_R\setminus(\Omega_r\cup\{x^*\})$，并令

$$D_1=\{x_0\in D\mid \text{存在}\ t^*\in[0,\eta(x_0)),\text{使}\ x(t^*,x_0)\in\Omega_r\},$$

$$D_2=\{x_0\in D\mid \text{对一切}\ t\in[0,\eta(x_0)),\text{有}\ x(t,x_0)\overline{\in}\Omega_r\},$$

$$D_3=\{x_0\in D\mid \text{存在}\ t^*\in[0,\eta(x_0)),\text{使}\ x(t^*,x_0)\overline{\in}\bar{\Omega}_R\},$$

$$D_4=\{x_0\in D\mid \text{对一切}\ t\in[0,\eta(x_0)),\text{有}\ x(t,x_0)\in\bar{\Omega}_R\setminus\Omega_r\},$$

显然 $D=D_1\cup D_2$，$D_1\cap D_2=\varnothing$；$D_2=D_3\cup D_4$，$D_3\cap D_4=\varnothing$．我们证明 $D_4\neq\varnothing$．用反证法．假定 $D_4=\varnothing$，这时必有 $D_1\neq\varnothing$，因为如果 $D_1=\varnothing$，则 $D=D_3$．任取 $x_0\in\partial\Omega_r\subset D$，则存在 $t^*\in$

$[0, \eta(x_0))$,使 $x(t^*, x_0) \overline{\in} \bar{\Omega}_R$. 根据定理 2.3 知,可取 $y_0 \in \Omega_r$,(y_0 与 x_0 充分近),使 $\eta(y_0) > t^*$,且 $x(t^*, y_0) \overline{\in} \Omega_R$,此显然与(2)结论(a′)矛盾. 故 $D_1 \neq \varnothing$ 获证. 另外,根据(2)结论(b′)知$\partial \Omega_R \subset D_3 \cup D_4 = D_3$,故 $D_3 \neq \varnothing$. 又,根据定理 2.3 知,D_1 与 D_3 都是 D 的相对开集. 此外. $D = D_1 \cup D_3$, $D_1 \cap D_3 = \varnothing$. 此与 D 的连通性矛盾(因已设 H 的维数大于 1,故 D 显然是道路连通的,从而是连通的). 于是,$D_4 \neq \varnothing$ 获证.

取 $x_0 \in D_4$. 于是 $\{x(t, x_0) \mid t \in [0, \eta(x_0))\} \subset \bar{\Omega}_R \setminus \Omega_r$ 有界,从而根据(2)结论(d′)知 $\eta(x_0) = +\infty$ 且存在 $t_n \to +\infty$,使 $x(t_n) \to x_3^*$, $F(x_3^*) = \theta$. 显然 $x_3^* \in \bar{\Omega}_R \setminus \Omega_r$. 由条件(ⅲ)知 $x_3^* \overline{\in} \partial \Omega_R \cup \partial \Omega_r$,从而 $x_3^* \in \Omega_R \setminus \bar{\Omega}_r$. 下证 $x_3^* \neq x^*$. 用反证法:如果 $x_3^* = x^*$,则由(2)结论(c′)知 $f(x(t)) \equiv M$, $\forall t \in [0, +\infty)$. 于是

$$0 \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(x(t)) = (F(x(t)), x'(t)) = -\|F(x(t))\|^2,$$

从而,令 $t = 0$ 知 $F(x_0) = \theta$. 再由条件(ⅲ)知 $x_0 \overline{\in} \partial \Omega_r \cup \partial \Omega_R$,故 $x_0 \in \Omega_R \cup \bar{\Omega}_r$. 但因 $x_0 \in D_4 \subset D$,故 $x_0 \neq x^*$,而 $f(x_0) = M$,此显然与最初的假定矛盾. 由此可知 $x_3^* \neq x^*$,从而 x^*, x_3^* 是方程(2·1)在 $\Omega_R \setminus \bar{\Omega}_r$ 中的两个解.

(4)最后证明方程(2·1)在 Ω_r 中至少有一解. 任取 $x_0 \in \Omega_r$,用 $x = x(t, x_0)$表初值问题(2·2)的惟一解,其向右最大存在区间是$[0, \eta(x_0))$. 根据(2)结论(a′)知, $\{x(t, x_0) \mid t \in [0, \eta(x_0))\} \subset \Omega_r$ 是有界集,从而根据(2)结论(d′)知,存在 $x_* \in \bar{\Omega}_r$,使 $F(x_*) = \theta$. 再由条件(ⅲ)知 $x_* \overline{\in} \partial \Omega_r$,从而 $x_* \in \Omega_r$.

至此，定理全部证完．

系 设 H 是实 Hilbert 空间，$A:H\to H$ 全连续，在 H 的任何有界集上都满足 Lipschitz 条件，并且是梯度算子，即存在 C^1 泛函 $\varphi: H\to R^1$，使 $\operatorname{grad}\varphi(x)=Ax$，$\forall x\in H$. $\Omega_R=\{x\in H\mid \|x\|<r\}$，$\Omega_r=\{x\in H\mid \|x\|<r\}$，$R>r>0$. 定满足下面两个条件之一：

(i′) $(Ax,x)<\|x\|^2$，$\forall x\in\partial\Omega_r$；$(Ax,x)>\|x\|^2$，$\forall x\in\partial\Omega_R$；

(ii′) $(Ax,x)>\|x\|^2$，$\forall x\in\partial\Omega_r$；$(Ax,x)<\|x\|^2$，$\forall x\in\partial\Omega_R$. 则 A 在 Ω_R 中至少有三个不动点．

证 令 $f(x)=\dfrac{1}{2}(x,x)-\varphi(x)$，$\forall x\in H$，则 $f:H\to R^1$ 是 C^1 泛函，且 $\operatorname{grad} f=I-A$. 显然 $F=I-A$ 在 H 的任何有界集上也满足 Lipschitz 条件．下证定理 2.10 的条件(ii)满足．事实上，设 $\{x_n\}\subset H$，$\{x_n\}$ 有界，使得 $F(x_n)=(I-A)x_n=x_n-Ax_n\to\theta$，则由 A 的全连续性知，存在 $\{x_n\}$ 的子列 $\{x_{n_k}\}$ 使 $Ax_{n_k}\to y_0\in H$，从而 $x_{n_k}\to y_0$. 故条件(ii)满足．另外，条件(iii)显然就是现在的条件(i′)与(ii′)之一．于是，根据定理 2.10，即知 A 在 Ω_R 中至少具有三个不动点．证完．

注 10 如果利用拓扑度理论，则在定理 2.10 的系的条件下，最多只能断定 A 在 Ω_R 中具有两个不动点．不过，利用拓扑度理论时，我们不要求 A 是梯度算子，也不要求它满足 Lipschitz 条件．所以，各有特点．

将定理 2.10 的证明略加修改，可证下面的定理，它可称为 Hilbert 空间中的锐角原理和钝角原理．

定理 2.11 设 H 是实 Hilbert 空间，$\Omega_R=\{x\in H\mid \|x\|<$

$R\}$, $\Omega_r=\{x\in H\mid \|x\|<r\}$, $R>r>0$. 设 $f:\Omega_R\to R^1$ 是 C^1 泛函且 $F=\mathrm{grad}f$ 在 Ω_R 上满足 Lipschitz 条件．如果

（ⅰ）$\{x_n\}\subset\Omega_r$, $F(x_n)\to\theta$ 蕴涵 $\{x_n\}$ 有收敛子列；

（ⅱ）$(F(x),x)\geqslant 0$, $\forall x\in\partial\Omega_r$；或者 $(F(x),x)\leqslant 0$, $\forall x\in\partial\Omega_r$．那末，方程(2·1)在闭球 $\bar{\Omega}_r$ 中必有解．

证 不妨设 $(F(x),x)\leqslant 0$, $\forall x\in\partial\Omega_r$（另一种情况的证明类似）．取 $x_0\in\Omega_r$．对任给 $\varepsilon>0$，考察初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=F(x)-\varepsilon x,\\ x(0)=x_0.\end{cases}\tag{2·64}$$

显然 $\mathrm{grad}f_\varepsilon(x)=F_\varepsilon(x)$, $\forall x\in\Omega_R$，其中已令 $f_\varepsilon(x)=f(x)-\dfrac{1}{2}\varepsilon(x,x)$, $F_\varepsilon(x)=F(x)-\varepsilon x$．很明显，$f_\varepsilon:\Omega_R\to R^1$ 也是 C^1 泛函，F_ε 在 Ω_R 上也满足 Lipschitz 条件．用 $x=x_\varepsilon(t)$ 表初值问题(2·64)的惟一解，其向右最大存在区间为 $[0,\eta)$．仿定理 2.10 证明中的结论(a)与(d)，可证：(a_1) $x_\varepsilon(t)\in\Omega_r$, $\forall t\in[0,\eta)$；(d_1) $\eta=+\infty$，且存在 $t_m\to+\infty$，使 $\|F_\varepsilon(x_\varepsilon(t_m))\|\to 0\ (m\to\infty)$．

(a_1)的证明如下．若(a_1)不成立，则存在 $t^*\in(0,\eta)$，使 $x_\varepsilon(t^*)\in\partial\Omega_r$，且当 $0\leqslant t<t^*$ 时，恒有 $x_\varepsilon(t)\in\Omega_r$，从而 $\|x_\varepsilon(t)\|<r$．注意到 $\|x_\varepsilon(t^*)\|=r$，于是

$$\begin{aligned}&(F(x_\varepsilon(t^*)),x_\varepsilon(t^*))\\ &=(\varepsilon x_\varepsilon(t^*)+F_\varepsilon(x_\varepsilon(t^*)),x_\varepsilon(t^*))\\ &=\varepsilon r^2+(x_\varepsilon'(t^*),x_\varepsilon(t^*))\\ &=\varepsilon r^2+\lim_{t\to t^*-0}\frac{1}{t^*-t}(x_\varepsilon(t^*)-x_\varepsilon(t),x_\varepsilon(t^*))\\ &\geqslant\varepsilon r^2+\varlimsup_{t\to t^*-0}\frac{1}{t^*-t}\{\|x_\varepsilon(t^*)\|^2-\|x_\varepsilon(t)\|\end{aligned}$$

$$\cdot \| x_\varepsilon(t^*) \| \} \geqslant \varepsilon r^2 > 0,$$

此与假定(ⅱ)矛盾．故(a_1)成立．

(d_1)的证明与定理 2.10 证明中结论(d)的证明完全类似，从略．

现取一串正数 $\epsilon_n \to 0$. 由结论(d_1)与(a_1)知，可取 $s_n \to +\infty$ 使

$$\| F_{\varepsilon_n}(x_{\varepsilon_n}(s_n)) \| = \| F(x_{\varepsilon_n}(s_n)) - \varepsilon_n x_{\varepsilon_n}(s_n) \| < \frac{1}{n},$$

$$(n = 1, 2, \cdots),$$

$$\| x_{\varepsilon_n}(s_n) \| < r, \qquad (n = 1, 2, \cdots),$$

故$\| F(x_{\varepsilon_n}(s_n)) \| \to 0$. 于是，根据条件(ⅰ)知$\{ x_{\varepsilon_n}(s_n) \}$存在收敛子列，不妨设$\{ x_{\varepsilon_n}(s_n) \}$本身：$x_{\varepsilon_n}(s_n) \to x^* \in \bar{\Omega}_r$. 显然，有 $F(x^*) = \theta$. 证完．

例 2.1 令 $H = R^2$, $F: R^2 \to R^2$ 定义如下：

$$Fz = (4x^3 + 4xy^2 - 4x + 1, 4x^2 y + 4y^3 - 4y),$$

$$\forall z = (x, y) \in R^2.$$

由于

$$\frac{\partial}{\partial y}(4x^3 + 4xy^2 - 4x + 1) = \frac{\partial}{\partial x}(4x^2 y + 4y^3 - 4y),$$

$$\forall (x, y) \in R^2,$$

故 F 是梯度算子．显然，定理 2.10 的条件(ⅰ)与(ⅱ)满足．下面验证，对 $R = 2$, $r = 0.6$, 条件(ⅲ)满足．事实上，有

$$(Fz, z) = 4(x^2 + y^2)^2 - 4(x^2 + y^2) + x.$$

故当 $z = (x, y) \in \partial \Omega_R$(即 $x^2 + y^2 = 4$)时，恒有

$$(Fz, z) = 48 + x \geqslant 46 > 0;$$

当 $z \in (x, y) \in \partial \Omega_r$(即 $x^2 + y^2 = 0.36$)时，恒有

$$(Fz, z) = -0.9216 + x \leqslant -0.9216 + 0.6 < 0.$$

于是,根据定理 2.10 知,方程 $Fz = \theta$ 在 Ω_R 中至少有三个解.

还可以直接判断方程 $Fz = \theta$ 恰好有三个解,且均在 Ω_R 内.事实上,方程 $Fz = \theta$ 等价于方程组

$$(\text{I})\begin{cases} 4x^3 + 4xy^2 - 4x + 1 = 0, \\ y = 0 \end{cases} \qquad 与$$

$$(\text{II})\begin{cases} 4x^3 + 4xy^2 - 4x + 1 = 0 \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

方程组(Ⅱ)显然无解.方程组(Ⅰ)化为 $4x^3 - 4x + 1 = 0, y = 0$. 令 $\varphi(x) = 4x^3 - 4x + 1$. 易知 $\varphi(-2) = -23 < 0, \varphi(-0.6) = 2.536 > 0, \varphi(0.6) = -0.536 < 0, \varphi(2) = 25 > 0$. 故方程 $4x^3 - 4x + 1 = 0$ 恰好有三个解 x_1, x_2, x_3,满足

$$-2 < x_1 < -0.6 < x_2 < 0.6 < x_3 < 2,$$

因此,方程 $Fz = \theta$ 恰好有三个解 $z_1 = (x_1, 0), z_2 = (x_2, 0), z_3 = (x_3, 0)$. 显然, z_1, z_2, z_3 都在 Ω_R 内.

§3 Minimax 原理

设 E 是实 Banach 空间, $f: E \to R^1$ 是 C^1 泛函.对 $a \in R^1$,称集 $f_a = \{x \in E \mid f(x) \leqslant a\}$ 为 f 的**水平集**.考察当 a 变化时 f_a 的拓扑结构的变化(参看下面引理 3.2),就可以建立 **Minimax 原理**,它是临界点理论的基本定理之一.由它可推出一些重要的结果,特别是可推出 Mountain Pass Lemma(山路引理).

引理 3.1 设 E 是实 Banach 空间, $f: E \to R^1$ 是 C^1 泛函,满足 P.S. 条件.又设 $a, b \in R^1, a \leqslant b, K \cap f^{-1}([a, b]) = \varnothing$,这里 $K = \{x \in E \mid f'(x) = \theta\}$. 那末

(ⅰ)必有 $\varepsilon_0>0$ 及 $\delta_0>0$ 存在,使

$$\|f'(x)\|\geqslant\varepsilon_0,\quad \forall x\in f^{-1}([a-\delta_0, b-\delta_0]). \tag{3·1}$$

(ⅱ)设 $x_0\in f^{-1}([a,b])$,用 $x=x(t)$ 表初值问题(2·53)的惟一解,其向右最大存在区间是 $[0,\eta)$,则函数 $f(x(t))$ 在 $0\leqslant t<\eta$ 上是严格减少的,并且

$$-\infty\leqslant\lim_{t\to\eta-0}f(x(t))<a, \tag{3·2}$$

其中,当 $\eta=+\infty$ 时,$t\to\eta-0$ 表 $t\to+\infty$.

证 (ⅰ)用反证法.假定结论不成立,则存在 $x_n\in f^{-1}\left(\left[a-\frac{1}{n}, b-\frac{1}{n}\right]\right)$,使 $\|f'(x_n)\|<\frac{1}{n}(n=1,2,\cdots)$.于是根据 f 满足 P.S. 条件知 $\{x_n\}$ 有收敛子列:$x_{n_k}\to x^*$.显然,$x^*\in f^{-1}([a,b])$ 且 $f'(x^*)=\theta$,此与 $K\cap f^{-1}([a,b])=\varnothing$ 矛盾.

(ⅱ)首先,由 $x_0\in f^{-1}([a,b])$, $K\cap f^{-1}([a,b])=\varnothing$ 知 $x_0\in E\setminus K=X$.于是 f 不恒为常数.由(2·55)式即知,$f(x(t))$ 在 $0\leqslant t<\eta$ 上是严格减少的,于是(3·2)式中的极限必存在(可能是 $-\infty$).假定(3·2)式不成立,则

$$\lim_{t\to\eta-0}f(x(t))\geqslant a. \tag{3·3}$$

从而

$$x(t)\in f^{-1}([a,b]),\quad \forall t\in[0,\eta), \tag{3·4}$$

由此,根据(ⅰ)知

$$\|f'(x(t))\|\geqslant\varepsilon_0,\quad \forall t\in[0,\eta). \tag{3·5}$$

于是,由(2·55)式,得

$$b-a\geqslant f(x_0)-f(x(t))\geqslant\int_0^t\|f'(x(s))\|^2\mathrm{d}s\geqslant\varepsilon_0^2t,$$

$$\forall t\in[0,\eta). \tag{3·6}$$

由此可知 η 是有限数，且 $\eta \leqslant \frac{b-a}{\varepsilon_0^2}$．另外，由(3·4)式知 $\{f(x(t)) \mid t \in [0, \eta)\}$ 是有界的．根据定理 2.8(i)知，$\lim_{t \to \eta - 0} x(t) = x^*$ 存在，且 $x^* \in K$．但由(3·4)式又知，有 $x^* \in f^{-1}([a, b])$，此显然与 $K \cap f^{-1}([a, b]) = \varnothing$ 矛盾．证完．

引理 3.2 设 E 是实 Banach 空间，$f: E \to R^1$ 是 C^1 泛函，满足 P.S. 条件．又设 $a, b \in R^1$, $a < b$, $K \cap f^{-1}([a, b]) = \varnothing$, $K = \{x \in E \mid f'(x) = \theta\}$．那末，水平集 f_a 必定是 f_b 的一个收缩核，即存在连续映象 $\psi: f_b \to f_a$，使当 $x \in f_a$ 时，恒有 $\psi(x) = x$．

证 显然，$f_a \subset f_b$．若 $f^{-1}([a, b]) = \varnothing$，则 $f_a = f_b$，这时 f_a 显然是 f_b 的收缩核．故下设 $f^{-1}([a, b]) \neq \varnothing$．对 $x_0 \in f^{-1}([a, b])$，用 $x(t, x_0)$ 表初值问题(2·53)的惟一解，其向右最大存在区间是 $[0, \eta(x_0))$．于是，根据引理 3.1(ii)知：$f(x(t, x_0))$ 是 $[0, \eta(x_0))$ 上的严格减函数，且有

$$\lim_{t \to \eta(x_0) - 0} f(x(t, x_0)) < a;$$

由此可知，必存在惟一的 $t_x \in [0, \eta(x_0))$，使

$$f(x(t_{x_0}, x_0)) = a. \tag{3·7}$$

定义映象 μ 如下：$\mu(x_0) = t_{x_0}$ 下证映象 $\mu: f^{-1}([a, b]) \to R^1$ 是连续的．考虑方程

$$f(x(t, z)) = a. \tag{3·8}$$

任意给定 $x_0 \in f^{-1}([a, b])$，根据解对初值的连续依赖性(定理 2.3)，易知在 (x_0, t_{x_0}) 的某充分小的邻域内，$x(t, z)$ 是两变元 (z, t) 的连续(抽象)函数，从而在此邻域内，$f(x(t, z))$ 是两变元连续的．另外

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x(t, z)) = (f'(x(t, z)), x'(t, z))$$

$$= -(f'(x(t,z)), v(x(t,z))). \tag{3·9}$$

故$\frac{\partial}{\partial t}f(x(t,z))$在此邻域内也是两变元连续的，并且在此邻域内，由(3·9)式知

$$\frac{\partial}{\partial t}f(x(t,z)) < -\|f'(x(t,z))\|^2 \leqslant 0, \tag{3·10}$$

特别

$$\frac{\partial}{\partial t}f(x(t,z))\Big|(x_0, t_{x_0}) \neq 0 (\text{实际}, <0).$$

于是，根据隐函数定理(第一章定理 4.1)，知在(x_0, t_{x_0})的某邻域内，方程(3·8)具有惟一解 $t = v(z)$($t_{x_0} = v(x_0)$)，并且映象 v 在 x_0 的某邻域内是连续的．由惟一性知，在 x_0 的此邻域内，必然有 $v(z) \equiv \mu(z)$，故映象 μ 在 x_0 处是连续的．由 $x_0 \in f^{-1}([a,b])$的任意性，即知映象 μ 是连续的．

今定义映象 ψ 如下(注意，$f_b \setminus f_a \subset f^{-1}([a,b])$)：

$$\psi(z) = \begin{cases} z, & z \in f_a; \\ x(\mu(z), z), & z \in f_b \setminus f_a. \end{cases}$$

显然，$\psi: f_b \to f_a$，且当 $z \in f_a$ 时 $\psi(z) = z$．下证 ψ 是连续的．由映象 μ 的连续性及解对初值的连续依赖性，易知 ψ 在 $f_b \setminus f_a$ 上是连续的．另外，显然 ψ 在 f_a 的内点处也是连续的．故只需证明 ψ 在∂f_a 上每一点连续即可．设 $x_0 \in \partial f_a$，则 $f(x_0) = a$，$\psi(x_0) = x_0$．任给 $\varepsilon > 0$，注意到 $x_0 \in f^{-1}([a,b])$，且 $\mu(x_0) = 0$，由 $\mu(z)$在 $z = x_0$ 的连续性知，存在 $\delta_0 > 0$，使当$\|z - x_0\| < \delta_0$，且 $z \in f^{-1}([a,b])$时，恒有

$$|\mu(z)| = |\mu(z) - \mu(x_0)| < \frac{\varepsilon^2}{16(b-a)}. \tag{3·11}$$

令 $\delta = \min\left\{\frac{\varepsilon}{2}, \delta_0\right\}$．下证当$\|z - x_0\| < \delta$ 时，恒有

$$\|\psi(z)-\psi(x_0)\|<\varepsilon. \tag{3·12}$$

事实上，若 $z\in f_a$，则 $\psi(z)=z$，从而 $\|\psi(z)-\psi(x_0)\|=\|z-x_0\|<\delta\leqslant\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$，故(3·12)式成立；若 $z\in f_b\setminus f_a$，则有 $\psi(z)=x(\mu(z),z)$，从而

$$\begin{aligned}
&\|\psi(z)-\psi(x_0)\|\\
&\leqslant\|x(\mu(z),z)-z\|+\|z-x_0\|\\
&=\|z-x_0\|+\left\|\int_0^{\mu(z)}x'(t,z)\mathrm{d}t\right\|\\
&<\delta+\int_0^{\mu(z)}\|v(x(t,z))\|\mathrm{d}t\\
&\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+2\int_0^{\mu(z)}\|f'(x(t,z))\|\mathrm{d}t\\
&\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+2\left(\int_0^{\mu(z)}\|f'(x(t,z))\|^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}\cdot[\mu(z)]^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned} \tag{3·13}$$

另一方面，由于

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}f(x(t,z))=(f'(x(t,z)),x'(t,z))\\
&=-(f'(x(t,z)),v(x(t,v)))<-\|f'(x(t,z))\|^2,\\
&\qquad\forall\, t\in[0,\eta(z))
\end{aligned}$$

从而 $f(x(t,z))$ 在 $0\leqslant t<\eta(z)$ 上是严格减小的，并且

$$\int_0^{\mu(z)}\|f'(x(t,z))\|^2\leqslant f(z)-f(x(\mu(z),z))\leqslant b-a \tag{3·14}$$

于是，由(3·13)、(3·14)及(3·11)知：

$$\|\psi(z)-\psi(x_0)\|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

即(3·12)式成立．故 ψ 在 x_0 的连续性获证．证完．

定理 3.1(Minimax 原理)　设 E 是实 Banach 空间，$f:E\to$

R^1 是 C^1 泛函，满足 P.S. 条件．又设 $\Delta=\{D\}$ 是 E 的一个子集族．令

$$c=\inf_{D\in\Delta}\sup_{x\in D}f(x).$$

如果满足条件：

(i) c 是一个有限数；

(ii) 存在 $\delta>0$，使得对于满足条件 $\psi(x)=x,\ \forall x\in f_{c-\delta}$ 的任何连续映象 $\psi:S\to E,\ S\supset f_{c-\delta}$，都有：

$$\psi(D)\in\Delta,\quad \forall D\in\Delta,\quad D\subset S.$$

那末，c 必是 f 的临界值，即必存在 $x^*\in E$，使得 $f'(x^*)=\theta$，且 $f(x^*)=c$．

证 用反证法．假定 c 不是临界值，则有 $K\cap f^{-1}(c)=\varnothing$．于是，根据引理 3.1(i) 知，存在 δ_0，满足 $0<\delta_0<\delta$，且使 $K\cap f^{-1}([c-\delta_0,c+\delta_0])=\varnothing$．再根据引理 3.2 知，存在连续映象 $\psi_0:f_{c+\delta_0}\to f_{c-\delta_0}$，使当 $x\in f_{c-\delta_0}$ 时，恒有 $\psi_0(x)=x$．由于 $f_{c-\delta}\subset f_{c-\delta_0}$，故当 $x\in f_{c-\delta}$ 时，恒有 $\psi_0(x)=x$．由 c 的定义，存在 $D_0\in\Delta$，使

$$\sup_{x\in D_0}f(x)<c+\delta_0,$$

故 $D_0\subset f_{c+\delta_0}$．于是根据条件(ii)(在其中取 $S=f_{c+\delta_0}$)，知 $\psi_0(D_0)\in\Delta$，因此

$$\sup_{x\in\psi_0(D_0)}f(x)\geqslant c.\tag{3·15}$$

但另一方面，$\psi_0(D_0)\subset f_{c-\delta_0}$ 故

$$\sup_{x\in\psi_0(D_0)}f(x)\leqslant c-\delta_0,$$

此与(3·15)式矛盾．证完．

系 1 设 E 是实 Banach 空间，$f:E\to R^1$ 是 C^1 泛函，满足

P.S. 条件，并且 f 在 E 上有下界，那末 $c=\inf\limits_{x\in E}f(x)$ 必是 f 的一个临界值．

证 在定理 3.1 中令 $\Delta=\{\{x\}\mid x\in E\}$，即获证．

系 2 设 E 是实 Banach 空间，$f:E\to R^1$ 是 C^1 泛函，满足 P.S. 条件，并且 f 在 E 上有上界，那末 $c=\sup\limits_{x\in E}f(x)$ 必是 f 的一个临界值．

证 考察泛函 $-f$，即化为系 1 的情形．

注 1 上述系 1 的结论即是定理 2.9.

利用 Minimax 原理，可证下面的山路引理．

定理 3.2（Mountain Pass Lemma） 设 E 是实 Banach 空间，$f:E\to R^1$ 是 C^1 泛函，满足 P.S. 条件，$x_0,x_1\in E$，Ω 是 x_0 的开邻域，$x_1\overline{\in}\overline{\Omega}$. 假定

$$\max\{f(x_0),f(x_1)\}<\inf_{x\in\partial\Omega}f(x). \tag{3·16}$$

令

$$c=\inf_{h\in\Phi}\max_{t\in[0,1]}f(h(t)), \tag{3·17}$$

其中 $\Phi=\{h\mid h:[0,1]\to E$ 连续，且使 $h(0)=x_0$，$h(1)=x_1\}$（即 Φ 由 E 中联结 x_0 和 x_1 的一切道路组成）. 那末，c 必是 f 的临界值，即存在 $x^*\in E$，使 $f'(x^*)=\theta$，且 $f(x^*)=c$.

证 令 $c_0=\inf\limits_{x\in\partial\Omega}f(x)$，$c_1=\max\{f(x_0),f(x_1)\}$. 由假定知（图 5－3·1）

$$c_1<c_0\leqslant c<+\infty$$

故 c 是有限数．因此，定理3.1 的条件（ⅰ）满足（取定理 3.1 中的 Δ 为由 E 中联结 x_0 与 x_1

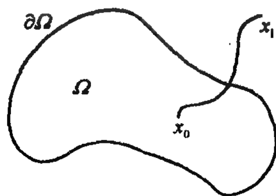


图 5－3·1

的一切道路组成)．下证条件(ⅱ)也满足．事实上，取 $0<\delta<c_0-c_1$，设连续映象 $\psi: S\to F(S\supset f_{c-\delta})$ 满足 $\psi(x)=x$, $\forall x\in f_{c-\delta}$．对任何 $h\in\Phi$, $\{h(t)\mid 0\leqslant t\leqslant 1\}\subset S$，要证 $\psi h\in\Phi$．显然 $\psi h:[0,1]\to E$ 连续．我们有 $f(x_0)\leqslant c_1<c_0-\delta\leqslant c-\delta$, $f(x_1)\leqslant c_1<c_0-\delta\leqslant c-\delta$，故 $x_0, x_1\in f_{c-\delta}$，因此 $\psi(x_0)=x_0$, $\psi(x_1)=x_1$．由此可知 $\psi h(0)=\psi(x_0)=x_0$, $\psi h(1)=\psi(x_1)=x_1$，从而 $\psi h\in\Phi$．故定理 3.1 的条件(ⅱ)也满足．因此，根据定理 3.1 知，c 是 f 的一个临界值．证完．

Mountain Pass Lemma(山路引理)是临界点理论中一条重要的定理．下面给出它的另一直接证法．

仍令 $c_0=\inf\limits_{x\in\partial\Omega} f(x)$, $c_1=\max\{f(x_0), f(x_1)\}$．由假定知

$$c_1<c_0,\quad c_0\leqslant c<+\infty,$$

故 c 是有限数．假定 c 不是 f 的临界值，则根据引理 3.1(ⅰ)知，存在 $\varepsilon_0>0$ 及 $0<\delta_0<c_0-c_1$，使

$$\|f'(x)\|\geqslant\varepsilon_0,\quad \forall\, c-\delta_0\leqslant f(x)\leqslant c+\delta_0. \tag{3·18}$$

根据 c 的定义，存在 $h_0\in\Phi$(即 $h_0:[0,1]\to E$ 连续，且 $h_0(0)=x_0$, $h_0(1)=x_1$)，使

$$\max_{t\in[0,1]} f(h_0(t))<c+\frac{\delta_0}{2}. \tag{3·19}$$

令 $T=\{t\in[0,1]\mid f(h_0(t))\geqslant c-\delta_0\}$．显然 T 是$[0,1]$中的非空闭集，且 $0,1\overline{\in} T$．根据(3·18)式与(3·19)式知

$$\|f'(h_0(t))\|\geqslant\varepsilon_0>0,\quad \forall\, t\in T. \tag{3·20}$$

根据第二章引理 1·6，存在函数 $\varphi(s)\in C^2(-\infty,+\infty)$，使 $0\leqslant\varphi(s)\leqslant 4(-\infty<s<+\infty)$，且当 $s\in\left[c-\frac{\delta_0}{2}, c+\frac{\delta_0}{2}\right]$时，恒有 $\varphi(s)=4$ 而当 $s\overline{\in}(c-\delta_0, c+\delta_0)$时，恒有 $\varphi(s)=0$．由(3·16)式

知 $f(x)$ 不是常数，于是根据定理 2.7 知，f 的伪梯度算子 v 存在．设 $s\in T$，令 $z_s=h_0(s)$．显然 $z_s\in X=E\setminus K$，$K=\{x\in E\mid f'(x)=\theta\}$，考察初值问题：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-\varphi(f(x))\dfrac{v(x)}{\|v(x)\|^2},\\ x(0)=z_s,\end{cases}\tag{3·21}$$

当 $x\in X$ 时，$\|v(x)\|>\|f'(x)\|>0$，故方程(3·21)右端有意义，并且由于 $v(x)$ 在 X 上满足局部 Lipschitz 条件，知方程(3·21)右端也在 X 上满足局部 Lipschitz 条件．同时，由于 $x\in X$，$\varphi(f(x))\neq 0$ 蕴涵 $c-\delta_0<f(x)<c+\delta_0$，从而根据(3·18)式得 $\|v(x)\|>\|f'(x)\|\geqslant\varepsilon_0$．由此可见

$$\left\|-\varphi(f(x))\frac{v(x)}{\|v(x)\|^2}\right\|\leqslant\frac{4}{\varepsilon_0},\quad\forall x\in X.\tag{3·22}$$

根据定理 2.2，知初值问题(3·21)存在惟一解 $x=x(t,z_s)$，其向右最大存在区间为 $[0,\eta(z_s))$．于是，由(3·22)式知，当 $0\leqslant t_1<t_2<\eta(z_s)$ 时，有

$$\begin{aligned}&\|x(t_2.z_s)-x(t_1,z_s)\|\\&\leqslant\int_{t_1}^{t_2}\|x'(t,z_s)\|\mathrm{d}t\leqslant\frac{4}{\varepsilon_0}(t_2-t_1)\end{aligned}\tag{3·23}$$

又当 $0\leqslant t<\eta(z_s)$ 时，有

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(x(t,z_s))=(f'(x(t,z_s)),x'(t,z_s))\\&=-\varphi(f(x(t,z_s)))\|v(x(t,z_s))\|^{-2}\\&\quad(f'(x(t,z_s)),v(x(t,z_s)))\\&\leqslant-\frac{1}{4}\varphi(f(x(t,z_s)))\leqslant 0,\end{aligned}\tag{3·24}$$

故 $f(x(t,z_s))$ 是 t 的减函数，$0\leqslant t<\eta(z_s)$．

下证 $\eta(z_s)=+\infty$. 事实上,若 $\eta(z_s)<+\infty$,则由(3·23)式知,当 $t\to\eta(z_s)-0$ 时,$x(t,z_s)\to x^*\in E$. 根据定理 2.2 知,$x^*\in\partial X\subset K$,从而 $f'(x^*)=\theta$. 另一方面,由 $f(x(t,z_s))$ 是减函数,并注意到(3·19)式知,$f(x^*)\leqslant f(z_s)=f(h_0(s))<c+\frac{\delta_0}{2}$. 从而,由(3·18)式必有 $f(x^*)<c-\delta_0$. 于是,存在 $0<t_0<\eta(z_s)$,使当 $t_0\leqslant t<\eta(z_s)$时,恒有 $f(x(t,z_s))<c-\delta_0$,从而 $\varphi(f(x(t,z_s)))\equiv 0$, $\forall\, t_0\leqslant t<\eta(z_s)$. 由此可知$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t,z_s)\equiv 0$, $\forall\, t_0\leqslant t<\eta(z_s)$,故 $x(t,z_s)\equiv\bar{x}\in X$, $\forall\, t_0\leqslant t<\eta(z_s)$. 但 $x(t,z_s)\to x^*(t\to\eta(z_s)-0)$,因此 $x^*=\bar{x}\in X$,此与 $x^*\in K$ 矛盾. 于是 $\eta(z_s)=+\infty$获证.

令定义 $h^*:[0,1]\to E$ 如下

$$h^*(s)=\begin{cases}x(\delta_0,z_s)=x(\delta_0,h_0(s)), & s\in T;\\ h_0(s) & s\in[0,1]\setminus T.\end{cases}$$

下证 $h^*(s)$是连续的. 由 $h_0(s)$的连续性及解 $x(t,z_s)$对初值的连续依赖性(定理 2.3),显然只须证明 $h^*(s)$在点 $s_0\in\partial T$ 的连续性. 由 $s_0\in\partial T$ 知$f(z_{s_0})=f(h_0(s_0))=c-\delta_0$. 上面已证 $f(x(t,z_{s_0}))$是 t 的减函数,故

$$f(x(t,z_{s_0}))\leqslant f(z_{s_0})=c-\delta_0,\quad \forall\, t\in[0,+\infty),$$

由此可知 $\varphi(f(x(t,z_{s_0})))\equiv 0(t\in[0,+\infty))$,从而$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t,z_{s_0})\equiv 0(t\in[0,+\infty))$. 故 $x(t,z_{s_0})\equiv z_{s_0}(t\in[0,+\infty))$,特别地有 $h^*(s_0)=x(\delta_0,z_{s_0})=z_{s_0}=h_0(s_0)$. 由此显然可知,不论 s 从 T 中趋于 s_0,还时从$[0,1]\setminus T$ 中趋于 s_0,均有 $h^*(s)\to h^*(s_0)$. 故 $h^*(s)$在 s_0 的连续性获证.

又因 $0,1\in[0,1]\setminus T$，故 $h^*(0)=h_0(0)=x_0$，$h^*(1)=h_0(1)=x_1$．故 $h^*\in\Phi$．下证

$$\max_{s\in[0,1]} f(h^*(s))<c-\frac{\delta_0}{2}. \tag{3·25}$$

事实上，当 $s\in[0,1]\setminus T$ 时，$f(h^*(s))<c-\delta_0<c-\frac{\delta_0}{2}$．故下设 $s\in T$．我们证明：必存在 $0\leqslant t_1\leqslant\delta_0$，使

$$f(x(t_1,z_s))<c-\frac{\delta_0}{2}. \tag{3·26}$$

事实上，若不然，对任何 $t\in[0,\delta_0]$，都有

$$f(x(t,z_s))\geqslant c-\frac{\delta_0}{2}, \tag{3·27}$$

则由(3·19)式知

$$c-\frac{\delta_0}{2}\leqslant f(x(t,z_s))\leqslant f(z_s)<c+\frac{\delta_0}{2},\quad \forall\, t\in[0,\delta_0],$$

从而

$$\varphi(f(x(t,z_s)))\equiv 4,\quad \forall\, t\in[0,\delta_0],$$

由此，根据(3·24)式得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(x(t,z_s))\leqslant -1,\quad \forall\, t\in[0,\delta_0],$$

故

$$f(x(\delta_0,z_s))\leqslant-\delta_0+f(z_s)<-\delta_0+c+\frac{\delta_0}{2}=c-\frac{\delta_0}{2},$$

此与(3·27)式矛盾．

由(3·26)式，根据 $f(x(t,z_s))$ 是减函数，知

$$f(h^*(s))=f(x(\delta_0,z_s))\leqslant f(x(t_1,z_s))<c-\frac{\delta_0}{2}.$$

从上述可知(3·25)式成立．此显然与 c 的定义矛盾．证完．

注 2 在〔169〕中证明了，当把(3·16)式中的不等号<减弱为≤时，山路引理仍成立．

注 3 在 Minimax 原理以及 Mountain Pass Lemma 中，我们断定了 c 是 f 的临界值，即存在 $x^* \in E$，使 $f'(x^*) = \theta$ 且 $f(x^*) = c$. 但应注意，这时 x^* 不一定是 f 的极值点．

关于 Minimax 原理以及 Mountain Pass Lemma 的进一步研究，可参看〔146〕、〔147〕、〔148〕．

例 3.1 设 Ω 是 $R^N(N>2)$ 中有界锥形区域(参看〔135〕)．考察二阶半线性椭圆型算子的 Dirichlet 问题：

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x, u), & x \in \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \tag{3·28}$$

结论 若(i) $f(x, u)$ $(x \in \Omega, -\infty < u < +\infty)$ 满足 Caratheodory 条件，并存在 $1 \leqslant \sigma < \frac{N+2}{N-2}$，使

$$|f(x, u)| \leqslant a + b|u|^\sigma, \quad a>0, \quad b>0; \tag{3·29}$$

(ii)存在 $0 \leqslant \theta < \frac{1}{2}$ 及 $M>0$，使

$$F(x, u) = \int_0^u f(x, v)\mathrm{d}v \leqslant \theta u f(x, u),$$

$$\forall |u| \geqslant M, \quad x \in \Omega; \tag{3·30}$$

(iii)下面两极限式成立

$$\lim_{u \to 0} \frac{f(x, u)}{u} = 0, \text{ 对} \in \Omega \text{ 一致}, \tag{3·31}$$

$$\lim_{u \to +\infty} \frac{f(x, u)}{u} = +\infty, \text{对 } x \in \Omega \text{ 一致}. \tag{3·32}$$

那末，Dirichlet 问题(3·28)在空间 $H_0^1(\Omega)$ 中必具有非零的(即不是零元素的)广义解．

证 由第四章§2 例 2.1 的证明过程可知，只须证明方程

$Tu=\theta$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中具有非零解，这里 $T: H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ 是连续的，且

$$(Tu, v)_1 = \int_\Omega [Du \cdot Dv - F(x, u)v] dx,$$
$$\forall u, v \in H_0^1(\Omega); \tag{3·33}$$

又有

$$Tu = \varphi'(u), \quad \forall u \in H_0^1(\Omega), \tag{3·34}$$

其中 $\varphi: H_0^1(\Omega) \to R^1$ 是 C^1 泛函：

$$\varphi(u) = \int_\Omega \left[\frac{1}{2} Du \cdot Du - F(x, u)\right] dx,$$
$$\forall u \in H_0^1(\Omega). \tag{3·35}$$

下证泛函 φ 满足山路引理的全部条件．首先证明 φ 满足 P.S. 条件．设 $\{u_n\} \subset H_0^1(\Omega)$, $|\varphi(u_n)| \leqslant \beta (n=1,2,\cdots)$, $\varphi'(u_n) \to \theta$. 由(3·29)式与(3·30)式知，存在常数 M_1, M_2 使（下式中 $\Omega_n = \{x \in \Omega \mid u_n(x) | \geqslant M\}$）

$$\begin{aligned}
\beta \geqslant \varphi(u_n) &= \frac{1}{2} \| u_n \|_{1,2}^2 - \int_\Omega F(x, u_n) dx \\
&\geqslant \frac{1}{2} \| u_n \|_{1,2}^2 - \int_{\Omega_n} F(x, u_n) dx - M_1 \\
&\geqslant \frac{1}{2} \| u_n \|_{1,2}^2 - \theta \int_{\Omega_n} u_n f(x, u_n) dx - M_1 \\
&\geqslant \frac{1}{2} \| u_n \|_{1,2}^2 - \theta \int_\Omega u_n f(x, u_n) dx - M_2 \\
&= \left(\frac{1}{2} - \theta\right) \| u_n \|_{1,2}^2 + \theta \int_\Omega [Du_n \cdot Du_n \\
&\quad f(x, u_n) u_n] dx - M_2 \\
&= \left(\frac{1}{2} - \theta\right) \| u_n \|_{1,2}^2 + \theta (\varphi'(u_n), u_n)_1 - M_2
\end{aligned}$$

$$\geqslant\left(\frac{1}{2}-\theta\right)\|u_n\|_{1,2}^2-\theta\|\varphi'(u_n)\|_{1,2}$$
$$\cdot\|u_n\|_{1,2}-M_2\quad(n=1,2,\cdots)\tag{3·36}$$

由此，注意到 $0\leqslant\theta<\frac{1}{2}$ 及 $\|\varphi'(u_n)\|_{1,2}\to 0$，即知 $\{\|u_n\|_{1,2}\}$ 有界．令 $s=\frac{2N\sigma}{N+2}$，则 $1<s<\frac{2N}{N+2}$．于是，由紧嵌入定理（参看〔135〕），$W^{1,2}(\Omega)\uparrow\uparrow L_s(\Omega)$，从而 $\{u_n\}\subset L_s(\Omega)$，并且 $\{u_n\}$ 在 $L_s(\Omega)$ 中有收敛子列 $\{u_{n_i}\}$，即存在 $u^*\in L_s(\Omega)$，使

$$\|u_{n_i}-u^*\|_s\to 0\quad(i\to\infty).\tag{3·37}$$

根据(3·29)式知：Немыцкий 算子 $\mathbf{f}u(x)=f(x,u(x))$ 映 $L_s(\Omega)$ 入 $L_{\frac{2N}{N+2}}(\Omega)$ 连续，有界，从而由（3·37）式知，$\|\mathbf{f}u_{n_i}-\mathbf{f}u^*\|_{\frac{2N}{N+2}}\to 0(i\to\infty)$，于是得

$$\|\mathbf{f}u_{n_i}-\mathbf{f}u_{n_j}\|_{\frac{2N}{N+2}}\to 0,\ (i,j\to\infty)\tag{3·38}$$

由(3·33)～(3·35)三式得

$$(\varphi'(u),v)_1=(u,v)_1-\int_\Omega f(x,u)v\mathrm{d}x,$$
$$\forall u,v\in H_0^1(\Omega),\tag{3·39}$$

从而

$$(u_{n_i}-u_{n_j},v)_1=(\varphi'(u_{n_i})-\varphi'(u_{n_j}),v)_1$$
$$+\int_\Omega[f(x,u_{n_i})-f(x,u_{n_j})]v\mathrm{d}x,$$

于是，注意到第四章(2·20)式，知

$$|(u_{n_i}-u_{n_j},v)_1|\leqslant\|\varphi'(u_{n_i})-\varphi'(u_{n_j})\|_{1,2}$$
$$\cdot\|v\|_{1,2}+\|\mathbf{f}u_{n_i}-\mathbf{f}u_{n_j}\|_{\frac{2N}{N+2}}\cdot\|v\|_{\frac{2N}{N-2}}$$

$$\leqslant \| \varphi'(u_{n_i}) - \varphi'(u_{n_j}) \|_{1,2} \cdot \| v \|_{1,2}$$

$$+ c \| \mathbf{f} u_{n_i} - \mathbf{f} u_{n_j} \|_{\frac{2N}{N+2}} \cdot \| v \|_{1,2},$$

故

$$\| u_{n_i} - u_{n_j} \|_{1,2} = \sup_{\| v \|_{1,2} \leqslant 1} | (u_{n_i} - u_{n_j}, v) |$$

$$\leqslant \| \varphi'(u_{n_i}) - \varphi'(u_{n_j}) \|_{1,2} + c \| \mathbf{f} u_{n_i} - \mathbf{f} u_{n_j} \|_{\frac{2N}{N+2}},$$

由此，注意到 $\| \varphi'(u_n) \|_{1,2} \to 0 \ (n \to \infty)$ 以及(3·38)式，得知 $\| u_{n_i} - u_{n_j} \|_{1,2} \to 0 (i, j \to \infty)$. 于是 $\{ u_{n_i} \}$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中收敛，从而 φ 满足 $P.S.$ 条件.

由 Friedrichs 不等式(参看〔149〕)知，存在 $\tau > 0$，使当 $u \in C_0^\infty(\Omega)$ 时，恒有

$$\int_\Omega |Du|^2 \mathrm{d}x = (-\Delta u, u) \geqslant \tau \int_\Omega u^2 \mathrm{d}x,$$

即

$$\| u \|_{1,2}^2 \geqslant \tau \| u \|_2^2. \tag{3·40}$$

由于 $C_0^\infty(\Omega)$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中稠密，通过取极限，即知(3·40)式对于任何 $u \in H_0^1(\Omega)$ 也成立. 由(3·31)式知，存在 $\delta > 0$，使

$$|f(x, u)| \leqslant \frac{\tau}{2} |u|, \quad \forall 0 < |u| < \delta, \quad x \in \Omega,$$

从而

$$F(x, u) \leqslant \frac{\tau}{4} u^2, \quad \forall |u| < \delta, \quad x \in \Omega. \tag{3·41}$$

另一方面，由(3·29)式知

$$F(x, u) \leqslant a |u| + \frac{b}{\sigma + 1} |u|^{\sigma + 1}, \quad \forall x \in \Omega,$$

$$-\infty < u < +\infty. \tag{3·42}$$

由(3·41)式与(3·42)式,并注意到 $\sigma+1<\dfrac{2N}{N-2}$,得知:存在 $b_1>0$,使

$$F(x,u)\leqslant\frac{\tau}{4}u^2+b_1|u|^{\frac{2N}{N-2}},\quad \forall x\in\Omega,$$

$$-\infty<u<+\infty. \tag{3·43}$$

由(3·43)式、(3·40)式及第四章(2·20)式知:当 $u\in H_0^1(\Omega)$时,有(下式中已令 $\alpha=\dfrac{2N}{N-2}$)

$$\int_\Omega F(x,u)\mathrm{d}x\leqslant\frac{\tau}{4}\|u\|_2^2+b_1\|u\|_{\frac{2N}{N-2}}^{\alpha}$$

$$\leqslant\frac{1}{4}\|u\|_{1,2}^2+b_1c^\alpha\|u\|_{1,2}^\alpha. \tag{3·44}$$

从而,再根据(3·35)式,得

$$\varphi(u)\geqslant\frac{1}{4}\|u\|_{1,2}^2-b_1c^\alpha\|u\|_{1,2}^\alpha,\ \forall u\in H_0^1(\Omega). \tag{3·45}$$

由(3·45)式,并注意到 $\alpha=\dfrac{2N}{N-2}>\sigma+1\geqslant2$,即知存在 $r>0$ 充分小,使

$$\inf_{u\in\partial B_r}\varphi(u)=c_r>0, \tag{3·46}$$

这里 $B_r=\{u\in H_0^1(\Omega)\mid\|u\|_{1,2}<r\}$.

又,显然对 $H_0^1(\Omega)$中的零元素 θ,有

$$\varphi(\theta)=0. \tag{3·47}$$

另一方面,取 $v_0\in H_0^1(\Omega)$,使$\|v_0\|_{1,2}=1$,且 $v_0(x)>0$, $\forall x\in\Omega$. 令$\|v_0\|_2=a_0$,则 $a_0>0$. 由(3·32)式知,存在 $\tau_0>0$,使

$$f(x,u)\geqslant\frac{4}{a_0^2}u,\quad \forall u\geqslant\tau_0,\quad x\in\Omega. \tag{3·48}$$

考察实函数(注意(3·35)式)

$$\psi(t)=\varphi(tv_0)=\frac{t^2}{2}\|v_0\|_{1,2}-\int_\Omega F(x,tv_0)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{t^2}{2}-\int_\Omega F(x,tv_0)\mathrm{d}x. \tag{3·49}$$

今取 $0<t_1<t_2<t_3<\cdots$, $t_n\to+\infty$，并令 $D_n=\{x\in\Omega\,|\,t_nv_0(x)\geqslant\tau_0\}$，则 $\Omega\setminus D_n=\{x\in\Omega\,|\,t_nv_0(x)<\tau_0\}$ $(n=1,2,\cdots)$. 于是，注意到(3·48)式，有

$$\int_\Omega F(x,t_nv_0)\mathrm{d}x=\int_{D_n}\mathrm{d}x\left(\int_0^{\tau_0}+\int_{\tau_0}^{t_nv_0(x)}f(x,v)\mathrm{d}v\right)$$

$$+\int_{\Omega\setminus D_n}\mathrm{d}x\int_0^{t_nv_0(x)}f(x,v)\mathrm{d}v$$

$$\geqslant\int_{D_n}\mathrm{d}x\int_{\tau_0}^{t_nv_0(x)}f(x,v)\mathrm{d}v-\int_{D_n}\mathrm{d}x\int_0^{\tau_0}|f(x,v)|\mathrm{d}v$$

$$-\int_{\Omega\setminus D_n}\mathrm{d}x\int_0^{\tau_0}|f(x,v)|\mathrm{d}v$$

$$\geqslant\int_{D_n}\mathrm{d}x\int_{\tau_0}^{t_nv_0(x)}\frac{4}{a_0^2}v\mathrm{d}v-\int_\Omega\mathrm{d}x\int_0^{\tau_0}|f(x,v)|\mathrm{d}v$$

$$\geqslant\frac{2}{a_0^2}\int_{D_n}(t_n^2[v_0(x)]^2-\tau_0^2)\mathrm{d}x-M_3$$

$$\geqslant\frac{2}{a_0^2}t_n^2\int_{D_n}[v_0(x)]^2\mathrm{d}x-M_4, \tag{3·50}$$

其中

$$M_3=(a\tau_0+\frac{b}{\sigma+1}\tau_0^{\sigma+1})\mathrm{mes}\Omega,\quad M_4=M_3+\frac{2\tau_0^2}{a_0^2}\mathrm{mes}\Omega$$

都是正的常数．显然 $D_1\subset D_2\subset D_3\subset\cdots$，且 $\Omega=\bigcup_{n=1}^\infty D_n$，因此 $\mathrm{mes}D_n\to\mathrm{mes}\Omega\,(n\to\infty)$．于是，由 Lebesgue 积分的绝对连续性知，存在 $N_0>0$，使当 $n\geqslant N_0$ 时

$$\int_{D_n}[v_0(x)]^2\mathrm{d}x>\int_\Omega[v_0(x)]^2\mathrm{d}x-\frac{a_0^2}{2}$$

$$= \| v_0 \|_2^2 - \frac{a_0^2}{2} = \frac{a_0^2}{2}. \tag{3·51}$$

由(3·50)式与(3·51)式知

$$\int_G F(x, t_n v_0) \mathrm{d}x > t_n^2 - M_4, \quad \forall\, n > N_0. \tag{3·52}$$

再由(3·49)式得

$$\psi(t_n) < -\frac{1}{2} t_n^2 + M_4, \quad \forall\, n > N_0$$

故

$$\psi(t_n) \to -\infty, \quad n \to \infty \text{时}. \tag{3·53}$$

又,显然

$$\| t_n v_0 \|_{1,2} = t_n \to +\infty, \quad n \to \infty \text{时} \tag{3·54}$$

于是,由(3·53)式与(3·54)式知:可取定某 n(充分大),使 $H_0^1(\Omega)$中的元素 $u_0 = t_n v_0$ 满足

$$u_0 \overline{\in} \overline{B}_r, \quad \varphi(u_0) < 0. \tag{3·55}$$

根据(3·46)、(3·47)及(3·55)三式,即知山路引理的条件满足,故 φ 必有临界值 $c^* \geqslant c_r > 0$,即存在 $u^* \in H_0^1(\Omega)$,使 $\varphi(u^*) = c^*$,且 $\varphi'(u^*) = Tu^* = \theta$. 由于 $\varphi(\theta) = 0$,故 $u^* \neq \theta$. 证完.

注 4 条件(3·32)式可换为

$$\lim_{u \to -\infty} \frac{f(x, u)}{u} = +\infty, \text{对 } x \in \Omega \text{ 一致} \tag{3·56}$$

事实上,这时(3·53)式应为

$$\psi(-t_n) \to -\infty, \quad n \to \infty \text{时},$$

从而可取某 n 充分大,使元素 $u_0 = -t_n v_0$ 满足(3·55)式.

注 5 若更设 Ω 是 L 型区域(参看[135]),并且对任何 $R > 0$,函数 $f(x, u)$在 $\Omega \times [-R, R]$上关于 x, u 满足 Lipschitz 条件,那末 Dirichlet 问题(3·28)在空间 $H_0^1(\Omega)$中的广义解必定

是古典解(实际上,属于某 $C^{2+\alpha}(\Omega)$, $0<\alpha<1$;参看[8]). 这时 Dirichlet 问题(3·28)必具有非零的古典解. 特别,若 Ω 是 $R^N(2<N<6)$ 中的 L 型区域,则 $f(x,u)=u^2$ 满足上述全部条件. 于是, Dirichlet 问题

$$\begin{cases} -\Delta u = u^2, & x\in\Omega, \\ u|_{\partial\Omega}=0, \end{cases} \tag{3·57}$$

至少具有一个非零古典解 u^*, u^* 属于某 $C^{2+\alpha}(\Omega)$, $0<\alpha<1$; 并且,由 Maximum 原理(参看[78])知, $u^*(x)>0$, $\forall x\in\Omega$.

例 3.2 考察 Hammerstein 积分方程

$$\varphi(x)=\int_G k(x,y)f(y,\varphi(y))\mathrm{d}y = A\varphi(x), \tag{3·58}$$

其中, G 是 R^N 中可测集, $0<\mathrm{mes}G<+\infty$, $f(x,u)$ 满足 Caratheodory 条件.

结论 设

(i) L_2 正定核 $k(x,y)$ 满足 $\int_G\int_G |k(x,y)|^p\mathrm{d}x\mathrm{d}y<+\infty\ (p>2)$;

(ii) 存在 $a>0$, $b>0$, 使

$$|f(x,u)|\leqslant a+b|u|^{p-1},$$
$$\forall x\in G,\quad -\infty<u<+\infty; \tag{3·59}$$

(iii) 存在 $0\leqslant\theta<\frac{1}{2}$ 及 $M>0$, 使

$$F(x,u)=\int_0^u f(x,v)\mathrm{d}v\leqslant\theta uf(x,u),$$
$$\forall |u|\geqslant M,\quad x\in G; \tag{3·60}$$

(iv) 下面两极限式成立:

$$\lim_{u\to0}\frac{f(x,u)}{u}=0, \text{对 } x\in G \text{ 一致}, \tag{3·61}$$

$$\lim_{u\to\infty}\frac{f(x,u)}{u}=+\infty,\text{对 } x\in G \text{ 一致}. \tag{3·62}$$

那末,积分方程(3·58)在 $L_p(G)$中必具有非零解 $\varphi^*(\varphi^*\neq\theta)$.

证 由例 1.6 的讨论,$A=K\mathbf{f}$, K 与 $\mathbf{f}$ 分别由(1·43)式与(1·44)式给出. 这时,(1·45)式成立. 考察 $L_2(G)$上的泛函

$$\Psi(\psi)=\frac{1}{2}(\psi,\psi)-\int_G F(x,H\psi)\mathrm{d}x \tag{3·63}$$

(即泛函(1·47)式). 于是,由(1·50)式知

$$\Psi'(\psi)=\psi-H^*\mathbf{f}H\psi,\quad \forall\,\psi\in L_2(G). \tag{3·64}$$

令 $H_0=\{\psi\in L_2(G)\mid K^{\frac{1}{2}}\psi=\theta\}$, H_1 表 H_0 在 $L_2(G)$中的直交补. 由例 1.9 的讨论知 $H_1\neq\{\theta\}$, 且 $H^*\mathbf{f}H: L_2(G)\to H_1$. 于是,将 Ψ 视为H_1 上的泛函(即限制在 H_1 上)时,仍有

$$\Psi'(\psi)=\psi-H^*\mathbf{f}H\psi,\quad \forall\,\psi\in H_1. \tag{3·65}$$

下证 H_1 上的泛函 Ψ 满足山路引理的全部条件. 首先证明 Ψ 满足 P.S. 条件. 设$\{\psi_n\}\subset H_1$, $|\Psi(\psi_n)|\leqslant\beta(n=1,2,\cdots)$, $\Psi'(\psi_n)\to\theta$. 令 $G_n=\{x\in G\mid |H\psi_n(x)|\geqslant M\}(n=1,2,\cdots)$, 则由(3·59)式与(3·60)式知,存在常数 M_1,M_2,使

$$\begin{aligned}\beta\geqslant\Psi(\psi_n)&=\frac{1}{2}\|\psi_n\|^2-\int_G F(x,H\psi_n)\mathrm{d}x\\&\geqslant\frac{1}{2}\|\psi_n\|^2-\int_{G_n}F(x,H\psi_n)\mathrm{d}x-M_1\\&\geqslant\frac{1}{2}\|\psi_n\|^2-\theta\int_{G_n}f(x,H\psi_n)H\psi_n\mathrm{d}x-M_1\\&\geqslant\frac{1}{2}\|\psi_n\|^2-\theta\int_G f(x,H\psi_n)H\psi_n\mathrm{d}x-M_2.\end{aligned} \tag{3·66}$$

但是,

$$(\Psi'(\psi_n),\psi_n)=(\psi_n-H^*\mathbf{f}H\psi_n,\psi_n)$$

$$=(\psi_n,\psi_n)-(\mathbf{f}H\psi_n,H\psi_n)$$

$$=\|\psi_n\|^2-\int_G f(x,H\psi_n)H\psi_n\mathrm{d}x. \tag{3·67}$$

于是,由(3·66)式与(3·67)式,得

$$\beta\geqslant\left(\frac{1}{2}-\theta\right)\|\psi_n\|^2+\theta(\Psi'(\psi_n),\psi_n)-M_2$$

$$\geqslant\left(\frac{1}{2}-\theta\right)\|\psi_n\|^2-\theta\|\Psi'(\psi_n)\|\cdot\|\psi_n\|-M_2 \tag{3·68}$$

注意到 $\Psi'(\psi_n)\to\theta$ 即知,存在 N_0,使

$$\beta\geqslant\left(\frac{1}{2}-\theta\right)\|\psi_n\|^2-\|\psi_n\|-M_2,\quad\forall\, n>N_0. \tag{3·69}$$

由于(3·69)式,并注意到 $0\leqslant\theta<\frac{1}{2}$,知 $\{\psi_n\}$ 有界. 由于 H_1 是 Hilbert 空间,故存在 $\{\psi_n\}$ 的子列 $\psi_{n_k}\rightharpoonup\psi_0\in H_1$ (ψ_{n_k} 弱收敛于 ψ_0). 由于 $H:L_2(G)\to L_p(G)$ 全连续,故 $H\psi_{n_k}\to H\psi_0$(按 $L_p(G)$ 范数). 因此,根据(3·67)式,注意到 $\mathbf{f}:L_p(G)\to L_q(G)$ 连续,即知

$$\|\psi_{n_k}\|^2\to\int_G f(x,H\psi_0)H\psi_0\mathrm{d}x=(\mathbf{f}H\psi_0,H\psi_0),$$

$$(k\to\infty). \tag{3·70}$$

另一方面,有

$$(\Psi'(\psi_{n_k}),\psi_0)=(\psi_{n_k}-H^*\mathbf{f}H\psi_{n_k},\psi_0)$$

$$=(\psi_{n_k},\psi_0)-(\mathbf{f}H\psi_{n_k},H\psi_0),$$

令 $n\to\infty$,取极限得

$$\|\psi_0\|^2=(\mathbf{f}H\psi_0,H\psi_0). \tag{3·71}$$

由(3·70)式及(3·71)式知,$\|\psi_{n_k}\|\to\|\psi_0\|$ $(k\to\infty)$. 从而再注意到 $\psi_{n_k}\rightharpoonup\psi_0$,即知 $\|\psi_{n_k}-\psi_0\|\to0$,于是 Ψ 满足 P.S. 条件获证.

由(3·61)式知,存在 $\delta>0$,使

$$|f(x,u)| \leqslant (2\|K\|_2)^{-1}|u|, \quad \forall 0<|u|<\delta, \; x\in G, \tag{3·72}$$

其中$\|K\|_2$表线性积分算子 K 作为映$L_2(G)$入$L_2(G)$的全连续算子时的范数．于是

$$F(x,u) \leqslant (4\|K\|_2)^{-1}u_2, \quad \forall |u|<\delta, \; x\in G. \tag{3·73}$$

另一方面，由(3·59)式知

$$F(x,u) \leqslant a|u| + \frac{b}{p}|u|^p, \quad \forall x\in G, \quad -\infty<u<+\infty. \tag{3·74}$$

由(3·73)式与(3·74)式，知存在 $b_1>0$，使

$$F(x,u) \leqslant (4\|K\|_2)^{-1}u^2 + b_1|u|^p, \quad \forall x\in G, \quad -\infty<u<+\infty. \tag{3·75}$$

于是，对 $\psi\in H_1$，有

$$\begin{aligned}\int_G F(x,Hx)\mathrm{d}x &\leqslant (4\|K\|_2)^{-1}\int_G [H\psi(x)]^2\mathrm{d}x \\ &\quad + b_1\int_G |H\psi(x)|^p\mathrm{d}x \\ &= (4\|K\|_2)^{-1}\|K^{\frac{1}{2}}\psi\|^2 + b_1\|H\psi\|_p^p \\ &= (4\|K\|_2)^{-1}(K\psi,\psi) + b_1\|H\psi\|_p^p \\ &\leqslant \frac{1}{4}\|\psi\|^2 + b_1\|H\|^p\cdot\|\psi\|^p,\end{aligned}$$

从而

$$\Psi(\psi) \geqslant \frac{1}{4}\|\psi\|^2 - b_1\|H\|^p\cdot\|\psi\|^p, \quad \forall \psi\in H_1. \tag{3·76}$$

由此，注意到 $p>2$，即知存在 $r>0$ 充分小，使

$$\inf_{\psi\in\partial B_r}\Psi(\psi) = c_r > 0, \tag{3·77}$$

其中 $B_r = \{\psi\in H_2 \mid \|\psi\|<r\}$．

又显然

$$\Psi(\theta)=0. \tag{3·78}$$

另一方面,因 $H_1\neq\{\theta\}$,可取 $\psi^{(0)}\in H_1$, $\|\psi^{(0)}\|=1$. 令 $v_0=H\psi^{(0)}\in L_p(G)$,则 $v_0\neq\theta$(因若 $v_0=\theta$,则 $K^{\frac{1}{2}}\psi^{(0)}=H\psi^{(0)}=\theta$,从而 $\psi^{(0)}\in H_0$,故必有 $\psi^{(0)}=\theta$,矛盾). 令 $G_0=\{x\in G\mid v_0(x)\neq 0\}$,则 $\mathrm{mes}G_0>0$. 令 $a_0=\left(\int_{G_0}[v_0(x)]^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$,则 $a_0>0$. 由(3·62)式知,存在 $\tau_0>0$,使

$$f(x,u)\geqslant\frac{4}{a_0^2}u,\quad \forall\, u\geqslant\tau_0,\quad x\in G, \tag{3·79}$$

$$f(x,u)\geqslant\frac{4}{a_0^2}u,\quad \forall\, u\leqslant-\tau_0,\quad x\in G. \tag{3·80}$$

考察实函数(注意(3·63)式)

$$\Phi(t)=\Psi(t\psi^{(0)})=\frac{t^2}{2}\|\psi^{(0)}\|^2-\int_G F(x,tH\psi^{(0)})\mathrm{d}x$$

$$=\frac{t^2}{2}-\int_G F(x,tv_0)\mathrm{d}x. \tag{3·81}$$

今取 $0<t_1<t_2<t_3<\cdots$, $t_n\to+\infty$,并令

$$D_n=\{x\in G\mid |t_nv_0(x)|\geqslant\tau_0\}$$

则

$$G\setminus D_n=\{x\in G\mid |t_nv_n(x)|<\tau_0\},$$

$$D_n=D_n^{(1)}\cup D_n^{(2)},\quad D_n^{(1)}\cap D_n^{(2)}=\varnothing,$$

这里

$$D_n^{(1)}=\{x\in G\mid t_nv_0(x)\geqslant\tau_0\},$$

$$D_n^{(2)}=\{x\in G\mid t_nv_0(x)\leqslant-\tau_0\}.$$

注意到(3·79)式与(3·80)式及(3·59)式,有

$$\int_G F(x,t_nv_0)\mathrm{d}x=\int_{D_n^{(1)}}\mathrm{d}x\left(\int_0^{\tau_0}+\int_{\tau_0}^{t_nv_0(x)}f(x,v)\mathrm{d}v\right)$$

$$
+\int_{D_n^{(2)}}\mathrm{d}x\left(\int_0^{-\tau_0}+\int_{-\tau_0}^{t_n v_0(x)}f(x,v)\mathrm{d}v\right)
$$

$$
+\int_{G\setminus D_n}\mathrm{d}x\int_0^{t_n v_0(x)}f(x,v)\mathrm{d}v
$$

$$
\geqslant\int_{D_n^{(1)}}\mathrm{d}x\int_{\tau_0}^{t_n v_0(x)}\frac{4}{a_0^2}v\mathrm{d}v-\int_{D_n^{(1)}}\mathrm{d}x\int_0^{\tau_0}|f(x,v)|\mathrm{d}v
$$

$$
-\int_{D_n^{(2)}}\mathrm{d}x\int_{t_n v_0(x)}^{-\tau_0}\frac{4}{a_0^2}v\mathrm{d}v-\int_{D_n^{(2)}}\mathrm{d}x\int_{-\tau_0}^{0}|f(x,v)|\mathrm{d}v
$$

$$
-\int_{G\setminus D_n}\mathrm{d}x\int_{-\tau_0}^{\tau_0}|f(x,v)|\mathrm{d}v
$$

$$
\geqslant\int_{D_n^{(1)}}\frac{2}{a_0^2}(t_n^2[v_0(x)]^2-\tau_0^2)\mathrm{d}x-\int_{D_n}\mathrm{d}x\int_0^{\tau_0}|f(x,v)|\mathrm{d}v
$$

$$
-\int_{D_n^{(2)}}\frac{2}{a_0^2}(\tau_0^2-t_n^2[v_0(x)]^2)\mathrm{d}x-\int_{D_n}\mathrm{d}x\int_{-\tau_0}^{0}|f(x,v)|\mathrm{d}v
$$

$$
-\int_{G\setminus D_n}\mathrm{d}x\int_{-\tau_0}^{\tau_0}|f(x,v)|\mathrm{d}v
$$

$$
=\frac{2}{a_0^2}\int_{D_n}(t_n^2[v_0(x)]^2-\tau_0^2)\mathrm{d}x-\int_G\mathrm{d}x\int_{-\tau_0}^{\tau_0}|f(x,v)|\mathrm{d}v
$$

$$
\geqslant\frac{2}{a_0^2}t_n^2\int_{D_n}[v_0(x)]^2\mathrm{d}x-M_3, \tag{3·82}
$$

其中

$$
M_3=2\left(\frac{\tau_0^2}{a_0^2}+a\tau_0+\frac{b\tau_0^p}{p}\right)\mathrm{mes}G
$$

是常数．显然，$D_1\subset D_2\subset D_3\subset\cdots$，且 $G_0=\bigcup_{n=1}^{\infty}D_n$，故 $\mathrm{mes}D_n\to\mathrm{mes}G_0(n\to\infty)$，从而根据 Lebesgue 积分的绝对连续性知，存在 $N_0>0$ 使

$$
\int_{D_n}[v_0(x)]^2\mathrm{d}x>\int_{G_0}[v_0(x)]^2\mathrm{d}x-\frac{a_0^2}{2}=\frac{a_0^2}{2},
$$

$$\forall\, n > N_0. \tag{3·83}$$

由(3·82)式与(3·83)式,得

$$\int_G F(x, t_n v_0)\mathrm{d}x > t_n^2 - M_3, \quad \forall\, n > N_0. \tag{3·84}$$

从而,再根据(3·81)式,得

$$\Phi(t_n) < -\frac{t_n^2}{2} + M_3, \quad \forall\, n > N_0.$$

由此可知

$$\Phi(t_n) \to -\infty, \quad n \to \infty \text{时}. \tag{3·85}$$

又显然

$$\| t_n \psi^{(0)} \| = t_n \to +\infty \quad (n \to \infty), \tag{3·86}$$

于是,由(3·85)式与(3·86)式知,可取定某 n(充分大),使 H_1 中的元素 $\psi^{(1)} = t_n \psi^{(0)}$满足:

$$\psi^{(1)} \overline{\in} \bar{B}_r, \quad \Psi(\psi^{(1)}) < 0. \tag{3·87}$$

根据(3.77)式、(3·78)式及(3·87)式,即知山路引理的条件满足,Ψ 必具有临界值$c^* \geqslant c_r > 0$,即存在 $\psi^* \in H_1$,使 $\Psi(\psi^*) = c^*$, $\Psi'(\psi^*) = \theta$. 再根据(3·65)式知,$\psi^* = H^* \mathbf{f} H \psi^*$,以 H 作用之,得 $\varphi^* = HH^* \mathbf{f} \varphi^* = K\mathbf{f}\varphi^* = A\varphi^*$,其中 $\varphi^* = H\psi^* \in L_p(G)$. 由于 $\psi^* \in H_1$, $\psi^* \neq \theta$(因为 $\Psi(\theta) = 0$),故 $\varphi^* = H\psi^* \neq \theta$(参看前面 $v_0 = H\psi^{(0)} \neq \theta$ 之证). 于是 φ^*是积分方程(3·58)在 $L_p(G)$中的非零解. 证完.

注 6 特别,若 L_2 正定核 $k(x, y)$满足

$$\int_G \int_G [k(x, y)]^{2m+2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y < +\infty,$$

其中 m 是某正整数,则函数 $f(x, u) = u^{2m+1}$满足上述全部条件,因此,积分方程

$$\varphi(x)=\int_G k(x,y)[\varphi(y)]^{2m+1}\mathrm{d}y \qquad (3\cdot 88)$$

在 $L_{2m+2}(G)$ 中必具有非零解．

§4 偶泛函的临界点

先介绍一个形变引理(参看〔146〕、〔150〕、〔151〕)．

引理 4.1 设 E 是实 Banach 空间，$f: E\to R^1$ 是 C^1 泛函，满足 P.S. 条件．又设 $c\in R^1$，U 是 E 中开集，$U\supset K_c=\{x\in E \mid f(x)=c, f'(x)=\theta\}$．那末必存在连续映象 $\eta:[0,1]\times E\to E$ 及 $\tau>\varepsilon>0$，使(令 $\eta_t(x)=\eta(t,x)$，另外，$f_a=\{x\in E\mid f(x)\leqslant a\}$ 表 f 的水平集)：

(i) $\eta_0(x)=x,\quad \forall x\in E$;

(ii) $\eta_t(x)=x,\quad \forall x\overline{\in} f^{-1}([c-\tau,c+\tau]),\quad t\in[0,1]$;

(iii) 对任何固定的 $t\in[0,1]$，映象 $\eta_t: E\to E$ 是映 E 成 E 的同胚映象；

(iv) $f(\eta_t(x))\leqslant f(x),\quad \forall x\in E,\quad t\in[0,1]$;

(v) $\eta_1(f_{c+\varepsilon}\setminus U)\subset f_{c-\varepsilon}$;

(vi) 若 $K_c=\varnothing$，则 $\eta_1(f_{c+\varepsilon})\subset f_{c-\varepsilon}$;

(vii) 若 f 是偶的(即 $f(-x)=f(x),\quad \forall x\in E$)，则映象 η_t 是奇的(即 $\eta_t(-x)=-\eta_t(x),\quad \forall x\in E,\quad t\in[0,1]$)．

证 可设 E 有非零元(否则，$E=\{\theta\}$，这时取 $\eta(t,\theta)=\theta$，$\forall 0\leqslant t\leqslant 1$，引理的结论显然成立)．易知 $f(x)\not\equiv\text{const}$．$\forall x\in E$ (因为若 $f(x)\equiv\text{const}$．$\forall x\in E$，则 $f'(x)\equiv\theta$，$\forall x\in E$；于是，根据 f 满足 P.S. 条件知，E 中任何序列均有收敛子列，故 E 是紧的，从而 E 有界，此与 E 具有非零元素矛盾)．分两种情况证之：

(1)设 $K_c \neq \emptyset$. 由于 f 满足 P.S. 条件, 故 K_c 是紧集. 用 M_δ 表 K_c 的 δ 邻域, 即 $K_\delta = \{x \in E \mid d(x, K_c) = \inf\limits_{z \in K_c} \|x - z\| < \delta\}$, 则 M_δ 是含 K_c 的开集(注意, 因 K_c 紧, 故 $d(x, K_c)$一定能达到, 即必存在 $z_0 \in K_c$, 使 $d(x, K_c) = \|x - z_0\|$). 易知, 可取某 $\delta > 0$ 充分小, 使 $M_\delta \subset U$(因为, 如果这种 δ 不存在, 则存在 $x_n \overline{\in} U$, $d(x_n, K_c) < \dfrac{1}{n}(n = 1, 2, \cdots)$. 于是, 存在 $z_n \in K_c$, 使 $d(x_n, K_c) = \|x_n - z_n\| \to 0$. 因 K_c 紧, 故存在 $\{z_n\}$ 的子列 $z_{n_k} \to z^* \in K_c \subset U$. 由于 $x_{n_k} \to z^*$, 故当 k 充分大时, $x_{n_k} \in U$, 此与 $x_n \overline{\in} U(n = 1, 2, \cdots)$矛盾). 下证存在 $b > 0$, $\sigma > 0$, 使

$$\|f'(x)\| \geqslant b, \quad \forall x \in f_{c+\sigma} \setminus (f_{c-\sigma} \cup M_{\frac{\delta}{8}}). \tag{4·1}$$

事实上, 若不然, 则存在 $x_n \in f_{c+\frac{1}{n}} \setminus (f_{c-\frac{1}{n}} \cup M_{\frac{\delta}{8}})$, 使得 $\|f'(x_n)\| < \dfrac{1}{n}(n = 1, 2, \cdots)$. 从而根据 f 满足 P.S. 条件知, $\{x_n\}$有收敛子列 $x_{n_i} \to x_0$. 显然, $f(x_0) = c$, $f'(x_0) = \theta$, $x_0 \overline{\in} M_{\frac{\delta}{8}}$, 但由此知 $x_0 \in K_c \subset M_{\frac{\delta}{8}}$, 得出了矛盾.

显然, 当把(4·1)式中的 b 与 σ 换为更小的正数时, (4·1)式更加成立, 因此, 我们可设

$$0 < b < \frac{1}{2}, \quad 0 < \sigma < \min\left\{\frac{b\delta}{32}, \frac{b^2}{2}\right\}. \tag{4·2}$$

今取 $0 < 2\varepsilon < \tau < \sigma$. 令 $A = \{x \in E \mid f(x) > c + \tau$ 或 $f(x) < c - \tau\}$, $B = \{x \in E \mid c - 2\varepsilon < f(x) < c + 2\varepsilon\}$, 则 A 与 B 都是 E 中开集, $\bar{A} \cap \bar{B} = \emptyset$. 令 $\varphi(x) = d(x, \bar{A})(d(x, \bar{A}) + d(x, \bar{B}))^{-1}$, 则显然 $\varphi: E \to R^1$, 且 φ 在 E 上满足局部 Lipschitz 条件, 并且 $\varphi(x) = 0$, $\forall x \in \bar{A}$; $\varphi(x) = 1$, $\forall x \in \bar{B}$; $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$, $\forall x \in E$. 令 $\psi(x) = d(x, \overline{M}_{\frac{\delta}{8}}) \cdot (d(x, \overline{M}_{\frac{\delta}{8}}) + d(x, E \setminus M_{\frac{\delta}{4}}))^{-1}$,

则泛函 $\psi: E \to R^1$ 在 E 上满足局部 Lipschitz 条件，并且 $\psi(x) = 0, \forall x \in \overline{M}_{\frac{\delta}{8}}$；$\psi(x) = 1, \forall x \in E \setminus M_{\frac{\delta}{4}}$；$0 \leqslant \psi(x) \leqslant 1, \forall x \in E$. 注意，如果 f 是偶泛函，则 $\bar{A}, \bar{B}, M_{\frac{\delta}{8}}, E \setminus M_{\frac{\delta}{4}}$ 都是关于 θ 的对称集(所谓 D 是关于 θ 的对称集，是指 $x \in D$ 蕴涵 $-x \in D$)，并且 φ, ψ 都是偶泛函．再令

$$h(s) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant s \leqslant 1; \\ s^{-1}, & s > 1. \end{cases}$$

则 $h: [0, +\infty) \to (0, 1]$ 且 h 在 $[0, +\infty)$ 上满足 Lipschitz 条件，$0 \leqslant h(s)s \leqslant 1, \quad \forall 0 \leqslant s < +\infty$. 由定理 2.7 知，存在 f 的伪梯度算子 $v: X \to E$，其中 $X = E \setminus K, K = \{x \mid f'(x) = \theta\}$. 当 f 是偶泛函时，由定理 2.7 后的注 8 知，可取 v 是奇算子．令

$$w(x) = \begin{cases} -\varphi(x)\psi(x)h(\|v(x)\|)v(x), & \forall x \in X, \\ \theta, \quad \forall x \in K. \end{cases} \tag{4·3}$$

于是，$w: E \to E$. 由(4·1)式知，若 $x_0 \in K$，则 $f(x_0) > c + \sigma > c + \tau$，或者 $f(x_0) \leqslant c - \sigma < c - \tau$，或者 $x_0 \in M_{\frac{\delta}{8}}$；故 $x_0 \in A$，或者 $x_0 \in M_{\frac{\delta}{8}}$. 当 $x_0 \in A$ 时，必存在 x_0 的某邻域，在其中 $\varphi(x) \equiv 0$；当 $x_0 \in M_{\frac{\delta}{8}}$ 时，必存在 x_0 的某邻域，在其中 $\psi(x) \equiv 0$. 由此，根据 $w(x)$ 的定义(4·3)式，即知 w 在 E 上满足局部 Lipschitz 条件．另外，显然

$$0 \leqslant \|w(x)\| \leqslant 1, \quad \forall x \in E. \tag{4·4}$$

又，当 f 是偶泛函时，w 是奇算子．

考察 E 中抽象微分方程的初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{d\eta}{dt} = w(\eta), \\ \eta(t_0) = x, \end{cases} \tag{4·5}$$

其中 $t_0 \in R^1, x \in E$. 用 $\eta(t; t_0, x)$ 表问题(4·5)的惟一解，其

向右最大存在区间是$[t_0,\xi)$. 下证$\xi=+\infty$. 由(4·4)式即知

$$
\begin{aligned}
&\|\eta(t_1;t_0,x)-\eta(t_2;t_0,x)\| \\
&=\left\|\int_{t_2}^{t_1} w(\eta(t;t_0,x))\mathrm{d}t\right\|\leqslant|t_1-t_2|,
\end{aligned}
$$

由此可知, 若$\xi<+\infty$, 则当t_1, $t_2\to\xi-0$时$\|\eta(t_1;t_0,x)-\eta(t_2;t_0,x)\|\to 0$. 故根据$E$的完备性知, 当$t\to\xi-0$时, $\eta(t;t_0,x)\to z\in E$. 但根据定理2.2知$z\in\partial E$, 而$\partial E=\emptyset$, 故得出矛盾. 因此$\xi=+\infty$. 同理可证$\eta(t;t_0,x)$的向左最大存在区间是$(-\infty,t_0]$. 于是, $\eta(t;t_0,x)$的存在区间是$(-\infty,+\infty)$. 现令$\eta(t,x)=\eta(t;0,x)$, $\forall\, 0\leqslant t\leqslant 1$, $x\in E$. 下证,此$\eta(t,x)$及前面已取的τ,ϵ即符合引理4.1的要求. 首先,根据定理2.3知$\eta:[0,1]\times E\to E$是连续的.(ⅰ)显然成立. 另外$x\in A$,时, $\varphi(x)=0$, 即(ⅱ)成立. 现证(ⅲ). 我们证明,对任何固定的$t_1\in[0,1]$, η_{t_1}是映E成E的同胚映象. 先证一一对应, $\forall\, x_1\in E$, 令$x_0=\eta(0;t_1,x_1)$. 由惟一性知, $\eta(t_1;0,x_0)=\eta(t_1;t_1,x_1)=x_1$, 即$\eta_{t_1}(x_0)=x_1$. 若另有$x_0'\in E$, 使$\eta_{t_1}(x_0')=x_1$, 即$\eta(t_1;0,x_0')=x_1$, 则由惟一性知, $\eta(0;t_1,x_1)=x_0'$, 从而$x_0'=x_0$. 由此可知η_{t_1}是E与E之间的一一对应. 由于$y=\eta_{t_1}(x)=\eta(t_1;0,x)$等价于$x=\eta_{t_1}^{-1}(y)=\eta(0;t_1,y)$, 故由定理2.3(解对初值的连续依赖性), 即知η_{t_1}与$\eta_{t_1}^{-1}$都是连续的, 从而知η_{t_1}是映E成E的同胚映象, 于是(ⅲ)获证. 我们有

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(\eta_t(x))=\left(f'(\eta_t(x)),\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\eta_t(x)\right) \\
&=(f'(\eta_t(x)),w(\eta_t(x))),
\end{aligned}
$$

从而, 当$\eta_t(x)\in X$时,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(\eta_t(x))=(f'(\eta_t(x)),-\varphi(\eta_t(x))\psi(\eta_t(x))$$
$$\cdot h(\|v(\eta_t(x))\|)v(\eta_t(x)))$$
$$=-\varphi(\eta_t(x))\psi(\eta_t(x))h(\|v(\eta_t(x))\|)$$
$$\cdot(f'(\eta_t(x)),v(\eta_t(x)))$$
$$\leqslant-\varphi(\eta_t(x))\psi(\eta_t(x))h(\|v(\eta_t(x))\|)$$
$$\cdot\|f'(\eta_t(x))\|^2\leqslant 0; \tag{4·6}$$

当 $\eta_t(x)\in K$ 时,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(\eta_t(x))=(f'(\eta_t(x)),\theta)=0. \tag{4·7}$$

因此,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(\eta_t(x))\leqslant 0,\quad \forall\, 0\leqslant t\leqslant 1,\quad x\in E, \tag{4·8}$$

故 $f(\eta_t(x))$是 t 的减函数,因此

$$f(\eta_t(x))\leqslant f(\eta_0(x))=f(x),\quad \forall\, 0\leqslant t\leqslant 1,\quad x\in E,$$

故(ⅳ)成立．下证(ⅶ),设 f 是偶泛函,从而 v 是奇算子．于是

$$\begin{cases}\dfrac{d(-\eta_t(x))}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{d\eta_t(x)}{\mathrm{d}t}=-w(\eta_t(x))=w(-\eta_t(x)),\\ -\eta_0(x)=-x,\end{cases}$$

由此可知

$$-\eta_t(x)=\eta(t;0,-x)=\eta_t(-x),\quad \forall\, 0\leqslant t\leqslant 1,\quad x\in E,$$

故 η_t 是奇映象,(ⅶ)获证．

最后证明(ⅴ). 由于 $M_\delta\subset U$,故只须证明

$$\eta_1(f_{c+\varepsilon}\setminus M_\delta)\subset f_{c-\varepsilon}. \tag{4·9}$$

由结论(ⅳ)知,当 $x\in f_{c-\varepsilon}$时,必有 $f(\eta_1(x))\leqslant c-\varepsilon$;因此,要证(4·9)式,只须证明

$$x \in f_{c+\varepsilon} \setminus (f_{c-\varepsilon} \cup M_\delta) \Rightarrow f(\eta_1(x)) \leqslant c - \varepsilon \tag{4·10}$$

即可.用反证法．假定(4·10)不成立,即存在 $x_0 \in f_{c+\varepsilon} \setminus (f_{c-\varepsilon} \cup M_\delta)$,使 $f(\eta_1(x_0)) > c - \varepsilon$;于是,由(4·8)式知

$$c - \varepsilon < f(\eta_t(x_0)) \leqslant f(x_0) \leqslant c + \varepsilon, \quad \forall\, 0 \leqslant t \leqslant 1, \tag{4·11}$$

从而

$$\eta_t(x_0) \in f_{c+\varepsilon} \setminus f_{c-\varepsilon}. \quad \forall\, 0 \leqslant t \leqslant 1. \tag{4·12}$$

且有

$$\eta_t(x_0) \in B, \quad \varphi(\eta_t(x_0)) \equiv 1, \quad \forall\, 0 \leqslant t \leqslant 1. \tag{4·13}$$

令 $F = \left\{ t \in [0,1] \,\middle|\, \eta_t(x_0) \in M_{\frac{\delta}{4}} \right\}$. 若 $F \neq \varnothing$,令 $t_0 = \inf F$. 显然 $0 < t_0 \leqslant 1$(因为 $x_0 \overline{\in} M_\delta$,故当 $t > 0$ 充分小时,$\eta_t(x_0) \overline{\in} M_{\frac{\delta}{4}}$). 由于 F 是$[0,1]$中的相对开集,故 $t_0 \overline{\in} F$. 因此,$\eta_t(x_0) \overline{\in} M_{\frac{\delta}{4}}$,$\forall\, 0 \leqslant t \leqslant t_0$,从而 $\psi(\eta_t(x_0)) \equiv 1$,$\forall\, 0 \leqslant t \leqslant t_0$,并且,由(4·1)式及(4·12)式,注意到 $\sigma > \varepsilon$,知$\|f'(\eta_t(x_0))\| \geqslant b$,$\forall\, 0 \leqslant t \leqslant t_0$,因此 $\eta_t(x_0) \in X$,$\forall\, 0 \leqslant t \leqslant t_0$,故由(4·11)式、(4·13)式及(4·6)式,得

$$2\sigma > 2\varepsilon > f(x_0) - f(\eta_{t_0}(x_0)) = -\int_0^{t_0} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\eta_t(x_0))\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{t_0} h(\|v(\eta_t(x_0))\|)(f'(\eta_t(x_0)), v(\eta_t(x_0)))\,\mathrm{d}t$$

$$> \int_0^{t_0} h(\|v(\eta_t(x_0))\|) \cdot \|f'(\eta_t(x_0))\|^2\,\mathrm{d}t$$

$$\geqslant b\int_0^{t_0} h(\|v(\eta_t(x_0))\|) \cdot \|f'(\eta_t(x_0))\|\,\mathrm{d}t$$

$$> \frac{b}{2}\int_0^{t_0} h(\|v(\eta_t(x_0))\|) \cdot \|v(\eta_t(x_0))\|\,\mathrm{d}t$$

$$\geqslant \frac{b}{2}\left\|\int_0^{t_0} h(\|v(\eta_t(x_0))\|) v(\eta_t(x_0))\,\mathrm{d}t\right\|$$

$$= \frac{b}{2}\left\| -\int_0^{t_0} w(\eta_t(x_0))\mathrm{d}t \right\| = \frac{b}{2}\| x_0 - \eta_{t_0}(x_0)\| \tag{4·14}$$

从而，注意到(4·2)式，知

$$\| x_0 - \eta_{t_0}(x_0)\| < \frac{4\sigma}{b} < \frac{\delta}{8}. \tag{4·15}$$

由 t_0 的定义及 $\eta_t(x_0)$ 的连续性，必存在 $t_0 < t_1 \leqslant 1$，使

$$\eta_{t_1}(x_0) \in M_{\frac{\delta}{4}}, \quad \| \eta_{t_0}(x_0) - \eta_{t_1}(x_0)\| < \frac{\delta}{8} \tag{4·16}$$

因 K_c 紧，故存在 $z_0 \in K_c$，使

$$\| \eta_{t_1}(x_0) - z_0 \| = d(\eta_{t_1}(x_0), K_c) < \frac{\delta}{4}. \tag{4·17}$$

于是，由(4·15)式、(4·16)式及(4·17)式，得

$$\| x_0 - z_0 \| \leqslant \| x_0 - \eta_{t_0}(x_0)\| + \| \eta_{t_0}(x_0) - \eta_{t_1}(x_0)\| + \| \eta_{t_1}(x_0) - z_0 \| < \frac{\delta}{2},$$

故 $x_0 \in M_{\frac{\delta}{2}} \subset M_\delta$，此与 $x_0 \in f_{c+\varepsilon} \setminus (f_{c-\varepsilon} \cup M_\delta)$ 矛盾．

若 $F = \varnothing$，即 $\eta_t(x_0) \overline{\in} M_{\frac{\delta}{4}}$, $\forall\, 0 \leqslant t \leqslant 1$．仿(4·14)式(这时，在其中把 t_0 换成 1)，有

$$2\sigma > 2\varepsilon > f(x_0) - f(\eta_1(x_0)) = -\int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\eta_t(x_0))\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^1 h(\| v(\eta_t(x_0))\|) \cdot (f'(\eta_t(x_0)), v(\eta_t(x_0)))\mathrm{d}t$$

$$> \int_0^1 h(\| v(\eta_t(x_0))\|) \cdot \| f'(\eta_t(x_0))\|^2 \mathrm{d}t. \tag{4·18}$$

下证

$$h(\| v(\eta_t(x_0))\|) \cdot \| f'(\eta_t(x_0))\|^2 \geqslant b^2, \quad \forall\, 0 \leqslant t \leqslant 1. \tag{4·19}$$

事实上，若 $0 \leqslant \| v(\eta_t(x_0))\| \leqslant 1$，则 $h(\| v(\eta_t(x_0))\|) = 1$；又因

为$\|f'(\eta_t(x_0))\|\geqslant b$，故(4·19)式成立；若$\|v(\eta_t(x_0))\|>1$，则注意到(4·2)式，知

$$
\begin{aligned}
& h(\|v(\eta_t(x_0))\|)\cdot\|f'(\eta_t(x_0))\|^2 \\
> & \frac{1}{4}h(\|v(\eta_t(x_0))\|)\cdot\|v(\eta_t(x_0))\|^2 \\
= & \frac{1}{4}\|v(\eta_t(x_0))\|>\frac{1}{4}>b^2,
\end{aligned}
$$

故(4·19)式也成立．由(4·18)式与(4·19)式，得$2\sigma>b^2$，此与(4·2)式矛盾．综上所述，(ⅴ)获证．

(2)设$K_c=\varnothing$．这时的证明和$K_c\neq\varnothing$情形的证明类似，并且较简单．这时，(4·1)式改为

$$\|f'(x)\|\geqslant b,\quad \forall x\in f_{c+\sigma}\setminus f_{c-\sigma};$$

(4·2)式改为

$$0<b<\frac{1}{2},\quad 0<\sigma<\frac{b^2}{2}.$$

$\psi(x)$应改取$\psi(x)\equiv 1$，$\forall x\in E$．其他部分证明类似．代替(4·9)式，可得$\eta_1(f_{c+\varepsilon})\subset f_{c-\varepsilon}$，即(ⅵ)成立．证完．

下面介绍集合《类》的概念(参看〔153〕、〔146〕、〔151〕)．

定义 4.1 设E是实 Banach 空间，令

$$\Sigma(E)=\{A\mid A\text{ 是 }E\text{ 中关于 }\theta\text{ 的对称闭集，且 }A\subset E\setminus\{\theta\}\}.$$

设$A\in\Sigma(E)$．若$A=\varnothing$，则规定A的《**类**》(genus)是0，记为$\gamma(A)=0$．若$A\neq\varnothing$，如果存在自然数n，使存在连续的奇映射$\varphi:A\to R^n\setminus\{\theta\}$，则$n$中最小者(记为$n_0$)叫做$A$的《**类**》，记$\gamma(A)=n_0$；如果不存在这种$n$，则规定$A$的《**类**》是$+\infty$，记为$\gamma(A)=+\infty$．

引理 4.2 设$A,B\in\Sigma(E)$．

(ⅰ)若存在连续的奇映射$f:A\to B$，则有$\gamma(A)\leqslant\gamma(B)$；

(ⅱ)若 $A\subset B$，则 $\gamma(A)\leqslant\gamma(B)$；

(ⅲ)若 A 与 B 之间存在同胚的奇映象，则 $\gamma(A)=\gamma(B)$；

(ⅳ)$\gamma(A\cup B)\leqslant\gamma(A)+\gamma(B)$；

(ⅴ)若 $\gamma(B)<+\infty$，则 $\gamma(\overline{A\setminus B})\geqslant\gamma(A)-\gamma(B)$；

(ⅵ)若 A 紧，则 $\gamma(A)<+\infty$，并且存在 $\delta>0$，使 $\gamma(\overline{N_\delta(A)})=\gamma(A)$，这里 $N_\delta(A)=\{x\in E\mid d(x,A)=\inf\limits_{z\in A}\|x-z\|<\delta\}$；

(ⅶ)$\gamma(A)\leqslant\dim E$，$\gamma(\partial\Omega)=\dim E$，这里 Ω 表 E 中关于 θ 对称的有界开集，且 $\theta\in\Omega$(特别地，Ω 可以是以 θ 为心的开球)．

证 (ⅰ)设 $\gamma(B)=n$(当 $\gamma(B)=+\infty$ 时，$\gamma(A)\leqslant\gamma(B)$ 显然成立)．于是，存在连续的奇映象 $\varphi:B\to R^n\setminus\{\theta\}$，从而 $\varphi f:A\to R^n\setminus\{\theta\}$ 是连续的奇映象，故 $\gamma(A)\leqslant n$．

(ⅱ)在(ⅰ)中取 f 为恒等映象 I，即获证．

(ⅲ)设奇映象 $f:A\to B$ 是 A 与 B 是之间的同胚，则 f 以及 $f^{-1}:B\to A$ 都是连续的奇映象，从而，根据(ⅰ)知，$\gamma(A)\leqslant\gamma(B)$，$\gamma(B)\leqslant\gamma(A)$，故 $\gamma(A)=\gamma(B)$．

(ⅳ)设 $\gamma(A)=n$，$\gamma(B)=m$．于是，存在连续的奇映象 $\varphi:A\to R^n\setminus\{\theta\}$ 与 $\psi:B\to R^m\setminus\{\theta\}$．由连续映象的延拓定理(参看第一章定理 2.7 后的注 6)，可将 φ 与 ψ 分别延拓成连续映象 $\varphi_1:E\to R^n$ 与 $\psi_1:B\to R^m$．显然可设 φ_1 与 ψ_1 都是奇的(否则以 $\frac{1}{2}[\varphi_1(x)-\varphi_1(-x)]$ 代 $\varphi_1(x)$，以 $\frac{1}{2}[\psi_1(x)-\psi(-x)]$ 代 $\psi_1(x)$ 即可)．令 $f(x)=(\varphi_1(x),\psi_1(x))$，则 $f:E\to R^n\times R^m=R^{n+m}$ 是连续的奇映象．由于当 $x\in A$ 时，$\varphi_1(x)=\varphi(x)\neq\theta$；当 $x\in B$ 时，$\psi_1(x)=\psi(x)\neq\theta$，故知 $f:A\cup B\to R^{n+m}\setminus\{\theta\}$．从而 $\gamma(A\cup B)\leqslant n+m=\gamma(A)+\gamma(B)$．

(v)由于 $A\subset(\overline{A\setminus B})\cup B$，故由(ii)与(iv)得

$$\gamma(A)\leqslant\gamma(\overline{A\setminus B})+\gamma(B).$$

从而，注意到 $\gamma(B)<+\infty$，得

$$\gamma(\overline{A\setminus B})\geqslant\gamma(A)-\gamma(B).$$

(vi)设 $x_0\in A$，则 $x_0\neq\theta$，取 r 使 $0<r<\|x_0\|$. 显然，开球 $T_r(x_0)=\{x\in E\mid\|x-x_0\|<r\}$ 与 $T_r(-x_0)=\{x\in E\mid\|x+x_0\|<r\}$ 互不相交，故 $G_{x_0}=T_r(x_0)\cup T_r(-x_0)$ 是不含 θ 的关于 θ 对称的开集，且 $\bar{G}_{x_0}\in\Sigma(E)$. 令

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in\overline{T_r(x_0)};\\ -1, & x\in\overline{T_r(-x_0)}.\end{cases}$$

则 $f:\bar{G}_{x_0}\to R^1\setminus\{\theta\}$ 是连续的奇映象，从而 $\gamma(\bar{G}_{x_0})=1$. 由于 A 紧，故诸 $G_{x_0}(x_0\in A)$ 中存在有限个 $G_1,G_2,\cdots,G_m$ 也覆盖 A. 令 $F=\bigcup\limits_{i=1}^{m}\bar{G}_i$，则 F 是关于 θ 的对称闭集，且 $A\subset F\subset E\setminus\{\theta\}$. 于是，由(ii)与(iv)知

$$\gamma(A)\leqslant\gamma(F)\leqslant\sum_{i=1}^{m}\gamma(\bar{G}_i)=m<+\infty. \qquad (4\cdot20)$$

下证必存在 $\delta>0$，使 $\gamma(\overline{N_\delta(A)})=\gamma(A)$(注意，易知 $N_\delta(A)$ 是关于 θ 的对称开集. 事实上，若 $x\in N_\delta(A)$，则有 $d(x,A)=\inf\limits_{z\in A}\|x-z\|<\delta$，从而存在 $z_n\in A$，使 $\|x-z_n\|\to d(x,A)$. 由 A 紧，知存在 $\{z_n\}$ 的子列 $z_{n_k}\to z_0\in A$，从而 $d(x,A)=\|x-z_0\|$，即 x 到 A 的距离可达到. 由于 $-z_0\in A$，故 $d(-x,A)\leqslant\|-x-(-z_0)\|=\|x-z_0\|<\delta$，因此 $-x\in N_\delta(A)$，故 $N_\delta(A)$ 关于 θ 对称，从而 $\overline{N_\delta(A)}$ 是关于 θ 的对称闭集. 因 $\theta\overline{\in}A$，由上述，θ 到 A 的距离可达到，即存在 $z^{(0)}\in A$，使

$$\inf_{z\in A}\|z\| = d(\theta, A) = \|z^{(0)}\| = \tau > 0. \qquad (4\cdot21)$$

由此可知，当 $0<\delta<\tau$ 时，$\overline{N_\delta(A)}\subset E\setminus\{\theta\}$，故 $\gamma(\overline{N_\delta(A)})$有意义)．设 $\gamma(A)=n$．由(4·20)式知，n 是有限数，于是存在连续奇映射 $\varphi: A\to R^n\setminus\{\theta\}$．由延拓定理，可将 φ 延拓成连续映象 $\varphi_1: E\to R^n$．可设 φ_1 是奇映象(否则以 $\frac{1}{2}[\varphi_1(x)-\varphi_1(-x)]$代 $\varphi_1(x)$即可)．由于 A 紧，且对于 $x\in A$，$\varphi_1(x)=\varphi(x)\neq\theta$，可以证明必存在 $\delta>0$，使

$$\varphi_1(x)\neq\theta,\quad \forall\, x\in\overline{N_\delta(A)}. \qquad (4\cdot22)$$

事实上，若不存在这样的 δ，则存在 $x_n\in\overline{N_{\frac{1}{n}}(A)}$，使

$$\varphi_1(x_n)=\theta \quad (n=1,2,\cdots). \qquad (4\cdot23)$$

由于 x_n 到A 的距离可以达到，故存在 $z_n^*\in A$，使

$$\|x_n - z_n^*\| = d(x_n, A)\leqslant\frac{1}{n} \quad (n=1,2,\cdots). \qquad (4\cdot24)$$

因 A 紧，故存在$\{z_n^*\}$的子列 $z_{n_k}^*\to z^*\in A$，从而，注意到(4·24)式，知 $x_{n_k}\to z^*$；再由(4·23)式，得到 $\varphi_1(z^*)=\theta$，此与 $z^*\in A$ 矛盾．故必存在 $\delta>0$，使(4·22)式成立．于是，$\varphi_1: \overline{N_\delta(A)}\to R^n\setminus\{\theta\}$连续、奇，故

$$\gamma(\overline{N_\delta(A)})\leqslant n=\gamma(A). \qquad (4\cdot25)$$

另一方面，由于 $A\subset\overline{N_\delta(A)}$，故由(ⅱ)知

$$\gamma(A)\leqslant\gamma(\overline{N_\delta(A)}). \qquad (4\cdot26)$$

于是，由(4·25)式与(4·26)式，即得 $\gamma(\overline{N_\delta(A)})=\gamma(A)$．

(ⅶ)先证

$$\gamma(A)\leqslant\dim E. \qquad (4\cdot27)$$

当 $\dim E=+\infty$时，此式显然成立．下设 $\dim E=n$．取 E 的一

组基$e_1,\cdots,e_n$. 则任何 $x\in E$ 可惟一表为$x=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i$. 作映象 $h(x)=\alpha,\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\in R^n$,则 h 是映E 成R^n 的线性同胚映象. 显然可视 $h:A\to R^n\setminus\{\theta\}$连续、奇, 故 $\gamma(A)\leqslant n=\dim E$. (4·27)式获证.

再证

$$\gamma(\partial\Omega)=\dim E. \tag{4·28}$$

若 $\dim E=n$ 是有限数, 由(4·27)式知 $\gamma(\partial\Omega)\leqslant\dim E$, 故只须证 $\gamma(\partial\Omega)\geqslant\dim E$. 用反证法, 假定 $\gamma(\partial\Omega)=m<n$. 于是, 存在连续奇映象 $\varphi:\partial\Omega\to R^m\setminus\{\theta\}$. 由延拓定理, 可设 φ 是映 $\bar{\Omega}$ 入 R^m 的连续奇映象. 设 $e_1,\cdots,e_n$ 是 E 的一组基, 作映象 $g(\beta)=z$, 这里 $\beta=(\beta_1,\cdots\beta_m)\in R^m$, $z=\sum_{i=1}^{m}\beta_i e_i\in E$. 则 g 是映 R^m 成E 的 m 维子空间的线性同胚映象. 显然 $g\varphi:\bar{\Omega}\to E$ 是连续的奇映象, 并且 $g\varphi(\partial\Omega)\subset E\setminus\{\theta\}$. 于是, 根据 Borsuk 定理(第二章定理 1.7 后的注 9)知

$$\deg(g\varphi,\Omega,\theta)=\text{奇数}, \tag{4·29}$$

但另一方面, 由于 $g\varphi$ 将 $\bar{\Omega}$ 映入 E 的 m 维子空间, 故 $g\varphi$ 是降维的, 根据第二章定理 1.4 之 4°, 可知

$$\deg(g\varphi,\Omega,\theta)=0,$$

此与(4·29)式矛盾.

若 $\dim E=+\infty$, 则对于任何正整数 n, 都存在 E 的 n 维子空间E_n. 于是, 注意到 $E_n\cap\Omega$ 是E_n 中含θ 且关于θ 对称的有界开集, 根据刚才已证的结果知

$$\gamma(\partial(E_n\cap\Omega))=\dim E_n=n.$$

但因$\partial(E_n\cap\Omega)\subset\partial\Omega$, 故由性质(ii)知

$$\gamma(\partial(E_n \cap \Omega)) \leqslant \gamma(\partial\Omega),$$

故 $\gamma(\partial\Omega) \geqslant n$. 由于 n 的任意性，即知 $\gamma(\partial\Omega) = +\infty$. 于是，这时(4·28)式也成立．证完．

设 E 是实 Banach 空间，以下记 $B_r = \{x \in E \mid \|x\| < r\}$, $(r > 0)$, $S_r = \partial B_r$. 设泛函 $f: E \to R^1$. 记 $f^{(0)} = \{x \in E \mid f(x) \geqslant 0\}$. 对于 f，分别作下列假定：

(H_1) $f(\theta) = 0$，且存在 $\rho > 0$, $\alpha > 0$，使 $\bar{B}_\rho \subset f^{(0)}$，并且

$$f(x) \geqslant \alpha, \quad \forall x \in S_\rho;$$

(H_2) 对于 E 的任何有限维子空间 E_0，集 $E_0 \cap f^{(0)}$ 都是有界的．令

$\Gamma = \{h \mid h: E \to E$ 是映 E 成 E 的同胚映象，且为奇映象，$h(\bar{B}_1) \subset f^{(0)}\}$. 易知，若 f 满足 (H_1)，则 $\Gamma \neq \varnothing$（因为这时 $h_0 \in \Gamma$，其中 $h_0(x) = \rho x$, $\forall x \in E$）. 又令

$\Gamma_m = \{K \in E \mid K$ 紧，关于 θ 对称，且对任何 $h \in \Gamma$，有 $\gamma(K \cap h(S_1)) \geqslant m\}$，其中 m 为正整数．

当 $h \in \Gamma$ 时，由于 h 是奇映象，故 $h(\theta) = \theta$；于是闭集 $h(S_1)$ 关于 θ 对称且不含 θ，故 $\gamma(K \cap h(S_1))$ 有意义．

引理 4.3 设 $\dim E \geqslant m$，泛函 $f: E \to R^1$ 满足条件 (H_1) 与 (H_2). 那末

(i) $\Gamma_m \neq \varnothing$;

(ii) $\Gamma_{m+1} \subset \Gamma_m$;

(iii) $K \subset \Gamma_m$, $A \in \Sigma(E)$, $\gamma(A) \leqslant r < m \Rightarrow \overline{K - A} \in \Gamma_{m-r}$;

(iv) 若 $\varphi: E \to E$ 是映 E 成 E 的同胚映象，而且是奇映象，并满足 $\varphi^{-1}(f^{(0)}) \subset f^{(0)}$，则 $\varphi(K) \in \Gamma_m$, $\forall K \in \Gamma_m$.

证 (i) 取 E 的 m 维子空间 E_0. 由于 f 满足条件 (H_2)，

可取正数 R 充分大，使 $E_0\cap\bar{B}_R\supset E_0\cap f^{(0)}$. 令 $K_R=E_0\cap\bar{B}_R$. 显然，K_R 是紧的，关于 θ 对称的. 对于任何 $h\in\Gamma$，有 $E_0\supset K_R=E_0\cap\bar{B}_R\supset E_0\cap f^{(0)}\supset E_0\cap h(\bar{B}_1)\supset E_0\cap h(S_1)$，从而 $K_R\cap h(S_1)=E_0\cap h(S_1)$. 由于 h 是奇的同胚映象，故 $h(B_1)$是 E 中含θ 的关于θ 对称的开集，从而 $E_0\cap h(B_1)$是 E_0 中含 θ 的关于θ 对称的有界开集. 又$\partial(h(B_1))=h(\partial B_1)=h(S_1)$，$\partial(E_0\cap h(B_1))\subset E_0\cap\partial(h(B_1))=E_0\cap h(S_1)$于是，根据引理 4.2(ⅶ)知

$$
\begin{aligned}
m=\dim E_0&=\gamma(\partial(E_0\cap h(B_1)))\\
&\leqslant\gamma(E_0\cap h(S_1))=\gamma(K_R\cap h(S_1)),
\end{aligned}
$$

故 $K_R\in\Gamma_m$，因此 $\Gamma_m\neq\varnothing$.

(ⅱ)显然.

(ⅲ)显然，$\overline{K\setminus A}$是紧集，而且关于 θ 对称. 对于 $h\in\Gamma$，有

$$
\begin{aligned}
\overline{K\setminus A}\cap h(S_1)&\supset(\overline{K\cap h(S_1))\setminus(A\cap h(S_1)})\\
&=(\overline{K\cap h(S_1))\setminus A}).
\end{aligned}
$$

由假定知 $\gamma(K\cap h(S_1))\geqslant m$，从而根据引理 4.2(ⅴ)知

$$
\begin{aligned}
&\gamma(\overline{K\setminus A}\cap h(S_1))\geqslant\gamma\,\overline{(K\cap h(S_1))\setminus A}\\
&\geqslant\gamma(K\cap h(S_1))-\gamma(A)\geqslant m-r,
\end{aligned}
$$

故$\overline{K\setminus A}\in\Gamma_{m-r}$.

(ⅳ)显然 $\varphi(K)$是紧集且关于 θ 对称. 由于 φ 是E 与E 间的同胚映象，故

$$
\varphi(A_1\cap A_2)=\varphi(A_1)\cap\varphi(A_2),\quad\forall A_1,A_2\subset E,
$$

因此，对任何 $h\in\Gamma$，有

$$
\varphi(K\cap\varphi^{-1}(h(S_1)))=\varphi(K)\cap h(S_1).\qquad(4\cdot30)
$$

显然 $\varphi^{-1}(h(S_1))\in\Sigma(E)$，从而 $K\cap\varphi^{-1}(h(S_1))\in\Sigma(E)$.

于是，根据引理 4.2(ⅲ)知

$$\gamma(K\cap\varphi^{-1}(h(S_1)))=\gamma(\varphi(K\cap\varphi^{-1}(h(S_1)))).\quad(4\cdot31)$$

由假定，$\varphi^{-1}(f^{(0)})\subset f^{(0)}$，而 $h(\bar{B}_1)\subset f^{(0)}$，故 $\varphi^{-1}h(\bar{B}_1)\subset f^{(0)}$，从而 $\varphi^{-1}h\in\Gamma$，因此

$$\gamma(K\cap\varphi^{-1}h(S_1))\geqslant m.\quad(4\cdot32)$$

于是，由(4·30)、(4·31)及(4·32)三式，得 $\gamma(\varphi(K)\cap h(S_1))\geqslant m$，故 $\varphi(K)\in\Gamma_m$. 证完．

定理 4.1 设 E 是无穷维实 Banach 空间，$f:E\to R^1$ 是 C^1 偶泛函，满足 P.S. 条件．又设条件(H_1)与(H_2)满足．对于每个正整数 m，令

$$b_m=\inf_{K\in\Gamma_m}\max_{x\in K}f(x).\quad(4\cdot33)$$

则

(ⅰ)$0<\alpha\leqslant b_m<+\infty$，$b_m$ 是 f 的临界值$(m=1,2,\cdots)$；

(ⅱ)$b_m=b_{m+1}=\cdots=b_{m+r-1}=b\ (r\geqslant1)\Rightarrow\gamma(K_b)\geqslant r$，这里 $K_b=\{x\in E\mid f(x)=b,f'(x)=\theta\}$；

(ⅲ)$b_m\leqslant b_{m+1}(m=1,2,\cdots)$，且 $b_m\to+\infty(m\to\infty)$；

(ⅳ)f 具有无穷多个临界点，并且有无穷多个临界值．

证 当 $K\in\Gamma_m$ 时，K 是紧集，从而 $f(x)$在 K 上必达到最大值，因此 $b_m<+\infty$．另一方面，令 $h_0(x)=\rho x$，$\forall x\in E$，则 $h_0\in\Gamma$，$h_0(S_1)=S_\rho$，从而，对于 $K\in\Gamma_m$ 有 $\gamma(K\cap S_\rho)\geqslant m$，故 $K\cap S_\rho\neq\varnothing$，于是注意到条件$(H_1)$知 $b_m\geqslant\alpha$. 如果我们已证明(ⅱ)，则可推出 b_m 是 f 的临界值，从而可得(ⅰ)(在(ⅱ)中令 $r=1$，得 $\gamma(K_{b_m})\geqslant1$，故 $K_{b_m}\neq\varnothing$).

下面证(ⅱ)．用反证法．假定 $\gamma(K_b)<r$(注意，由于 f 是偶泛函，故 f' 是奇映象，从而 K_b 是关于 θ 的对称集．又由

(H_1), $f(\theta)=0$, 而 $b>0$, 故 $\theta\overline{\in}K_b$, 因此 $K_b\in\Sigma(E)$). 由 K_b 是紧集(因为 f 满足 P.S. 条件), 根据引理 4.2(ⅵ), 存在 $\delta>0$, 使

$$\gamma(\overline{N_\delta(K_b)})=\gamma(K_b)<r. \tag{4·34}$$

于是, 根据引理 4.1 知, 存在 $\varepsilon>0$ 及映 E 成 E 的同胚奇映象 $\eta_1: E\to E$, 使

$$\eta_1(f_{b+\varepsilon}\setminus N_\delta(K_b))\subset f_{b-\varepsilon}. \tag{4·35}$$

由 b_{m+r-1}的定义, 存在 $K^*\in\Gamma_{m+r-1}$, 使

$$\max_{x\in K^*}f(x)<b_{m+r-1}+\varepsilon=b+\varepsilon. \tag{4·36}$$

根据引理 4.3(ⅲ)知, $\overline{K^*\setminus\overline{N_\delta(K_b)}}\in\Gamma_m$. 但是, 显然

$$\overline{K^*\setminus\overline{N_\delta(K_b)}}=K^*\setminus N_\delta(K_b),$$

故 $K^*\setminus N_\delta(K_b)\in\Gamma_m$. 由(4·36)式知 $K^*\subset f_{b+\varepsilon}$, 从而 $K^*\setminus N_\delta(K_b)\subset f_{b+\varepsilon}$. 由引理 4.1(ⅳ)知, $\eta_1^{-1}(f^{(0)})\subset f^{(0)}$, 从而, 根据引理 4.3(ⅳ)知, $\eta_1(K^*\setminus N_\delta(K_b))\in\Gamma_m$. 于是

$$\max_{x\in\eta_1(K^*\setminus N_\delta(K_b))}f(x)\geqslant b_m=b. \tag{4·37}$$

但另一方面, 由于

$$K^*\setminus N_\delta(K_b)\subset f_{b+\varepsilon}\setminus N_\delta(K_b),$$

从而, 注意到(4·35)式, 知

$$\eta_1(K^*\setminus N_\delta(K_b))\subset\eta_1(f_{b+\varepsilon}\setminus N_\delta(K_b))\subset f_{b-\varepsilon},$$

故

$$f(x)\leqslant b-\varepsilon,\quad\forall\, x\in\eta_1(K^*\setminus N_\delta(K_b)),$$

此与(4·37)式矛盾. 于是, (ⅱ)获证.

(ⅲ)由引理 4.3(ⅱ)直接推出 $b_m\leqslant b_{m+1}(m=1,2,\cdots)$, 故 $\{b_m\}$ 是增数列. 下证 $b_m\to+\infty$. 用反证法. 设 $b_m\to b^*<+\infty$.

下面用类似于(ⅱ)证明中的办法得出矛盾．因 K_{b^*} 紧，且 $K_{b^*} \in \Sigma(E)$，故由引理 4.2(ⅵ)知，$\gamma(K_{b^*})=s<+\infty$，且存在 $\delta>0$，使

$$\gamma(\overline{N_\delta(K_{b^*})})=\gamma(K_{b^*})=s. \tag{4·38}$$

根据引理 4.1 知，存在 $\varepsilon>0$ 及映 E 成 E 的同胚奇映象 $\eta_1:E\to E$，使

$$\eta_1(f_{b^*+\varepsilon}\setminus N_\delta(K_b^*))\subset f_{b^*-\varepsilon} \tag{4·39}$$

由于 $b_m\to b^*$，故存在正整数 n，使 $b_n>b^*-\varepsilon$．因为 $\{b_m\}$ 增，故 $b_{n+s}\leqslant b^*<b^*+\varepsilon$，从而，存在 $K_*\in\Gamma_{n+s}$，使

$$\max_{x\in K_*} f(x)<b^*+\varepsilon$$

故

$$K_*\subset f_{b^*+\varepsilon}. \tag{4·40}$$

另外，根据引理 4.3(ⅲ)知

$$K_*\setminus N_\delta(K_{b^*})=\overline{K_*\setminus\overline{N_\delta(K_{b^*})}}\in\Gamma_m. \tag{4·41}$$

又，由引理 4.1(ⅳ)知，$\eta_1^{-1}(f^{(0)})\subset f^{(0)}$，于是，根据引理 4.3(ⅳ)知 $\eta_1(K_*\setminus N_\delta(K_{b^*}))\in\Gamma_n$，从而

$$\max_{x\in\eta_1(K_*\setminus N_\delta(K_{b^*}))} f(x)\geqslant b_n>b^*-\varepsilon. \tag{4·42}$$

但另一方面，由(4·40)式与(4·39)式知

$$\eta_1(K_*\setminus N_\delta(K_{b^*}))\subset\eta_1(f_{b^*+\varepsilon}\setminus N_\delta(K_{b^*}))\subset f_{b^*-\varepsilon},$$

故

$$f(x)\leqslant b^*-\varepsilon,\quad \forall x\in\eta_1(K_*\setminus N_\delta(K_{b^*}))$$

此与(4·42)式矛盾．于是，$b_m\to+\infty$ 获证．

(ⅳ)是(ⅲ)的直接推论，因为由 $b_m\to+\infty$ 知，诸 b_m 中必有无穷多个互不相同，它们都是 f 的临界值，它们对应的临界点显然也互不相同．证完．

注 1　若 $b_m = b_{m+1}$，则 K_{b_m} 必是无限集；从而必有无穷多个临界点对应于同一临界值 b_m．事实上，由结论(ⅱ)知

$$\gamma(K_{b_m}) \geqslant 2. \tag{4·43}$$

如果 K_{b_m} 是有限集：$K_{b_m} = \{x_1, -x_1, x_2, -x_2, \cdots, x_r, -x_r\}$ $(x_i \neq \theta, i = 1, 2, \cdots, r)$，令

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & x = x_i, \quad i = 1, 2, \cdots, r; \\ -1, & x = -x_i, \quad i = 1, 2, \cdots, r, \end{cases}$$

则显然 $\varphi: K_{b_m} \to R^1 \setminus \{\theta\}$ 是连续的奇映象，从而 $\gamma(K_{b_m}) = 1$，此与(4·43)式矛盾．

注 2　由于 f 是偶泛函，故其临界点必成对出现，即若 x 是 f 的临界点，则 $-x$ 也是 f 的临界点．

例 4.1　设 Ω 是 $R^N(N>2)$ 中有界锥形区域．考察例 3.1 中的 Dirichlet 问题(3·28)．

结论　设例 3.1 中的条件(ⅰ)、(ⅱ)、(ⅲ)满足，并且满足：

(ⅳ) $f(x, u)$ 是 u 的奇函数，即

$$f(x, -u) = -f(x, u), \quad \forall x \in \Omega, \\ -\infty < u < +\infty. \tag{4·44}$$

那末，Dirichlet 问题(3·28)在空间 $H_0^1(\Omega)$ 中必具有无穷多个广义解．

证　由例 3.1 知，我们只须证明 $H_0^1(\Omega)$ 上的 C^1 泛函(3·35)式满足定理 4.1 的全部条件．由(4·44)式知 $F(x, u)$ 是 u 的偶函数，从而 φ(见(3·35)式)是偶泛函．在例 3.1 中已经验证了 φ 满足 P.S. 条件．又，由(3·45)式即知条件(H_1)满足．最后，证明条件(H_2)满足．首先注意，由(3·32)式及(4·44)式知

$$\lim_{u \to +\infty} \frac{f(x, -u)}{-u} = \lim_{u \to +\infty} \frac{f(x, u)}{u} = +\infty, \quad \text{对} \in \Omega \text{ 一致},$$

故

$$\lim_{u\to-\infty}\frac{f(x,u)}{u}=+\infty,\ \text{对}\ x\in\Omega\ \text{一致}. \tag{4·45}$$

假定条件(H_2)不满足，即存在$H_0^1(\Omega)$的有限维(设为 s 维)子空间 X，使 $X\cap\varphi^{(0)}$是无界集，这里

$$\varphi^{(0)}=\{x\in H_0^1(\Omega)\mid\varphi(x)\geqslant 0\}.$$

于是，存在 $u_n\in X$，$\|u_n\|_{1,2}\to+\infty$，使

$$\varphi(u_n)\geqslant 0\qquad(n=1,2,\cdots). \tag{4·46}$$

令 $t_n=\|u_n\|_{1,2}$，$v_n=\frac{1}{t_n}u_n\in X$，则

$$u_n=t_nv_n,\quad \|v_n\|_{1,2}=1\quad(n=1,2,\cdots). \tag{4·47}$$

因 X 有限维，故其中的单位球面是紧集，从而$\{v_n\}$有收敛子列. 为简化符号，不妨设就是 v_n 本身收敛：$v_n\to v_0$(即$\|v_n-v_0\|_{1,2}\to 0$)，$v_0\in X$，$\|v_0\|_{1,2}=1$. 由(3·40)式知$\|v_n-v_0\|_2\to 0$，从而，存在 v_n 的子列在Ω上几乎处处收敛于 v_0. 为简化符号，不妨设就是 v_n 本身在Ω上几乎处处收敛于 v_0. 令

$$\Omega_0=\{x\in\Omega\mid v_0(x)\neq 0,\ \text{且}\ v_n(x)\to v_0(x)\},$$

则 $\operatorname{mes}\Omega_0>0$，令 $a_0=\left(\int_{\Omega_0}[v_0(x)]^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$，则 $a_0>0$. 由(3·32)式及(4·45)式知，存在 $\tau_0>0$，使

$$f(x,u)\geqslant\frac{8}{a_0^2}u,\quad\forall u\geqslant\tau_0,\quad x\in\Omega; \tag{4·48}$$

$$f(x,u)\leqslant\frac{8}{a_0^2}u,\quad\forall u\leqslant-\tau_0,\quad x\in\Omega. \tag{4·49}$$

令 $D_n=\{x\in\Omega\mid t\,|v_n(x)|\geqslant\tau_0\}$，则 $\Omega\setminus D_n=\{x\in\Omega\mid t_n$

$|v_n(x)|<\tau_0\}$, $D_n=D_n^{(1)}\cup D_n^{(2)}$, $D_n^{(1)}\cap D_n^{(2)}=\phi$, 这里 $D_n^{(1)}=\{x\in\Omega\,|\,t_nv_n(x)\geqslant\tau_0\}$, $D_n^{(2)}=\{x\in\Omega\,|\,t_nv_n(x)\leqslant-\tau_0\}$. 于是，注意到(4·48)式、(4·49)式及(3·29)式，知

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega F(x,t_nv_n)\mathrm{d}x &= \int_{D_n^{(1)}}\mathrm{d}x\left(\int_0^{\tau_0}+\int_{\tau_0}^{t_nv_n(x)}f(x,v)\mathrm{d}v\right)\\
&\quad+\int_{D_n^{(2)}}\mathrm{d}x\left(\int_0^{-\tau_0}+\int_{-\tau_0}^{t_nv_n(x)}f(x,v)\mathrm{d}v\right)\\
&\quad+\int_{\Omega\setminus D_n}\mathrm{d}x\int_0^{t_nv_n(x)}f(x,v)\mathrm{d}v\\
&\geqslant\int_{D_n^{(1)}}\mathrm{d}x\int_{\tau_0}^{t_nv_n(x)}\frac{8}{a_0^2}v\mathrm{d}v-\int_{D_n^{(1)}}\mathrm{d}x\int_0^{\tau_0}|f(x,v)|\mathrm{d}v\\
&\quad-\int_{D_n^{(2)}}\mathrm{d}x\int_{t_nv_n(x)}^{-\tau_0}\frac{8}{a_0^2}v\mathrm{d}v-\int_{D_n^{(2)}}\mathrm{d}x\int_{-\tau_0}^{0}|f(x,v)|\mathrm{d}v\\
&\quad-\int_{\Omega\setminus D_n}\mathrm{d}x\int_{-\tau_0}^{\tau_0}|f(x,v)|\mathrm{d}v\\
&\geqslant\int_{D_n^{(1)}}\frac{4}{a_0^2}(t_n^2[v_n(x)]^2-\tau_0^2)\mathrm{d}x-\int_{D_n}\mathrm{d}x\int_0^{\tau_0}|f(x,v)|\mathrm{d}v\\
&\quad-\int_{D_n^{(2)}}\frac{4}{a_0^2}(\tau_0^2-t_n^2[v_n(x)]^2)\mathrm{d}x-\int_{D_n}\mathrm{d}x\int_{-\tau_0}^{0}|f(x,v)|\mathrm{d}v\\
&\quad-\int_{\Omega\setminus D_n}\mathrm{d}x\int_{-\tau_0}^{\tau_0}|f(x,v)|\mathrm{d}v\\
&=\frac{4}{a_0^2}\int_{D_n}(t_n^2[v_n(x)]^2-\tau_0^2)\mathrm{d}x-\int_\Omega\mathrm{d}x\int_{-\tau_0}^{\tau_0}|f(x,v)|\mathrm{d}v\\
&\geqslant\frac{4}{a_0^2}t_n^2\int_{D_n}[v_n(x)]^2\mathrm{d}x-M,
\end{aligned}\tag{4·50}
$$

其中 $M=2\left(\dfrac{\tau_0^2}{a_0^2}+a\tau_0+\dfrac{b\tau_0^{\sigma+1}}{\sigma+1}\right)\mathrm{mes}\Omega$ 是常数．由于

$$
\left|\left(\int_{D_n}[v_n(x)]^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}-\left(\int_{D_n}[v_0(x)]^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\right|
$$

$$\leqslant\left(\int_{D_n}[v_n(x)-v_0(x)]^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant\left(\int_{\Omega}[v_n(x)-v_0(x)]^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\|v_n-v_0\|_2\to 0\quad(n\to\infty),$$

故存在 $N_1>0$,使

$$\left(\int_{D_n}[v_n(x)]^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}>\left(\int_{D_n}[v_0(x)]^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}-\frac{a_0}{4},$$

$$\forall\, n>N_1. \tag{4·51}$$

令 $D_n^*=\bigcap\limits_{k=n}^{\infty}D_k$,则 $D_1^*\subset D_2^*\subset D_3^*\subset\cdots$. 又令 $D^*=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}D_n^*$,则

$$D_n\supset D_n^*,\quad D_n^*\subset D^*,\quad \mathrm{mes}D_n^*\to\mathrm{mes}D^*\,(n\to\infty). \tag{4·52}$$

从而,存在 $N_2>0$,使

$$\left(\int_{D_n}[v_0(x)]^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\geqslant\left(\int_{D_n^*}[v_0(x)]^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$>\left(\int_{D^*}[v_0(x)]^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}-\frac{a_0}{4},\quad\forall\, n>N_2. \tag{4·53}$$

又,由 Ω_0 的定义易知 $\Omega_0\subset D^*$,从而

$$\left(\int_{D^*}[v_0(x)]^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\geqslant\left(\int_{\Omega_0}[v_0(x)]^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}=a_0. \tag{4·54}$$

于是,由(4·51)、(4·53)及(4·54)三式,即知

$$\left(\int_{D_n}[v_n(x)]^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}>\frac{a_0}{2},$$

$$\forall\, n>N=\max\{N_1,N_2\}. \tag{4·55}$$

由(4·55)式与(4·50)式,又得

$$\int_{\Omega}F(x,t_nv_n)\mathrm{d}x>t_n^2-M,\quad\forall\, n>N, \tag{4·56}$$

从而,注意到(4·47)式,有

$$\varphi(u_n)=\varphi(t_nv_n)=\frac{t_n^2}{2}\|v_n\|_{1,2}-\int_\Omega F(x,t_nv_n)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{t_n^2}{2}-\int_\Omega F(x,t_nv_n)\mathrm{d}x<-\frac{t_n^2}{2}+M,\quad \forall n>N,$$

故(注意 $t_n\to+\infty$)

$$\lim_{n\to\infty}\varphi(u_n)=-\infty,\tag{4·57}$$

此与(4·46)式矛盾．因此,条件(H_2)满足．证完．

注3 若更设 Ω 是 L 型区域,并且对任何 $R>0$,函数 $f(x,u)$ 在 $\Omega\times[-R,R]$ 上关于 x,u 满足 Lipschitz 条件,那末 Dirichlet 问题(3·28)在空间 $H_0^1(\Omega)$ 中的广义解必是古典解(实际上属于某 $C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$,$0<\alpha<1$;参见[8])．于是,这时 Dirichlet 问题(3·28)必具有无穷多个古典解．特别,若 Ω 是 R^3 中的 L 型区域,则 $f(x,u)=u^3$ 满足上述全部条件．于是,Dirichlet 问题

$$\begin{cases}-\Delta u=u^3, & x\in\Omega;\\ u|_{\partial\Omega}=0\end{cases}\tag{4·58}$$

必具有无穷多个古典解 $u_n(n=1,2,\cdots)$,并且每个 u_n 属于某 $C^{2+\alpha_n}(\Omega)$,$0<\alpha_n<1$.

例4.2 考察例3.2中的 Hammerstein 积分方程(3·58),其中 G 是 R^n 中可测集,$0<\mathrm{mes}G<+\infty$,$f(x,u)$ 满足 Caratheodory 条件．

结论 设例3.2中的条件(ⅱ),(ⅲ),(ⅳ)满足,并将条件(ⅰ)换为:

(ⅰ)′L_2 强正定核 $k(x,y)$ 满足 $\int_G\int_G|k(x,y)|^p\mathrm{d}x\mathrm{d}y<+\infty(p>2)$.(所谓 $k(x,y)$ 是 L_2 强正定核,是指 $k(x,y)$ 是

L_2 对称核，且满足

$$(K\varphi, \varphi) = \int_G \int_G k(x, y)\varphi(x)\varphi(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y > 0,$$

$$\forall \varphi \in L_2(G), \quad \varphi \neq \theta,$$

又设

(Ⅴ) $f(x, u)$ 是 u 的奇函数，即

$$f(x, -u) = -f(x, u), \quad \forall x \in G, \quad -\infty < u < +\infty.$$

那末，积分方程(3·58)在 $L_p(G)$ 中必有无穷多个解．

证 由例 3.2 的讨论，考虑 $L_2(G)$ 上的 C^1 泛函(3·63)式，这时，(3·64)式成立．由于假定了核 $k(x, y)$ 是强正定的，故例 3.2 中的 $H_0 = \{\theta\}$，从而 $H_1 = L_2(G)$，H_1 是无穷维的．我们证明泛函 Ψ(见(3·63)式)在 H_1 上满足定理 4.1 的全部条件．在例 3.2 中，已验证了 Ψ 满足 P.S. 条件．由于 $f(x, u)$ 是 u 的奇函数，故易知 Ψ 是偶泛函．另外，由(3·76)式即知 Ψ 满足条件(H_1)．最后证明 Ψ 满足条件(H_2)．(这和例 4.1 中对应的证明类似)．若(H_2)不满足，则存在 $L_2(G)$ 的有限维子空间 X 以及 $\psi_n \in X$，$\|\psi_n\| \to +\infty$，使

$$\Psi(\psi_n) \geqslant 0 \quad (n = 1, 2, \cdots). \tag{4·59}$$

令 $t_n = \|\psi_n\|$，$\psi_n^* = \frac{1}{t_n}\psi_n \in X$，则

$$\psi_n = t_n \psi_n^*, \ \|\psi_n^*\| = 1, \quad t_n \to +\infty. \tag{4·60}$$

因 X 中的单位球面紧，故 ψ_n^* 有收敛子列，不妨设就是 ψ_n^* 本身，即 $\|\psi_n^* - \psi^*\| \to 0$，$\psi^* \in X$，$\|\psi^*\| = 1$，因 $H: L_2(G) \to L_p(G)$ 全连续，故 $\|H\psi_n^* - H\psi^*\|_{L_p} \to 0$，当然更有

$$\|H\psi_n^* - H\psi^*\|_2 = \left(\int_G |H\psi_n^*(x) - H\psi^*(x)|^2 \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \to 0. \tag{4·61}$$

于是，$H\psi_n^*$ 有子列几乎处处趋于 $H\psi^*$，不妨设就是 $H\psi_n^*$ 本身几乎处处趋于 $H\psi^*$. 显然 $H\psi^*\neq\theta$(因若 $H\psi^*=K^{\frac{1}{2}}\psi^*=\theta$，则 $(K\psi^*,\psi^*)=\|K^{\frac{1}{2}}\psi^*\|=0$，从而由 $k(x,y)$的强正定性，得 $\psi^*=\theta$，此与$\|\psi^*\|=1$ 矛盾). 现令

$$v_0=H\psi^*,\quad v_n=H\psi_n^*,$$

$$G_0=\{x\in G\mid v_0(x)\neq 0 \text{ 且 } v_n(x)\to v_0(x)\},$$

则 $\operatorname{mes}G_0>0$. 令 $a_0=\left(\int_{G_0}[v_0(x)]^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$，则 $a_0>0$. 由(3·62)式知，存在 $\tau_0>0$，使(4·48)式与(4·49)式成立(将其中的 Ω 换为G). 仿(4·50)的推导，可得

$$\int_G F(x,H\psi_n)\mathrm{d}x=\int_G F(x,t_nv_n)\mathrm{d}x$$

$$\geqslant\frac{4}{a_0^2}t_n^2\int_{D_n}[v_n(x)]^2\mathrm{d}x-M, \tag{4·62}$$

其中

$$M=2\left(\frac{\tau_0^2}{a_0^2}+a\tau_0+\frac{b\tau_0^p}{p}\right)\operatorname{mes}G$$

是常数，$D_n=\{x\in G\mid t_n|v_n(x)|\geqslant\tau_0\}$. 令 $D_n^*=\bigcap\limits_{k=n}^{\infty}D_k$，$D^*=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}D_n^*$. 仿例 4.1 的讨论可知(4·51)、(4·52)、(4·53)诸式都成立. 由 G_0 的定义易知 $G_0\subset D^*$，从而

$$\left(\int_{D^*}[v_0(x)]^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\geqslant\left(\int_{G_0}[v_0(x)]^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}=a_0. \tag{4·63}$$

由(4·62)、(4·51)、(4·53)、(4·63)诸式，得

$$\int_G F(x,H\psi_n)\mathrm{d}x>t_n^2-M,\quad\forall\, n>N,$$

从而，注意到(4·60)式，有

$$\Psi(\psi_n)=\frac{1}{2}\|\psi_n\|^2-\int_G F(x,H\psi_n)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{t_n^2}{2}-\int_G F(x,H\psi_n)\mathrm{d}x<-\frac{t_n^2}{2}+M,\quad \forall\, n>N,$$

故

$$\Psi(\psi_n)\to-\infty\quad(n\to\infty),\tag{4·64}$$

此与(4·59)式矛盾．故条件(H_2)满足．于是，根据定理 4.1，知 Ψ 在 $L_2(G)$ 中有无穷多个临界点 $h_n(n=1,2,\cdots)$，它们满足

$$h_n=H^*\mathbf{f}Hh_n\quad(n=1,2,\cdots),\tag{4·65}$$

从而 $u_n=Hh_n$ 是方程(3·58)在 $L_p(G)$ 中的解．由于诸 $h_n(n=1,2,\cdots)$ 互不相同，而 $k(x,y)$ 强正定，故诸 $u_n(n=1,2,\cdots)$ 也互不相同，因此，方程(3·58)在 $L_p(G)$ 中具有无穷多个解．证完．

注 4 特别，若 L_2 强正定核 $k(x,y)$ 满足

$$\int_G\int_G[k(x,y)]^{2m+2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y<+\infty,$$

其中 m 是某正整数，则函数 $f(x,u)=u^{2m+1}$ 满足上述全部条件，因此，积分方程(3·88)在 $L_{2m+2}(G)$ 中必具有无穷多个解．

注 5 例4.2结论中的(ⅰ)′可换为：

(ⅰ)″L_2 对称核 $k(x,y)$ 的非零固有值都是正的，而且有无穷多个，并且 $\int_G\int_G|k(x,y)|^p\mathrm{d}x\mathrm{d}y<+\infty(p>2)$.

这时，例 4.2 的结论仍成立(见[171])．事实上，前面已证明了泛函 Ψ(即泛函(3·63)式)在 H_1 上满足定理 4.1 的全部条件，这里 H_1 表 $H_0=\{\psi\in L_2(G)\mid K^{\frac{1}{2}}\psi=\theta\}$ 在 $L_2(G)$ 中的直交补．下证 H_1 是无穷维的．用反证法．假如 H_1 是有限维的，

设为 s 维．用 $e_1,\cdots,e_s$ 表 H_1 的就范直交基．于是任何 $\psi\in L_2(G)$ 可惟一地表为 $\psi=\psi_0+\sum_{i=1}^{s}\alpha_i e_i$，其中 $\psi_0\in H_0$，α_i 是常数．于是

$$K\psi=K^{\frac{1}{2}}K^{\frac{1}{2}}\psi_0+\sum_{i=1}^{s}\alpha_i Ke_i=\sum_{i=1}^{s}\alpha_i Ke_i,$$

由此可知，K 的值域的闭包 $\overline{K(L_2(G))}$ 是有限维的(最多 s 维)．但另一方面，由假定，K 的全系固有值有无穷多个，设为 $\{\lambda_n\}$ $(\lambda_n>0,\ n=1,2,\cdots)$，其对应的全系就范直交固有函数为 $\{\psi_n\}$ $(n=1,2,\cdots)$．

由于

$$K\psi_n=\lambda_n\psi_n,\quad \lambda_n>0\quad (n=1,2,\cdots),$$

故 $\psi_n\in K(L_2(G))\subset\overline{K(L_2(G))}$ $(n=1,2,\cdots)$．又，显然 $\{\psi_n\}$ 中任何有限个 ψ_n 都线性无关，故 $\overline{K(L_2(G))}$ 是无穷维的，从而得出了矛盾．

于是，根据定理 4.1 知 Ψ 在 H_1 中具有无穷多个临界点 h_n $(n=1,2,\cdots)$，它们满足(4·65)式，从而 $u_n=Hh_n$ 是方程(3·58)在 $L_p(G)$ 中的解．由于诸 h_n 都互不相同，故诸 u_n 也互不相同(因若 $\theta=u_n-u_m=H(h_n-h_m)=K^{\frac{1}{2}}(h_n-h_m)$，$n\neq m$，则 $h_n-h_m\in H_0$．又因 $h_n-h_m\in H_1$，故 $h_n-h_m=\theta$，矛盾)．证完．

下面，利用例 4.2 的结论来讨论常微分方程的两点边值问题：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}+f(x,u)=0,\quad 0\leqslant x\leqslant 1,\\ u(0)=u(1)=0.\end{cases}\tag{4·66}$$

结论 设 $f(x,u)$ 在 $0\leqslant x\leqslant 1,-\infty<u<+\infty$ 上连续，并且满足：

1° 存在正整数 $p>2$ 及 $a>0,b>0$，使

$|f(x,u)|\leqslant a+b|u|^{p-1},\quad \forall 0\leqslant x\leqslant 1,\quad -\infty<u<+\infty;$

2° 存在 $0\leqslant\theta<\dfrac{1}{2}$ 及 $M>0$，使

$F(x,u)=\int_0^u f(x,v)\mathrm{d}v\leqslant\theta u f(x,u),\quad \forall |u|\geqslant M,\ 0\leqslant x\leqslant 1;$

3° 下列两极限式成立：

$$\lim_{u\to 0}\frac{f(x,u)}{u}=0,\ \text{对 } 0\leqslant x\leqslant 1 \text{ 一致}$$

$$\lim_{u\to\infty}\frac{f(x,u)}{u}=+\infty,\ \text{对 } 0\leqslant x\leqslant 1 \text{ 一致}$$

4° $f(x,u)$ 是 u 的奇函数，即

$f(x,-u)=-f(x,u),\quad \forall 0\leqslant x\leqslant 1,\quad -\infty<u<+\infty.$

那末，两点边值问题(4·66)具有无穷多个属于 $C^2[0,1]$ 的解．

证 众所周知，问题(4·66)属于 $C^2[0,1]$ 的解等价于积分方程

$$u(x)=\int_0^1 k(x,y)f(y,u(y))\mathrm{d}y \tag{4·67}$$

属于 $C[0,1]$ 的解，其中 $k(x,y)$ 表对应的 Green 函数：

$$k(x,y)=\begin{cases}x(1-y), & 0\leqslant x\leqslant y\leqslant 1;\\ y(1-x), & 0\leqslant y\leqslant x\leqslant 1.\end{cases} \tag{4·68}$$

众所周知，$k(x,y)$ 是连续对称核，它的全系固有值是 $\left\{\dfrac{1}{n^2\pi^2}\right\}(n=1,2,\cdots)$，故 $k(x,y)$ 满足上面的条件(i)″．于是，根据注 5 及例 4.2 的结论知，方程(4·67)在 $L_p[0,1]$ 中具有无穷多个解 $u_n(x)(n=1,2,\cdots)$，即

$$u_n(x)=\int_0^1 k(x,y)f(y,u_n(y))\mathrm{d}y \quad (n=1,2,\cdots). \tag{4·69}$$

由于 Немыцкий 算子 $\mathbf{f}\varphi(x)=f(x,\varphi(x))$映 $L_p[0,1]$入 $L_q[0,1]\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$,故 $f(x,u_n(x))\in L_q[0,1]$,再根据(4·69)式并注意到 $k(x,y)$在$[0,1]\times[0,1]$上的一致连续性,即知 $u_n(x)$在$[0,1]$上连续．证完．

注 6 特别地,函数 $f(x,u)=u^{2m+1}$(m 是正整数)满足上述全部条件,故两点边值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}+u^{2m+1}=0, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ u(0)=u(1)=0\end{cases} \tag{4·70}$$

具有无穷多个属于 $C^2[0,1]$的解．

参 考 文 献

〔1〕 田方增,非线性泛函分析国外近况简述,应用数学与计算数学, 5(1979),60～86.

〔2〕 关肇直,泛函分析讲义,高等教育出版社, 1958.

〔3〕 张恭庆,临界点理论及其应用,上海科学技术出版社, 1986.

〔4〕 陈文嫄,非线性泛函分析,甘肃人民出版社, 1982.

〔5〕 D. Guo (郭大钧), V. Lakshmikantham, Nonlinear problems in abstract cones, Academic Press, Inc., Boston, 1988.

〔6〕 M. A. Красносельский, Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений, Москва, 1956.

〔7〕 M. M. Вайнберг, Вариационные методы исследования нелинейных операторов, Москва, 1956.

〔8〕 M.S. Berger, Nonlinearity and functional analysis, New York, 1977.

〔9〕 M. A. Красносельский и П. П. Забрейко, Геометрические методы нелинейного анализа, Москва, 1975.

〔10〕 J. Cronin, Fixed Points and topological degree in nonlinear analysis, Amer. Math. Soc., 1964.

〔11〕 J.T. Schwartz, Nonlinear functional analysis, New York, 1969.

〔12〕 H. Jeggle, Nichtlineare Funktionalanalysis, B.G. Teubner Stuttgart, 1979.

〔13〕 L. Nirenberg, Topics in nonlinear functional analysis, New York, 1973～1974.

〔14〕 E. Zeidler, Vorlesungen über nichtlineare Funktionalanalysis Ⅰ, Fixpunktsätze, Leipzig, 1976.

〔15〕 E. Zeidler, Vorlesungen über nichtlineare Funktionalanalysis Ⅱ, Monotone Operatoren, Leipzig, 1977.

〔16〕 K. Deimling, Nonlinear functional analysis, Springer－Verlag, Berlin, 1985.

〔17〕 冷生明，Caratheodory 算子的连续性，北京大学学报，2(1957)，159～166.

〔18〕 郭大钧，B. B. Немыцкий 算子的性质及其应用，数学进展，6(1963)，70～91.

〔19〕 王声望，Немыцкий 算子的若干性质，科学通报，1980 年数理化专辑，42～45.

〔20〕 冷生明，Урысон 算子的连续性，北京大学学报，2(1958)，131～143.

〔21〕 王声望，Ладыженский 关于 Урысон 算子的全连续性的一个定理的逆，数学学报，13(1963)，254～261.

〔22〕 郭大钧，Полная непрерывность оператора П. С. Урысона，*Scientia Sinica*(中国科学)，Vol. Ⅺ，No.4(1962)，437～452.

〔23〕 郭大钧，Hammerstein 型非线性积分方程的固有值，数学学报，20(1977)，99～108.

〔24〕 江泽涵，拓扑学引论，上海科学技术出版社，1978.

〔25〕 A. H. Stone, Paracompactness and product space, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 54(1948), 977～982.

〔26〕 J. Dugundji, An extension of Tietze's theorem, *Pacific J. Math.*, 1(1951), 353～367

〔27〕 M.M. 瓦英贝尔格(郭大钧译)，线性空间中微分学的一些问题，数学进展，4:1(1958)，14～54.

〔28〕 郭大钧，П. С. Урысон 算子的可微性，山东大学学报(自然科学版)，1(1965)，1～6.

〔29〕 L. Hörmander, Implicit function theorems, Lectures at Stanford University, 1977.

〔30〕 P. Alexandroff, H. Hopf, Topologie, 1935.

〔31〕 S. Lefschetz, Introduction to topology, Princeton, 1949, pp. 124～131.

〔32〕 M. Nagumo, A theory of degree of mapping based on infinitesimal anal-

ysis, *Amer. J. Math.*, 73(1951), 485～496.

〔33〕 M. Nagumo, Degree of mapping in convex lincar topological spaces, *Amer. J. Math.*, 73(1951), 497～511.

〔34〕 N.G. Lloyd, Degree theory, Camb. Univ. Press, 1978.

〔35〕 G. Eisenack, C. Fenske, Fixpunkttheorie, 1978.

〔36〕 L. Cesari, R. Kannan, H. F. Weinberger, Nonlinear analysis, Academic Press, Inc., 1978.

〔37〕 С. Л. 索伯列夫，泛函分析在数学物理中的应用，科学出版社，1959.

〔38〕 E. Heinz, An elementary analytic theory of the degree of mapping in n－dimensional space, *J. Math. Mech.* 8(1959), 231～247.

〔39〕 陈文嵘，Banach 空间中非线性方程解的指数，数学学报，13(1963)，315～322.

〔40〕 N. Dunford, J.T. Schwartz, Linear operators, Ⅰ, New York, 1958.

〔41〕 M. Altman, A fixed point thoerem in Banach space, *Bull. Polish Acad. Sci.*, 5(1957), 19～22.

〔42〕 郭大钧，Eigenvalues and eigenvectors of nonlinear oprators，数学年刊，Vol.2 英文版(1981)，65～80.

〔43〕 郭大钧，一个新的不动点定理，数学学报，24(1981)，444～450.

〔44〕 陈文嵘，秦成林，紧摄动连续映象，数学研究与评论，创刊号(1981)，39～46.

〔45〕 G.H. Hardy, J. Littlewood, G. Pōlya, Inequalities, Second Edition, 1952.

〔46〕 J. Cronin, Eigenvalues of some nonlinear oprators, *J. Math. Anal. Appl.*, 38(1972), 659～667.

〔47〕 张庆雍，某些非线性算子的固有值，科学通报，26(1981)，649～651.

〔48〕 I. Stakgold, Branching of solutions of nonlinear equations, *SIAM Review*, 13(1971), 289～332.

〔49〕 M.M. Vainberg, V.A. Trenogin, Theory of branching of solutions of

non - linear equations, 1974.

〔50〕 D. H. Sattinger, Stability of bifurcating solutions by Leray - Schauder degree, *Arch Rational Mech. Anal.*, 43(1971), 154～166.

〔51〕 M. Crandall, P. Rabinowitz, Bifurcation, perturbation of simple cigenvalues and linearized stability. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 52 (1973), 161～180.

〔52〕 陈文嫄，含非线性参数 Урысон 方程的枝点．数学进展，7(1964)，39～42.

〔53〕 郭大钧，Hammerstein 型非线性积分方程的可解性及其应用，数学学报，16(1966)，137～149.

〔54〕 K. E. Gustafson, Introduction to partial differential equations and Hilbert space methods, New York, 1980.

〔55〕 H. Amann, S. A. Weiss, On the uniqueness of the topological degree, *Math. Z.*, 130(1973), 39～54.

〔56〕 白锦东，Hammerstein 型非线性积分算子的固有值与固有元，科学通报，27(1982)，449～451.

〔57〕 郭大钧，Hammerstein 型非线性积分方程的固有值与固有函数，数学学报，25(1982)，419～426.

〔58〕 K. Kuratowski, Sur les éspaces complets, *Fund. Math.*, 15(1930), 301～309.

〔59〕 R. D. Nussbaum, The fixed point index for local condensing maps, *Ann. Mat. Pura Appl.*, 89(1971), 217～258.

〔60〕 R. D. Nussbaum, The fixed point index and asymptotic fixed point theorems for k - set contractions, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 75(1969), 490～495.

〔61〕 R. D. Nussbaum, Degree thoery for local condensing maps, *J. Math. Anal. Appl.*, 37(1972), 741～766.

〔62〕 B. N. Sadovskii (**Б. Н. Садовский**), A fixed point principle, *Functional Anal. Appl.*, 1(1967), 151～153.

〔63〕 G. Darbo, Punti uniti in trasformazioni a condominio non compatto,

Rend. Sem. Math. Univ. Padova, 24(1955), 84～92.

〔64〕 M. A. Красносельский, Два замечания о методе последовательных приближений, *УМН* 10(1955), 123～127.

〔65〕 S. Chandrasekhar, The transfer of radiation in stellar atmospheres, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 53(1947), 641～711.

〔66〕 R. W. Leggett, On certain nonlinear integral equations, *J. Math. Anal. Appl.*, 57(1977), 462～468.

〔67〕 R. W. Leggett, A new approach to the H－equation of Chandrasekhar, *SIAM J. Math. Anal.*, 7(1976), 542～550.

〔68〕 G. A. Hively, On a class of nonlinear integral equations arising in transport theory, *SIAM J. Math. Anal.*, 9(1978), 787～792.

〔69〕 郭大钧，孙经先，非线性积分方程，山东科学技术出版社，1987.

〔70〕 郭大钧，孙经先，抽象空间常微分方程，山东科学技术出版社，1989.

〔71〕 张恭庆，姜伯驹，集值映射的不动点指数与带间断非线性项的椭圆型方程的多重解，数学学报，21(1978)，26～43.

〔72〕 F. E. Browder, W. V. Petryshyn, Approximation methods and generalized topological degree for nonlinear mappings in Banach spaces, *J. Functional Anal.*, 3(1969), 217～245.

〔73〕 W. V. Petryshyn, On the approximation－solvability of equations involving A－proper and pseudo－A－proper mappings, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 81(1975), 223～312.

〔74〕 冯德兴，李树杰，单调映射的拓扑度，数学学报，24(1981)，106～115.

〔75〕 李树杰，冯德兴，Hilbert 空间中多值极大单调算子的拓扑度，数学学报，25(1982)，533～541.

〔76〕 M. Г. Крейн, M. A. Рутман, Линейные операторы, оставляющие инвариантным конус в пространстве Банаха, *УМН* 3(1948), 3～95.

〔77〕 M. A. Красносельский, Положительные решения операторных

уравнений, Москва, 1962.

〔78〕 H. Amann, Fixed point equations and nonlinear eigenvalue problems in ordered Banach spaces, *SIAM Review*, 18(1976), 620～709.

〔79〕 H. Amann, On the number of solutions of nonlinear equations in ordered Banach spaces, *J. Funct. Anal.*, 11(1972), 346～384.

〔80〕 郭大钧，一类凹与凸算子的不动点与固有元，科学通报，30(1985)，1132～1135.

〔81〕 郭大钧，Positive fixed points and eigenvectors of noncompact decreasing operators with applications to nonlinear intergral equations，数学年刊，14B(4)(1993)，419～426.

〔82〕 A. Pazy, P. H. Rabinowitz, A nonlinear integral equation with applications to neutron transport theory, *Arch. Rational Mech. Anal.*, 32 (1969), 226～246.

〔83〕 A. Pazy, P. H. Rabinowitz, Corrigendum: A nonlinear integral equation with applications to neutron transport theory, *Arch. Rational Mech. Anal.*, 35(1969) 409～410.

〔84〕 郭大钧，中子迁移理论中一非线性积分方程的解，数学学报，22 (1979)，231～236.

〔85〕 褚圣麟，原子核物理学导论，高等教育出版社，1965.

〔86〕 田方增，球几何中子迁移方程问题谱的性质和齐次初始问题解的渐近性，应用数学与计算数学，1(1964)，98～120.

〔87〕 林群，中子迁移方程本征函数的界，科学通报，2(1975)，76～77.

〔88〕 朱广田，林群，迁移方程离散纵标法的收敛性，应用数学学报，5 (1982)，53～59.

〔89〕 朱广田，林群，多群迁移与临界问题，应用数学学报，5(1982)，60～65.

〔90〕 郭大钧，关于锥映象的几个不动点定理，科学通报，28(1983)，1217～1219；外文版，29(1984)，575～578.

〔91〕 郭大钧，Hammerstein 型非线性积分方程的非零解，科学通报，24 (1979)，193～197.

〔92〕 М. А. Красносельский, П. Е. Соболевский, О неотрицательной собственной функции первой краевой задачи для эллиптического уравнения, *УМН*, 16(1961), 197～199.

〔93〕 К Миранда (C. Miranda), Уравнения с частными производными эллиптического типа, Москва, 1957.

〔94〕 D. Gilbarg, N. S. Trudinger, Elliptic partial differential equations of second order, Springer－Verlag, 1977.

〔95〕 T. B. Benjamin, A unified theory of conjugate flows, *Philos. Trans. Roy. Soc. London*,, 269(1971), 587～647.

〔96〕 郭大钧，Hammerstein 型非线性积分方程正解的个数，数学学报，22 (1979)，584～595.

〔97〕 N. P. Các, J. A. Gatica, Fixed point theorems for mappings in ordered Banach spaces, *J. Math. Anal. Appl.*, 71(1979), 547～557.

〔98〕 A. C. Zaanen, Linear analysis, Amsterdam, 1953.

〔99〕 J. A. Gatica, H. L. Smith, Fixed point techniques in a cone with applications, *J. Math. Anal. Appl.*, 61(1977), 58～71.

〔100〕 R. Courant, D. Hilbert, Methods of mathematical physics, Vol. Ⅰ, 1953.

〔101〕 I. Massabo, C. A. Stuart, Positive eigenvectors of k－set contractions, *Nonlinear. Anal. TMA*, 3(1979), 35～44.

〔102〕 R. W Leggett, L. R. Williams, A fixed point theorem with application to an infectious disease model, *J. Math. Anal. Appl.*, 76(1980), 91～97.

〔103〕 L. R. Williams, R. W. Leggett, Nonzero solutions of equations modeling infectious disease, *SIAM J. Math. Anal.*, 13(1982), 112～121.

〔104〕 C. A. Stuart, Positive solutions of a nonlinear integral equation, *Math. Ann.*, 192(1971), 119～124.

〔105〕 郭大钧，核物理中一个非线性积分方程的解，科学通报，23 (1978)，27～31.

〔106〕郭大钧，张庆雍，核物理中一个非线性积分方程解的惟一性，科学通报，24(1979)，678～681.

〔107〕M.A. Красносельский, В.Я. Стеценко, О некоторых нелинейных задачах, имеющих много решений, *Сиб. Матем. Жур.*, 4 (1963), 120～137.

〔108〕T. Leatsch, Existence and bounds for multiple solutions of nonlinear equations, *SIAM J. Appl. Math.*, 18(1970), 389～400.

〔109〕M.G. Grandall, P.H. Rabinowitz, Multiple solutions of a nonlinear integral equation, *Arch. Rational Mech. Anal.*, 37(1970), 262～267.

〔110〕D. Cohen, Multiple stable solutions of nonlinear boundary value problems arising in chemical reactor theory, *SIAM J. Appl. Math.*, 20 (1971), 1～13.

〔111〕张恭庆，等离子体磁面方程自由边界问题的解，科学通报，21 (1976)，225～227.

〔112〕张恭庆，带间断非线性项的椭圆型方程的多重解，中国科学，5 (1977)，415～430.

〔113〕张恭庆，姜伯驹，渐近线性算子的多重解，科学通报，23(1978)，340～343.

〔114〕R.W Leggett, L.R. Williams, Multiple positive fixed points of nonlinear operators on ordered Banach spaces, *Indiana Univ. Math. J.*, 28(1979), 673～688.

〔115〕M.S. Berger, Nonlinear problems with exactly three solutions, *Indiana Univ. Math. J.*, 28(1979), 689～698.

〔116〕L.R. Williams, R.W Leggett, Multiple fixed point theorem for problems in chemical reactor theory, *J. Math. Anal. Appl.*, 69(1979), 180～193.

〔117〕郭大钧，Hammerstein 非线性积分方程非零解的个数及其应用，科学通报，27(1982)，257～260.

〔118〕郭大钧，非线性算子方程的正解及其对非线性积分方程的应用，

数学进展，13(1984)，294～310.

〔119〕 P.J. Bushell, Hibert's metric and positive contraction mappings in a Banach space, *Arch. Rational Mech. Anal.*, 52(1973), 330～338.

〔120〕 P.J Bushell, On a class of Volterra and Fredholm non－linear integral equations, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 79(1976), 329～335.

〔121〕 A.J.B. Botter, Existence theorem for a nonlinear integral equation, *J. London Math. Soc.*, 11(2)(1975), 7～10.

〔122〕 夏道行、严绍宗、吴卓人、舒五昌，实变函数论与泛函分析(下册)，人民教育出版社，1979.

〔123〕 关肇直，张恭庆，冯德兴，线性泛函分析入门，上海科学技术出版社，1979.

〔124〕 G.J. Minty, Monotone (nonlinear) operators in Hilbert space, *Duke Math. J.*, 29(1962), 341～346.

〔125〕 F.E. Browder, Multi－valued monotone nonlinear mappings, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 118(1965), 338～351.

〔126〕 关肇直，解非线性函数方程的最速下降法，数学学报，6(1956)，638～650.

〔127〕 H. Brézis, Operateurs maximaux monotones et semi－groupes de contractions dans les espaces de Hilbert, Amsterdam, 1973.

〔128〕 M. M. Вайнберг, Вариационный метод и метод монотонных операторов, Москва, 1972.

〔129〕 P. И. Качуровский, Нелинейные монотонные операторы в банаховых пространствах, *УМН*, 23(1968), 121～168.

〔130〕 D. Pascali, S. Sburlan, Nonlinear mappings of momotone type, România, 1978.

〔131〕 F.E. Browder, C.P. Gupta, Monotone operators and nonlinear integral equations of Hammerstein type, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 75 (1969), 1347～1353.

〔132〕 H. Brézis, F.E. Browder, Nonlinear integral eauations and systems of

Hammerstein type, *Advances in Math.*, 18(1975), 115～147.

〔133〕郭大钧，关于锥拉伸与锥压缩不动点定理，科学通报，26(1981)，1087；外文版，27(1982)，685.

〔134〕赵增勤，郭氏定理的再推广，数学杂志，12(3)(1992)，272～280.

〔135〕李立康，郭毓駒，索伯列夫空间引论，上海科学技术出版社，1981.

〔136〕E. Asplund, Averaged norms, *Israel J. Math.*, 5(1967), 227～233.

〔137〕A.E. Taylor, Introduction to functional analysis, New York, 1968.

〔138〕Л. А. Люстерник, В. И. Соболев, Элементы функционального анализа, издание второе, Москва, 1965.

〔139〕陈文嵃，线性算子分解的一个问题，东北人民大学学报，1(1957)，95～98.

〔140〕V. Lakshmikantham, S. Leela, Nonlinear differential equations in abstract spaces, Pergamon Press, Oxford, 1981.

〔141〕郭大钧，多项式型 Hammerstein 积分方程的正解及其应用，数学年刊，A辑，4:5(1983)，645～656.

〔142〕郭大钧，减算子的一个不动点定理及其应用，科学通报，29(1984)，189；外文版，30(1985)，1552～1553.

〔143〕孙经先，关于拓扑度的计算及其对于非线性算子的应用，数学学报，28(1985)，347～359.

〔144〕孙经先，非线性算子方程的一个三解定理，科学通报，28(1983)，765.

〔145〕黄春朝，郭大钧定理的一个推广，科学通报，29(1984)，1341.

〔146〕A. Ambrosetti, P.H. Rabinowitz, Dual variational method in critical point theory and applications, *J. Functional Anal.*, 14(1973), 349～381.

〔147〕L. Nirenberg, Variational and topological methods in nonlinear problems, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 4(1981), 267～300.

〔148〕张恭庆，一个变化的 Mountain Pass 定理，中国科学(A辑)，4(1983)，306～317.

〔149〕 C.Г. 米赫林,数学物理中的直接方法，高等教育出版社，1957.

〔150〕 D.C. Clark, A variant of the Lusternik – Schnirelman theory, *Indiana Univ. Math. J.*, 22(1972), 65～74.

〔151〕 P.H. Rabinowitz, Variational methods for nonlinear eigenvalue problems, Course of Lectures – CIME, Varenna, Italy, 1974.

〔152〕 G.G. 洛伦兹(谢庭藩，施咸亮译)，函数逼近论，上海科学技术出版社，1981.

〔153〕 C.V. Coffman, A minimum – minimax principle for a class of nonlinear integral equations, *J. Analyse Math.*, 22(1969), 391～419.

〔154〕 赵义纯，On the topological degree for the sum of maximal monotone operator and generalized pseudomonotone operator, 数学年刊，4B(2)(1983), 241～253.

〔155〕 郭大钧，The number of nontrivial solutions of nonlinear two – point boundary value problems, 数学研究与评论，4:1(1984), 55～60.

〔156〕 郭大钧，Some fixed point theorems and applications, Nonlinear *Anal. TMA*, .10(1986), 1293～1302.

〔157〕 H. Amann, A note on degree theory for gradient mappings, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 85(1982), 591～595.

〔158〕 H. Voss, Existence and bounds for positive solutions of superlinear Uryson equations, *Applicable Anal.*, 9(1979), 81～91.

〔159〕 J. Appell, Implicit functions, nonlinear integral equations, and the measure of noncompactness of the superposition operator, *J. Math. Anal. Appl.*, 83(1981), 251～263.

〔160〕 J. Appell, P.P. Zabreiko, On a theorem of M.A. Krasnosel'skii, *Nonlinear Anal. TMA*, 7(1983), 695～706.

〔161〕 D.G. de Figueiredo, P. – L. Lions, R.D. Nussbaum, A priori estimates and existence of positive solutions of semilinear elliptic equations, *J. Math. Pures et Appl.*, 61(1982), 41～63.

〔162〕 S.W. Du, V. Lakshmikantham, Monotone iterative technique for differential equations in a Banach space, *J. Math. Anal. Appl.*, 87

(1982), 454～459.

〔163〕 P. Marocco, A study of asymptotic behavior and stability of the solutions of Volterra equations using topoligical degree, *J. Diff. Eq.*, 43 (1982), 235～248.

〔164〕 H. R. Thieme, On a class of Hammerstein integral equations, *Manuscripta Math.*, 29(1979), 49～84.

〔165〕 梁展东，Hilbert 投影距离与范数的关系，系统科学与数学，8:1 (1998), 88～91.

〔166〕 杨书郎，关于 Banach 空间中一类非线性方程的若干问题，数学学报，38(1995), 371～380.

〔167〕 孙经先，非连续的增算子的不动点定理及其对含间断项的非线性方程的应用，数学学报，31(1988), 101～107.

〔168〕 孙经先，增算子的不动点定理及其对 Banach 空间含间断项的非线性方程的应用，数学学报，34(1991), 665～674.

〔169〕 戚桂杰，山路引理的推广，科学通报，31(1986), 724～727；外文版，32(1987), 798～801.

〔170〕 杜一宏，一类非紧算子的不动点及其应用，数学学报，32(1989), 618～627.

〔171〕 郭大钧，The number of nontrivial solutions to Hammerstein nonlinear integral equations，数学年刊，7B(2)(1986), 191～204.

索　　引

一～三画

四　　画

五　画

六　画

七 画

八　画

九　画

十　画

十 一 画

十 二 画

十 三 画

十四画以上

英文字母起头

俄文字母起头

后　　记

本书是笔者在山东大学数学系给硕士研究生讲授《非线性泛函分析》课程的教材基础上，加上近几年来在科研活动中所获得的若干成果整理而成。书中部分内容，笔者曾在成都、厦门、太原、南昌、郑州等地讲授过。

中国科学院数学研究所副所长田方增研究员为本书写了序，并提出了许多宝贵的建议；孙经先同志也付出了辛勤的劳动，在此一并表示谢意。

限于作者水平，书中不妥之处，敬请读者指正。

郭大钧

1983年11月15日

于山东大学

第二版后记

本书1985年出版后，一直作为山东大学数学系硕士研究生的教材，同时，也被四川大学、山西大学、江西师范大学、徐州师范大学、曲阜师范大学等高校数学系选作硕士研究生教材。本书1988年获国家教委高校优秀教材二等奖并入选国家教委“九五”重点教材，1998年又获教育部科技进步二等奖。本书被引用较多，在1998年中科院文献情报中心朱献有主编出版的《中国科学计量指标：论文与引文统计(1998年卷)》所列我国1997年专著和译著被引频次最高的前50名专著中，笔者名列第29位(并列)，本书被引频次是27。

限于作者水平，本书第二版不妥之处，敬请读者指正。

郭大钧

2001年4月20日

于山东大学南院